

～ガイダンス, 複素関数の定義と基本的な性質～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/>

2026 年 9 月 22 日

目次

A	自己紹介・ガイダンス	1
A.1	自己紹介	1
A.2	注意	2
A.3	ガイダンス	2
B	(複素) 関数論とは	3
B.1	授業内容	3
B.2	歴史	4
B.2.1	Cardano (1501–1576, イタリア)	4
B.2.2	Bombelli (1526–1572, イタリア)	5
B.2.3	以後は少し駆け足で	6
1	複素数の定義とその性質	6
1.1	高校で習ったこと + α	6
C	問の解答	9
	参考文献	10

A 自己紹介・ガイダンス

A.1 自己紹介

- かつらだ まさし
桂田 祐史
- 専門は数値解析 (数値計算法の数理の関数解析的研究)
- 研究室は高層棟 910 号室

- 質問・相談はメールでも可
(メールアドレスは katurada あつと meiji どっと ac ドット jp)

A.2 注意

- 火曜の「複素関数」、水曜の「複素関数演習」通して 1 つの科目と考えて欲しい。2 つに分けてあるのはシステム上の問題。片方だけ履修しようとする人が毎年いるけれど、今年度は動画があるわけではなく、自習して単位取得するのは難しい。
(「複素関数」は、一つの話題が長く続き、講義数回分を通して聞いてようやく納得できる、という性質があるので、間が抜けていると分からなくなって、面白く感じられないだろうし、つらいと思う。)
- この授業では私語禁止 (何か話したいことがあったら教室の外で)。入退室は自由 (ただし静かに)。質問はいつでも自由にして下さい。

A.3 ガイダンス

1. 「複素関数」とは何か。講義で何をするか。
複素変数、複素数値の関数 ($w = f(z)$ の z と w が複素数) を **複素関数** とよぶ。
分野の名前としては、**(複素) 関数論** とか **複素解析** などが使われる。
関数論の入門部分を講義する。内容は、理工系の学科の相場 (**後述**)。参考書は探しやすい。
原則として証明を付ける。数学科以外の学科の 2 倍の時間をかける。
2. 板書をするので、ノートを取って下さい (講義メモ PDF は公開する)。出席を取ります (2/3 以上の出席が原則)。
3. 質問は次のいずれかで行うこと。
(a) 直接会って質問する (授業直後、研究室訪問)。 (b) メールで尋ねる。
4. 急ぎの質問・相談はメールで。
メールアドレスは、Oh-o! Meiji のシラバスの補足に記してある。
5. 「複素関数」「複素関数演習」両方とも履修すること。1 科目だけの履修は、ルール上は出来るが、勧めない。
(宿題・期末レポートの量は変わらないので 1 科目だけの履修は損。)
6. 毎週 1 つ宿題を出す。翌週の火曜 2 限までに Oh-o! Meiji 「複素関数**演習**」に提出すること。原則として、単一の PDF ファイル (A4 サイズ) とする。最初のページに学年・組・番号・氏名を明記すること。解答は講義で説明 & PDF を公開 (タイミングは色々… 計算とかは要点を説明して PDF を見なさい、その他はちゃんと説明し、試験前に PDF 公開)。大部分は添削してフィードバックするので、コメントを読んで復習すること。

- 「複素関数」のみ履修する人は連絡して下さい。宿題をどのように提出するか、相談します。
- 毎週の宿題 20 点, 後は期末試験、で成績評価する。
宿題の得点は〆切りを守って提出するかどうか、真面目にやったか。
翌週火曜の授業で宿題を解説するので、それ以降の提出は 0 点とする。
特別な事情がある場合は出来るだけ早く個別に相談すること。宿題を全部出すと簡単には落ちない。
- 復習を推奨する。
WWW サイト <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex/> で講義メモ、宿題、講義ノート [1]、演習問題 (解答付)、過去問 (解答付) 等公開
ミラーサイト <https://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/>
- 期末試験の解答に必要なことは宿題に出て来るはず。
(過去問は公開しているが、**まずは宿題の復習**から始めるのを勧める。)
市販のテキストを使って問題演習しても十分な準備ができる。
- 神保 [2] を教科書とする。
丸善 eBook Library (<https://elib.maruzen.co.jp/elib/>) にある。
特に

<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063>

B (複素) 関数論とは

B.1 授業内容

(複素) 関数論は、おおざっぱに言って、複素関数の微積分である。

複素関数とは、変数も値も複素数であるような関数のことをいう ($w = f(z)$ の z, w が複素数ということ)。

特に微分可能な複素関数を**正則関数**と呼ぶ。

豊富な内容があるが、この講義の目標はその入門部分で、具体的には

Cauchy の積分定理、**Cauchy の積分公式**、**留数**、**留数定理**による定積分計算
どれもほぼ Cauchy (1789–1857) がやったこと。

Cauchy の積分定理

複素平面内の**閉曲線** C が「囲む」領域と C 上で f が正則ならば

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

真面目に考えると「囲む」はやっかいなところがある。

Cauchy の積分公式

複素平面内の単純閉曲線 C が囲む領域と C 上で f が正則ならば

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \text{ は } C \text{ の囲む領域内の任意の点}).$$

正則関数の冪級数展開可能性

c の近傍で**正則**な関数 f は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n,$$
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad \left(= \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right)$$

と**冪級数展開** (Taylor 展開) 出来る。ゆえに f は無限回微分可能である。

1 回微分可能ならば無限回微分可能？ 実関数の微積分とは相当違うことが分かる。

留数定理による定積分計算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

(微積分で $\tan^{-1}$ を使っても計算できるけれど... $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$ のような原始関数を求めるのが面倒なものも同様に計算できる。)

不思議の理解に時間がかかる。

B.2 歴史

なぜ複素数を使う必要があるのか？

Cauchy 以前の話を紐解くべきだ。

B.2.1 Cardano (1501–1576, イタリア)

Cardano は 3 次方程式の解法を発表した (1545 年)。 $x^3 + px + q = 0$ に対して

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

は解となる (**Cardano の公式**, Ars magna de Rebus Algebraicis (1545))。

まず $p, q \in \mathbb{R}$ の場合に検討しよう。

3 次方程式にも**判別式**があり、今の場合は

$$\Delta := -(27q^2 + 4p^3) = -108 \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right] \quad (108 = 2^2 \cdot 3^3).$$

この Δ を用いると、(1) は次のように書き換えられる:

$$(2) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

Δ は判別式の名にふさわしく、次のことが成り立つ (微積分で容易に証明できる)。

- $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 相異なる 3 実根を持つ。
- $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 重根を持ち、かつすべての根は実数である。
- $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 1 つの実根と、互いに複素共役な虚根を持つ。

$\Delta \leq 0$ のときは、 $\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は非負の実数であり、(2) の x は、2 つの実数の 3 乗根の和であるから、**実数解**を与える。特に $\Delta < 0$ のときは、これが唯一の実数解である。

3 次方程式なので、他に 2 つの根があるはず。Cardano は書かなかったけれど、

$$\omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \quad \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}.$$

ただし $\omega := \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$

問題は $\Delta > 0$ の場合 (相異なる 3 実根を持つ場合)。このとき、 $\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}$ は純虚数であり、(2) の x は、2 つの虚数の 3 乗根の和である。虚数の n 乗根については、後で学ぶが (数学 C でもやってあるわけだが…)、一意的には定まらない、という問題がある。

Cardano は著書の中で、 $\Delta > 0$ となる例は取り上げなかったが、虚数の必要性に気づいていたらしく、負数の平方根については「和が 10、積 40 がである 2 数を求めよ (答は $t^2 - 10t + 40 = 0$ を解いて $5 \pm \sqrt{15}i$)」という有名な問題を残している。

B.2.2 Bombelli (1526–1572, イタリア)

Bombelli は、虚数について詳しい分析をして、Cardano の公式 (1) は $\Delta > 0$ のときも**解を表す**、と述べた (“L’Algebra” 1572 年, 1579 年)。

例えば

$$x^3 = 15x + 4.$$

この解は $x = 4, x = -2 \pm \sqrt{3}$ (高校数学で解ける)。

この方程式に対して、Cardano の公式 (1) は

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

という数を与えるが、Bombelli は虚数に関する計算法を導入し、この x は 4 に等しい、と論じた。

(と書いてある資料が多いのだが、 $x^3 = 6x + 40$ という方程式を載せているものもある。Bombelli の著作はネットに画像が載っているけれど…)

実は、 $\Delta > 0$ (相異なる 3 実数解) のとき、“虚数を使わずに解を表す公式 (ただし根号を用いるもの)” は存在しないことが分かった。

3 次方程式の解の公式を求めたいという場合に、実数解だけが欲しいとしても、虚数とつきあわない訳には行かない。

B.2.3 以後は少し駆け足で

- de Moivre (1667–1754, フランス)

$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (1730 年とか「1722 年に示唆されたが、彼の著作には、決してはっきりとは述べられなかった。」マオール [3])

- Euler (1707–1783, スイス-ロシア)

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (1748 年), $e^{i\pi} = -1$. その他。

- Gauss (1777–1855, ドイツ)

複素 (数) 平面、代数学の基本定理、実は他にも色々知っていたが発表せず。

- Cauchy (1789–1857, フランス)

定積分計算のために、ほぼこの講義科目の内容を考え出した。

- 19 世紀は関数論の世紀 (?)

Abel (1802–1829, ノルウェー), Jacobi (1804–1851, ドイツ), Weierstrass (1815–1897, ドイツ), Riemann (1826–1866, ドイツ)

楕円関数、代数関数、Riemann 面

- 量子力学

量子力学には複素数が本質的に必要である。

この講義の目標は、Cauchy がやったところまでである。

Abel と Weierstrass の極限 (級数) の議論は使わせてもらうが、それを除いて、Abel, Jacobi, Weierstrass, Riemann の成果は「将来の課題」とする。

1 複素数の定義とその性質

1.1 高校で習ったこと + α

複素数は高校数学で一応は教わったが、教科書にきちんとした定義が書いてあるとは言いにくい。でも、まずはそれをおさらいしてみよう。

$i^2 = -1$ となる数 (虚数単位, the imaginary unit) i を導入し、 $a + bi$ (a と b は実数) と書ける数を複素数 (a complex number) という。複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。

手短に言うと、 i^2 が出て来たら -1 で置き換える以外は、 i を変数とする文字式と同じように (つまり実数と同じ計算ルールで) 計算する。

具体的には

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

で和と積を定める (定められる?)。

実数でない複素数のことを**虚数** (an imaginary number) と呼ぶ。つまり虚数とは、 $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) と書ける数のことをいう。

複素数と虚数を混同する人がとても多い。注意しましょう。

2026/9/22 の講義はここまでです。これ以降は 9/29 の講義で説明します。

$b = 0$ のとき、つまり $a + i0$ を単に a と表す。実数と見分けがつかない。「同一視」していることになる (つまり「**実数は複素数**」)。2つの実数を実数として足したりかけたりしたものは、複素数として足したりかけたりものと、結果は同じになるので、矛盾は生じない。

$a = 0$ のとき、つまり $0 + bi$ を単に bi と表す。この bi を**純虚数** (a purely imaginary number) と呼ぶ。この定義によると、 $0 = 0 + 0i$ も純虚数であり、「**0 は虚数ではないが純虚数である**」ということになる。(個人的には気持ちが悪いので、この言葉はこの授業では使わないことにしている。本を読むとたまに出て来るので、一応知っていた方が良いでしょう。なお、高校の教科書には「 $a = 0, b \neq 0$ のとき bi の形の複素数を純虚数という。」と書いてあったりする。正直とてもおかしいと思う。)

以上が高校数学での複素数であるが、かなりいい加減で、定義とは言いにくい (書いていても気持ちが悪い)。

きちんとした定義は、次項 (§1.2) で与えることにする。

虚数単位の記号 虚数単位は純粹数学の文献では i と書かれるが、電流を i と書きたい分野では j と書かれたりする。JIS (日本工業規格) では、字体を立体にして i あるいは j と書くことになっている (そうである)。

プログラミング言語では

- Mathematica では、虚数単位を I で表す。
- MATLAB では i, j のどちらも虚数単位を表し、 i や j を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も $1i$ や $1j$ は虚数単位を表す。
- Python では、 j で虚数単位を表し、 j を変数名として用いて異なる値を割り当てた場合も $1j$ は虚数単位を表す。

複素変数を表す文字 複素数の変数は、 z, w, ζ などの文字で表されることが多い (ζ はギリシャ文字で (大文字は Z)、ゼータ、またはツェータと読む)。

実部・虚部 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して、 x, y をそれぞれ z の**実部** (the real part of

z 、**虚部** (the imaginary part of z) と呼び、 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ で表す:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(この記号は高校では出て来ていないかもしれない。)

(w の実部・虚部には u, v が、 ζ の実部・虚部には ξ, η が使われることが多い:
 $w = u + iv, \zeta = \xi + i\eta$)

例 1.1 $z = 1 - 2i$ のとき、 $\operatorname{Re} z = 1, \operatorname{Im} z = -2$. 次のようにも書ける。

$$\operatorname{Re}(1 - 2i) = 1, \quad \operatorname{Im}(1 - 2i) = -2.$$

(**注意** $\operatorname{Im}(1 - 2i) = -2i$ ではない。)

加法・乗法の単位元&逆元 加法の単位元は $0 = 0 + 0i$, 乗法の単位元は $1 = 1 + 0i$ である。

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad z + 0 = 0 + z = z, \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

複素数は、0 でない任意の数で割算が出来る。

$z = x + iy \neq 0$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の、乗法に関する逆元 w を求めよう。

w が z の乗法に関する逆元とは

$$zw = 1$$

を満たすことをいう。 $z = 0$ の逆元は存在しない。 $z \neq 0$ の逆元を求めよう。

$w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) とおくと、 $(x + iy)(u + iv) = 1$ は

$$(3) \quad \begin{cases} xu - yv = 1 \\ xv + yu = 0 \end{cases}$$

という連立 1 次方程式と同値である。この方程式は、 $z \neq 0$ のときは一意的な解

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

を持つ。ゆえに $z \neq 0$ の逆元 w は一意的に存在して

$$w = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

問 1. このことを確かめよ。 [解答へ](#)

乗法の逆元の確認 (蛇足?) **問 2.** 高校生のとき

$$\frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 - x \cdot yi + yi \cdot x - y^2 i^2} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

のような計算をしたことがあるだろう。これを $x + yi$ の逆元が $\frac{x - yi}{x^2 + y^2}$ であることの証明として採用できるだろうか? [解答へ](#)

C 問の解答

解答 1. (3) は

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書き換えられる。 $z \neq 0$ であれば $x^2 + y^2 > 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$w = u + iv = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-iy}{x^2 + y^2}. \blacksquare$$

1 行でまとめると

$$(x, y \in \mathbb{R}) \wedge x + iy \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

問題へ戻る

解答 2. このままでは採用できない。 $x + yi$ の逆元の存在と一意性が証明できていない段階では、 $\frac{1}{x + yi}$ はナンセンスな式であり、上の計算で分かるのは、「複素数 a, b, c ($b, c \neq 0$) について $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ 」が成り立ち、またもし $x + yi$ の逆元が一意的に存在するならば、それは $\frac{x - yi}{x^2 + y^2}$ である、ということくらい。実際に逆元であることを確認する、例えば

$$\begin{aligned} (x + yi) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2}i \right) &= \left(x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + \left(x \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right) i \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + 0 \cdot i = 1 \end{aligned}$$

のような計算をすることが必要である。■

問題へ戻る

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2026/complex2026.pdf> (2014~).
- [2] 神保 道夫^{じんぼう}：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003), 丸善 eBook では
<https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000006063> でアクセスできる.

- [3] エリ・マオール：素晴らしい三角法の世界 — 古代エジプトから現代まで —, 青土社 (1999/9/10), 好田順治 訳. 縦書きで正直読みにくい.