**多変数の微分積分学１ 練習問題 No.2**　(2013 年 4 月 22 日出題、　月　日提出)

__ 年 16 組 ____ 番　氏名 ____________

**問 2**　次の各関数が $\mathbf{R}^2$ で連続であることを示せ (理由を述べよ)。

(1) $f(x,y) = x^2 + \sqrt{2}xy + (\log 3)y^2 + \frac{\pi}{4}x + e^5 y + 6$　(2) $g(x,y) = \exp(3x+2y+1)$

(3) $h(x,y) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+y^2+1}$　(4) $\varphi(x,y) = \log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)$　(5) $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix}$

**解**

(1) $1, \sqrt{2}, \log 3, \pi/4, e^5, 6 \in \mathbf{R}$ であるので $f(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]$ である。ゆえに $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。

(2) $F(x,y) := 3x + 2y + 1$, $G(z) := \exp z$ とおく。$F(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]$ であるから、$F\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}^2$ 全体で連続である。また $G\colon \mathbf{R} \ni z \mapsto G(z) \in \mathbf{R}$ は連続である。ゆえにそれらの合成である $g = G \circ F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。

(3) $Q(x,y) := x^2 + 2x + 3$, $P(x,y) := x^2 + y^2 + 1$ とおくと、$P(x,y), Q(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]$ である。ゆえに $Q\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ と $P\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。また $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対して $P(x,y) \geq 1$ であるから、$P(x,y) \neq 0$. ゆえに $h = \dfrac{Q}{P}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。

$Q(x) := x^2 + 2x + 3$ として、1 変数多項式とするのではないことに注意する。

(4) $f(x,y) := x^2 + y^2$ とおくと、$f(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]$ であるから、$f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。一方 $f(\mathbf{R}^2) = [0,\infty)$ である。$g\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ を $g(z) := \sqrt{z}$ で定めると、$g$ は連続である。ゆえに合成関数 $g \circ f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。また $h\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 1 \in \mathbf{R}$ は定数関数だから連続である。ゆえに $F = h + g \circ f\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 1 + \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbf{R}$ は連続である。そして $F(\mathbf{R}^2) = [1,\infty)$. 対数関数 $G\colon (0,\infty) \ni z \mapsto \log z \in \mathbf{R}$ は連続である。$F(\mathbf{R}^2) \subset (0,\infty)$ であるから、$G$ と $F$ は合成可能で、$\varphi = G \circ F\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \log(1 + \sqrt{x^2+y^2}) \in \mathbf{R}$ は連続である

(5) $F_1(x,y) := x^3 - 3xy^2 \in \mathbf{R}$, $F_2(x,y) := 3x^2y - y^3 \in \mathbf{R}$ とおくと、$F_1(x,y), F_2(x,y) \in \mathbf{R}[x,y]$ であるから、関数 $F_1\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ と $F_2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。ゆえに $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ は連続である。■