多変数の微分積分学1 期末試験問題集

桂田 祐史

2013 年 8 月 17 日

この文書は次のページから入手できます (もし後半が読みたければアクセスして下さい)。

http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/tahensuu1/

目 次

1　2013 年度

1.1　2013 年度 多変数の微分積分学 1・同演習 期末試験問題

2013 年 7 月 27 日 (土) 13:00〜15:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

次の **1** から **6** に解答せよ。**3A** と **3B** はいずれか一方のみを選べ (**3B** は **3A** の 1.5 倍の配点)。

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合、閉集合、有界集合の定義を述べよ。　(2) 「$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が連続、$a \in \mathbf{R}$ とするとき、$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である」という定理を用いて、$A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ が $\mathbf{R}^2$ の開集合であることを示せ。他の定理を用いる場合はそれを記すこと。　(3) (2) の A は有界であるかどうか、根拠をつけて答えよ。

2. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ について、(a) f は Ω で各変数につき偏微分可能, (b) f は Ω で連続, (c) f は Ω で全微分可能, (d) f は Ω で C^1 級, という 4 つの条件を考える。

(1) 条件 (d) が成り立つとはどういうことか定義を述べよ。 (2) 条件 (a), (b), (c), (d) 間の関係を説明せよ。

(3) 次式で定義される $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が条件 (a), (b), (c), (d) を満たすかどうか調べよ (もちろん $\Omega = \mathbf{R}^2$ とする)。

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y} & (x+y \neq 0) \\ 0 & (x+y=0). \end{cases}$$

3A. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi))$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) 写像 $\varphi\colon \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のヤコビ行列を求めよ。(2) $f = f(x,y)$ を C^2 級の関数として、$g := f \circ \varphi$, すなわち $g(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で関数 g を定める。このとき g_r, g_{rr}, $g_{\theta\theta}$ を f の偏微分係数 (f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} 等) を用いて表し、$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r + \dfrac{1}{r^2} g_{\theta\theta}$ が成り立つことを示せ。

3B. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi))$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) 写像 $\varphi\colon \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のヤコビ行列を求めよ。(2) $r \neq 0$ であれば、φ は逆関数定理の仮定を満たすことを示せ。(3) 逆関数 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$ (定義域は適当に定める) の偏微分係数 r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。(4) $f = f(x,y)$ を C^2 級の関数として、$g := f \circ \varphi$, すなわち $g(r,\theta) = f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} を g の偏微分係数 (g_r, g_θ, g_{rr}, $g_{r\theta}$, $g_{\theta\theta}$ 等) を用いて表し、$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r + \dfrac{1}{r^2} g_{\theta\theta}$ が成り立つことを示せ。

4. $f(x,y) := xy(x^2+y^2-1)$ について、以下の問に答えよ。

(1) f のヤコビ行列 $f'(x,y)$ と Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。

(2) f の極値を求めよ。

(3) f のグラフ $z = f(x,y)$ の $(x,y) = (1,1)$ での接平面の方程式を求めよ。

5. $F(x,y) := (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ とおく。

(1) 点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ の十分小さな開近傍において、$F(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを陰関数定理を用いて示せ。

(2) $F(a,b) = 0$ を満たす点 (a,b) のうちで、陰関数定理の仮定の成立しない点を求めよ。ただし、陰関数としては $y = \varphi(x)$ の形のもののみを考える ($x = \psi(y)$ の形のものは考えない)。

(3) 曲線 $F(x,y) = 0$ 上で、(2) で求めた点を除いて、その点における接線の傾きが 0 となる点を求めよ。

6. Lagrange の未定乗数法を用いて、条件 $g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1=0$ のもとで、関数 $f(x,y,z) := x^2y^2z^2$ の最大値、最小値を求めよ。またその結果から、任意の正数 a, b, c について、$\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ。

略解

1.

(1) $A \subset \mathbf{R}^N$ とする。(a) A が $\mathbf{R}^N$ の開集合であるとは、$\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0, B(a;\varepsilon) \subset A$ が成り立つことをいう。(b) A が閉集合であるとは、A の補集合 $A^c = \mathbf{R}^N \setminus A$ が $\mathbf{R}^N$ の開集合であることをいう。(c) A が有界であるとは、$\exists R \in \mathbf{R}$ s.t. $A \subset \overline{B}(0;R)$ が成り立つことをいう ($A \subset \overline{B}(0;R)$ とは、$\forall x \in A$ $\|x\| \le R$ ということ)。

(2) $f_1(x,y) := x^2+y^2-1$, $a_1 := 0$, $f_2(x,y) := 4-x^2-y^2$, $a_2 := 0$, $A_1 = \{x \in \mathbf{R}^2; f_1(x,y) > a_1\}$, $A_2 = \{x \in \mathbf{R}^2; f_2(x,y) > a_2\}$ とおくと、$f_1(x,y)$ と $f_2(x,y)$ は x, y の多項式なので, $f_1\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ と $f_2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ はともに連続で、A_1 と A_2 は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。

$$A = A_1 \cap A_2$$

であるから、A は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。ここで「A と B が $\mathbf{R}^n$ の開集合であれば、$A \cap B$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である」という定理を用いた。

(3) $1 < x^2+y^2 < 4$ ならば $\|(x,y)\| < 2$ であるから、$R := 2$ とおくと $A \subset \overline{B}(0;R)$ が成り立つ。ゆえに A は有界である。 ■

(1) で主語を書かない人がいるけれど、それは改めよう (極端な話、閉集合の定義のところで主語を省いたら変ですよね？「開集合であるとは、閉集合であること」— さすがにこうした人はいないけれど、「開集合であるとは、A^c が閉集合であること」とした人は結構いる。やはり「A が開集合であるとは、A^c が閉集合であること」と書くべきだ。)。

それと ε が正数であることを書かない人が複数いたが、それは非常にまずい。

それから、有界のところで、$R \in \mathbf{R}$ でなく、$R \in \mathbf{R}^n$ とした人がいたけれど、球の半径は実数で、ベクトルではないですよ。

$\exists R \in \mathbf{R}, \forall x \in A$ とすべきを $\forall x \in A, \exists R \in \mathbf{R}$ と間違えた人がとても多かった。だれか変な答えを教えているのかなあ…

(2) で $\cap$ を $\cup$ と書いたり、「開集合の和は」なんて書いたりする人がいた。まずいです。「可算個の」なんて書いた人もいた。何か (実は深刻な) 勘違いをしているような気がする。

(3) は (1) に書いた条件のチェックをしてもらいたい。$\exists R$ とあるのだから、R をこう取れば良い、という話の流れになる (高校数学で、命題が成り立たないことを証明するには、1 つで良いから反例を示せば良い、というのに似たところがある)。$R = 2$ で良いのだけど、5 とか 4 とか 3 とか $2\sqrt{2}$ とか色々あった。こういうのは証明を書かせるべきなのかな…

2. (1) f が Ω で C^1 級であるとは、f が任意の変数 x_j に対して Ω で偏微分可能であり、その偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ が Ω で連続であることをいう。(2) (d) ならば (c), (c) ならば (b), (c) ならば (a). もちろん、それから導かれる (d) ならば (b), (d) ならば (a) も成り立つ。それ以外は一般には成立しない。(3) $A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x+y=0\}$ とおく。$f(x,y)$ は有理式 (多項式 ÷ 多項式) であるから、分母が 0 になるところを除いて、つまり $\mathbf{R}^2 \setminus A$ で C^∞ 級である。$x+y=0$

となるところを調べるわけであるが、まずは原点から考えてみよう。k を -1 でない実数として、$y=kx$ に沿って $(x,y)\to(0,0)$ とするときの極限は

$$\lim_{\substack{y=kx\\(x,y)\to(0,0)}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x\cdot kx+(kx)^2}{x+kx}=\lim_{x\to0}\frac{x(1+k+k^2)}{(1+k)}=0.$$

これから極限の候補は 0 であるが、$x=r\cos\theta$, $r=\sin\theta$ として、

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{(r\cos\theta)^2+r\cos\theta\cdot r\sin\theta+(r\sin\theta)^2}{r\cos\theta+r\sin\theta}\right|=\frac{r(1+\cos\theta\sin\theta)}{\cos\theta+\sin\theta}=r\frac{1+\cos\theta\sin\theta}{\sin(\theta+\pi/4)}.$$

θ を $-\pi/4$ に近づけると、分母はいくらでも 0 に近づけることができ、一方で分子は $1-\frac{1}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}$ に近づく。ゆえに分数の値の絶対値はいくらでも大きく出来る。ゆえに $(x,y)\to(0,0)$ のとき極限は存在しない。ゆえに f は $(0,0)$ で連続ではない。従って、全微分可能でも C^1 級でもない。偏微分可能性を調べる。

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2+h\cdot0+0^2}{h+0}-0}{h}=\lim_{h\to0}1=1,$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0^2+0\cdot h+h^2}{0+h}-0}{h}=\lim_{h\to0}1=1.$$

ゆえに f は $(0,0)$ で x, y の両方について偏微分可能である。($f_x(0,0)=f_y(0,0)=1$ である)。

追加: 直線 $x+y=0$ 上の、原点 $(0,0)$ 以外の点　まず $(t,-t)$ において偏微分可能であるかどうか考える。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(t+h,-t)-f(t,-t)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{(t+h)^2+(t+h)(-t)+(-t)^2}{(t+h)+(-t)}-0\right)\\&=\lim_{h\to0}\frac{t^2+th+h^2}{h^2}=\begin{cases}\text{極限なし} & (t\neq0\text{ のとき})\\ 1 & (t=0\text{ のとき}).\end{cases}\end{aligned}$$

($t\neq0$ のとき、分母 $\to0$, 分子 $\to t^2\neq0$ に注意する。) ゆえに f は直線 $x+y=0$ 上の原点以外の点では、x について偏微分可能ではない。同様に y についても偏微分可能ではない (x と y について対称なのですぐ分かる)。次に $(t,-t)$ において連続であるかどうか考える。

$$f(t+h,-t+k)-f(t,-t)=\begin{cases}\frac{(t+h)^2+(t+h)(-t+k)+(-t+k)^2}{(t+h)+(-t+k)}=\frac{t^2+(h-k)t+kh+k^2+h^2}{h+k} & (h+k\neq0)\\ 0-0=0 & (h+k=0)\end{cases}$$

$h+k\neq0$ の場合、$(h,k)\to(0,0)$ のとき、分母 $\to0$, 分子 $\to t^2$ であるから、$t\neq0$ であれば収束しないことが分る。ゆえに直線 $x+y=0$ 上、原点でない点においても連続ではない。

まとめると、$x+y=0$ 上のすべての点で f は不連続、$x+y=0$ 上の原点以外の点では x と y の双方について偏微分可能でないが、原点においては x と y の双方について偏微分可能である。■

(1) で、「f が微分可能で、f' が連続」と書いた人がちらほらいたが、行列値関数 $f'\colon\Omega\to M(m,n;\mathbf{R})$ が連続とはどういうことだろうか。それを定義できなくもないが、2 年生相手にそういうことをするのは大変なので、微積分の 99% のテキストはそうしていない。1 階偏導関数がすべて存在して、それらが Ω で連続、とするのが相場である。

例年 (2) で、偏微分係数を計算して、無事極限が求まってから、あろうことか、「ゆえに偏微分可能 <u>ではない</u>」と書く人が2,3 人いるんですけど。(気を取り直して) 微分係数があるとき偏微分可能で、微分係数がないとき偏微分可能でない、です。(とても悲しい…)

3A. 授業で重要性を強調した Laplacian の極座標表示。過去の出題率 30% になるんじゃないか、という問題。

(1) $\varphi'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$

(2) chain rule から

$$g_r = f_x x_r + f_y y_r = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta.$$

$x_{rr} = y_{rr} = 0$ であるので、

$$\begin{aligned} g_{rr} &= (f_{xx}x_r + f_{xy}y_r)x_r + f_x x_{rr} + (f_{yx}x_r + f_{yy}y_r)y_r + f_y y_{rr} \\ &= f_{xx}(x_r)^2 + 2f_{xy}x_r y_r + f_{yy}(y_r)^2 + f_x x_{rr} + f_y y_{rr} \\ &= f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta. \end{aligned}$$

同様に

$$g_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta.$$

$x_{\theta\theta} = -r\cos\theta$, $y_{\theta\theta} = -r\sin\theta$ であるから

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= (f_{xx}x_\theta + f_{xy}y_\theta)\,x_\theta + f_x x_{\theta\theta} + (f_{yx}x_\theta + f_{yy}y_\theta)\,y_\theta + f_y y_{\theta\theta} \\ &= f_{xx}(x_\theta)^2 + 2f_{xy}x_\theta y_\theta + f_{yy}(y_\theta)^2 + f_x x_{\theta\theta} + f_y y_{\theta\theta} \\ &= f_{xx}r^2\sin^2\theta + 2f_{xy}(-r^2\cos\theta\sin\theta) + f_{yy}r^2\cos^2\theta + f_x(-r\cos\theta) + f_y(-r\sin\theta) \\ &= r^2\left(f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\cos^2\theta\right) - r(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta} &= f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta + \frac{1}{r}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \\ &\quad + \left(f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\cos^2\theta\right) - \frac{1}{r}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \\ &= f_{xx} + f_{yy}.\blacksquare \end{aligned}$$

問題の $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$ が間違っているのでは？という質問が 2 回あった。この問題は重要なので間違えたりはしません。多分 $g_{\theta\theta}$ の $f_x x_{\theta\theta} + f_y y_{\theta\theta}$ という項を落としたのだと思う。

(1) 今年はヤコビ行列を書けない人が続出してびっくり。ここでは 2 次正方行列になるけれど、横ベクトルにしたり、転置した行列にしたり…(2) は $g_{\theta\theta}$ を間違えた人が多い。

3B. (1) は上と同じ。(2) $\det\varphi'(r,\theta) = r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r$ であるから、$r \neq 0$ であれば $\det\varphi'(r,\theta) \neq 0$. ゆえに逆関数定理の仮定が成り立ち、考えている点 (r,θ) の近傍で、C^1 級の逆関数が存在する。(3) 逆関数の微分法より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} &= \left(\varphi^{-1}\right)'(x,y) = \left(\varphi'(r,\theta)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4)

$$f_x = g_r r_x + g_\theta \theta_x = g_r \cos\theta - \frac{g_\theta \sin\theta}{r},$$
$$f_y = g_r r_y + g_\theta \theta_y = g_r \sin\theta + \frac{g_\theta \cos\theta}{r}.$$

これから

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}
f_{xx} + f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y \\
&= \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(g_r\cos\theta - \frac{g_\theta \sin\theta}{r}\right) \\
&\quad + \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(g_r\sin\theta + \frac{g_\theta \cos\theta}{r}\right) \\
&= \cdots \text{中略} \cdots \\
&= g_{rr}\cos^2\theta - \frac{2g_{r\theta}\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta}\sin^2\theta}{r^2} + \frac{g_r \sin^2\theta}{r} + \frac{2g_\theta \sin\theta\cos\theta}{r^2} \\
&+ g_{rr}\sin^2\theta + \frac{2g_{r\theta}\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta}\cos^2\theta}{r^2} + \frac{g_r\cos^2\theta}{r} - \frac{2g_\theta\sin\theta\cos\theta}{r^2} \\
&= g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta}. \blacksquare
\end{aligned}$$

3B を解くと言って、途中から 3A に切り替える人がいる。3A, 3B どちらか点が高くなるように採点してやったけれども、そういうのはルール違反だよね。本当は。それから 3B ほとんど出来ていたけれど、途中で係数の 2 が落ちていて、単なるケアレス・ミスだとは思うけれど、途中経過がなくて、どこでどう間違ったのか分からない、というような人も。こういうのも中間点出しづらい。

4.

(1) $f(x,y) = xy(x^2+y^2-1)$ であるから、

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(3x^2+y^2-1) & x(3y^2+x^2-1) \end{pmatrix},$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy & 3(x^2+y^2)-1 \\ 3(x^2+y^2)-1 & 6xy \end{pmatrix}.$$

(2) $f'(x,y) = 0$ を解くと、

$$(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1), (0,0).$$

各点での Hesse 行列を計算し、その符号を調べる。

$$H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=H\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}3/2 & 1/2\\ 1/2 & 3/2\end{pmatrix}\quad(\text{正値}),$$
$$H\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=H\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-3/2 & 1/2\\ 1/2 & -3/2\end{pmatrix}\quad(\text{負値}),$$
$$H(1,0)=H(-1,0)=H(0,1)=H(0,-1)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\quad(\text{不定符号}),$$
$$H(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\quad(\text{不定符号}).$$

ゆえに

- $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ で狭義の極小で、極小値は $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}$.
- $(x,y)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ で狭義の極大で、極大値は $f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$.

(不定符号である点では極値とならない。)

(3)

$$f(1,1)=1\cdot1\left(1^2+1^2-1\right)=1,\quad f'(1,1)=(1\cdot(3+1-1)\ 1\cdot(3+1-1))=(3\ 3).$$

ゆえに $(1,1)$ における接平面の方程式は $z=1+(3\ 3)\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}$. 整理して $z=3x+3y-5$.

■

連立方程式解けない人が多かった。計算ミスというよりも、論理が変という人がいて、猛反省してもらいたい。授業では、複雑ではあるけれど、論理の分配律でばらせば機械的に計算できる、と解説した。

$$\begin{cases}y(3x^2+y^2-1)=0\\ x(3y^2+x^2-1)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\left(y=0\vee 3x^2+y^2-1=0\right)\wedge(x=0\vee 3y^2+x^2-1=0).$$

これを $(P\vee Q)\wedge(R\vee S)$ と見て、$(P\wedge R)\vee(P\wedge S)\vee(Q\wedge R)\vee(Q\wedge S)$ と展開する。具体的には、

$$\begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=0\\ 3y^2+x^2-1=0\end{cases}\vee\begin{cases}3x^2+y^2-1=0\\ x=0\end{cases}\vee\begin{cases}3x^2+y^2-1=0\\ 3y^2+x^2-1=0.\end{cases}$$

後は省略する。

計算は計算用紙にやったということか、途中経過を大幅に省略した人がいた。そういう人は結果が正しくても満点あげ辛いし (間違えた議論で同じ結果に到達することもあるから、議論不十分で減点)、間違っていると中間点もあげづらい (もったいない)。具体的には、Hesse 行列を書いて、それが正値、負値、不定符号のどれであるか簡単な根拠つきで書こう。連立方程式を解き損ねても、そういうところをきちんと出来ることを示せば点をつけても構わない。

$\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$ は不定符号と気軽に書くのだけど、$a\neq0$ という条件を忘れてます。$a=0$ のときは零行列で、これは正値でも負値でも不定符号でもありません。

5. $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$.

(1) $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$, $F_y(x,y) = 4y(x^2+y^2+1)$, $F_y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 4 \neq 0$ であるから、陰関数定理によって、$F(x,y)=0$ は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の十分小さな近傍で、$y=\varphi(x)$ の形に解ける。

(2) $F(a,b)=0$, $F_y(a,b)=0$ を連立方程式として解くと、$(a,b)=(0,0), (-\sqrt{2},0), (\sqrt{2},0)$.

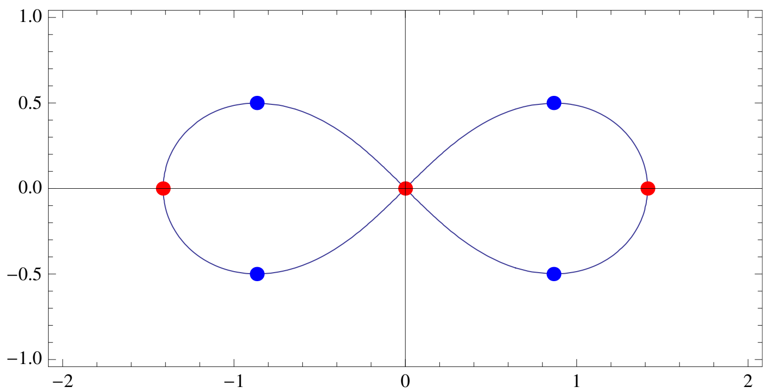
(3) (2) で見つけた点を除けば、($y \neq 0$ であるから)

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))} = -\frac{x(x^2+y^2-1)}{y(x^2+y^2+1)} \qquad (\text{ただし } y=\varphi(x)).$$

これが 0 になるには、$x(x^2+y^2-1)=0$. $x=0$ とすると $y=0$ で、除外すべき点となるので、$x \neq 0$. ゆえに $x^2+y^2-1=0$. $F(x,y)=0$ と $x^2+y^2=1$ を連立して解くと、

$$(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right). \blacksquare$$

$F(x,y)=0$ は授業で紹介したレムニスケートである。



この図を見て、陰関数定理の仮定の成り立たない 3 つの点、微分係数が 0 になる 4 つの点が見えるだろうか。

```
F[x_, y_, z_] := (x^2 + y^2)^2 - 2 (x^2 - y^2)
g = ContourPlot[F[x, y, z] == 0, {x, -2, 2}, {y, -1, 1}, Axes -> True,
    AspectRatio -> Automatic];
g2 = Graphics[{Red, PointSize[0.02], Point[{-Sqrt[2], 0}],
    Point[{0, 0}], Point[{Sqrt[2], 0}]}];
g3 = Graphics[{Blue, PointSize[0.02],
    Point[{Sqrt[3]/2, 1/2}], Point[{Sqrt[3]/2, -1/2}],
    Point[{-Sqrt[3]/2, 1/2}], Point[{-Sqrt[3]/2, -1/2}]
    }];
g=Show[g, g2, g3]
Export["lemniscate.eps", g]
```

6. 対称性を使って、$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ として議論しても良い。また、変数のうち一つでも 0 であると、$f(x,y,z)=0$ で、これが最小値であることはすぐ分るので，$x>0, y>0, z>0$ で最大値を探すことに話が絞れる。ではあるけれど、以下はストレートに解く。

$g(x,y,z)$ は x, y, z に関する多項式であるから、$g\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ は連続である。ゆえに $N_g := \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3; g(x,y,z)=0\}$ は $\mathbf{R}^3$ の閉集合である。また明らかに $N_g\subset\overline{B}(0;1)$ であるから (N_g は単位円だから)、N_g は有界である。f は $\mathbf{R}^3$ で連続であるから、当然 N_g でも連続である。「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合定義された実数値連続関数は最大値と最小値を取る」という定理から、f は N_g 上で最大値、最小値を取る。

$$\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2xy^2z^2\\2x^2yz^2\\2x^2y^2z\end{pmatrix},\quad \nabla g(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}.$$

N_g 上に $\nabla g(x,y,z)=0$ を満たす点はない ($\nabla g(x,y,z)=0$ とすると、$(x,y,z)=(0,0,0)$ であり、$(0,0,0)\notin N_g$)。ゆえに f の N_g 上での最大値、最小値を与える点は、Lagrange の未定乗数法で見つかる。

$(x,y,z)\in N_g$ で f が最大または最小になったとすると、

$$\exists\lambda\in\mathbf{R}\quad \text{s.t.}\quad \nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z).$$

$\lambda\neq 0$ であれば、$x^2=y^2=z^2$ であることはすぐ分かり、$x^2=y^2=z^2=\dfrac{1}{3}$. ゆえに

$$(x,y,z,\lambda)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{9}\right)\quad (\text{複号は任意で } 2\times2\times2=8 \text{ 個の点を表す}).$$

いずれの場合も $f(x,y,z)=\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]^3=\dfrac{1}{27}$.

$\lambda=0$ であれば、$x=0$ or $y=0$ or $z=0$ で、球面上の 3 本の大円を表す。いずれも $f(x,y,z)=0$.

以上から、f の最大値は $\dfrac{1}{27}$, 最小値は 0 (最小値の方は気づいてしまえば、いつでも $f\geq 0$ で、$f=0\Leftrightarrow x=0$ or $y=0$ or $z=0$ が成り立つことからも分る)。

ゆえに

$$x^2+y^2+z^2=1\quad\Rightarrow\quad x^2y^2z^2\leq\frac{1}{27}.$$

これから

$$(X,Y,Z)\neq 0\quad\Rightarrow\quad \frac{X^2Y^2Z^2}{(X^2+Y^2+Z^2)^3}\leq\frac{1}{27}.$$

($x:=X/\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, $y:=Y/\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, $z:=Z/\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ とおくと、上の主張に帰着できる。— 分母分子がともに 6 次同次式で、分数自体は 0 次同次なので、単位球面上での値ですべて決まってしまう、ということである) 分母を払って

$$\frac{X^2+Y^2+Z^2}{3}\geq\left(X^2Y^2Z^2\right)^{1/3}.$$

これは $(X,Y,Z)=0$ でも成立する。

ゆえに $x:=X^2$, $y:=Y^2$, $z:=Z^2$ とおくことで

$$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\quad\Rightarrow\quad\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}.\blacksquare$$

Lagrange の未定乗数法は、最後に時間が乏しい中で勉強するのは強行軍で大変だけれど、非常に有名 (経済学科の学生の試験でも定番なくらい)、きちんと議論するのはきちんとした理解が必要で理解度を測るのに好適、色々面白い結果が出せる、というわけで、頑張りどころである (その理論的背景に陰関数定理が必要というところもイイ)。話の筋が長く、講義を通して学んだ多くのことが使われる。「○○なんてやって一体どういうことの役に立つのか？」という素朴な疑問に対して、一つの答えになってくれると思う。

1.2 2013 年度 多変数の微分積分学 1・同演習 追試験問題

2013 年 8 月 2 日 (金) 10:00〜12:00 施行, 担当 桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

次の **1** から **6** に解答せよ。

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合、閉集合、有界集合の定義を述べよ。
(2) $A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$, $B := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$, $C := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 - y^2 < 1\}$ とおく。

(a) A, B, C のうち $\mathbf{R}^2$ の閉集合であるものについて，それが閉集合であることを証明せよ。ただし開集合系の公理 (位相の公理) と「$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が連続とするとき、$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > 0\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である」という定理は証明なしで使って良い。

(b) A, B, C のうち $\mathbf{R}^2$ の有界集合でないものについて，それが有界でないことを証明せよ。

2. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ について、(a) f は Ω で全微分可能, (b) f は Ω で C^1 級, (c) f は Ω で連続, (d) f は Ω で各変数につき偏微分可能, という 4 つの条件を考える。

(1) 条件 (a), (b), (c), (d) の定義を述べよ。

(2) 条件 (a), (b), (c), (d) 間の関係を述べよ (「○○ならば□□」のような正しい命題をすべて列挙せよ)。

(3) 次式で定義される $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が条件 (a), (b), (c), (d) を満たすかどうか調べよ (もちろん $\Omega = \mathbf{R}^2$ とする)。

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$$

3. C^2 級の関数 $u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ と正定数 c があるとき、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad v(\xi,\eta) = u(x,t), \quad \text{すなわち} \quad v(\xi,\eta) := u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right)$$

とおく。
(1) u_x, u_{xx}, u_t, u_{tt} を v の偏導関数で表せ。 (2) v_η, $v_{\eta\xi}$ を u の偏導関数で表し，$\dfrac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = -4v_{\eta\xi}$ を示せ。

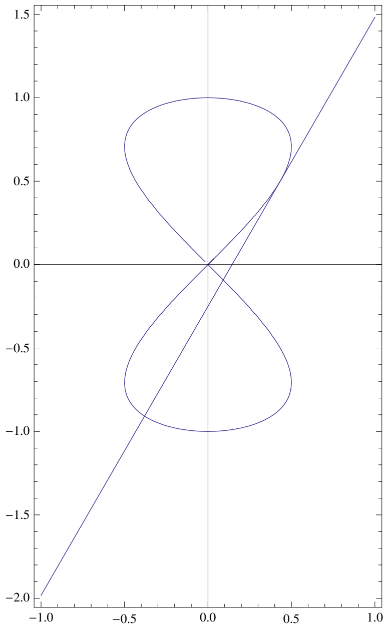
4. $f(x,y) := 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ について、以下の問に答えよ。

(1) f のヤコビ行列 $f'(x,y)$ と Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。

(2) f の極値を求めよ。

(3) f のグラフ $z = f(x,y)$ の $(x,y) = (-1,2)$ での接平面の方程式を求めよ。

5. $F(x,y) := y^2 - y^4 - x^2$, $N_F := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; F(x,y) = 0\}$ とおく。N_F 上の点 $P(\sqrt{3}/4, 1/2)$ の十分小さな近傍で、$F(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、P における接線の方程式を求めよ。また、N_F 上の点で、陰関数定理の仮定が満たされていれていないもの (全部で 5 個ある) をすべて求めよ。



6. 正数 a, b に対して、方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で定められる平面内の楕円を E とする。点 (x,y) が E 上を動くときの関数 $f(x,y) := x + y$ の最大値，最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ。

略解

1. (2) B が閉集合である。

$$
\begin{aligned}
B^c &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \neq 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 > 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 - 1 > 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 1 - x^2 - y^2 > 0\right\}.
\end{aligned}
$$

(3) C が有界でない。$R \in \mathbf{R}$ に対して，$(x,y) = (R,R)$ とおくと，$x^2 - y^2 = R^2 - R^2 = 0 < 1$ であるから，$(x,y) \in C$ であり，$\|(x,y)\| = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}|R| > R.$

2. (3) この f は (a), (b), (c), (d) を満たす。まず定義にもとづき計算して、f は x と y について $(0,0)$ で偏微分可能で

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0$$

であることが分る。一方 $(x,y) \neq (0,0)$ では商の微分法で

$$f_x(x,y) = \frac{y^3(y^2 - x^2))}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{xy^2(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

であることが分り、$(x,y) \to (0,0)$ のとき

$$|f_x(x,y) - f_x(0,0)| \to 0, \quad |f_y(x,y) - f_y(0,0)| \to 0$$

であることが証明できる。

4. (2) $(-5/3,0)$, $(-1,-2)$, $(-1,2)$, $(0,0)$ で，順に負値, 不定符号, 不定符号, 正値なので，極大値 $f(-5/3,0)=\dfrac{125}{27}$, 極小値 $f(0,0)=0$. (3) $f'(-1,2)=(0\ 0)$, $f(-1,2)=3$ であるから，$z=3$.

```
f[x_, y_] := 2 x^3 + x y^2 + 5 x^2 + y^2

sol = Solve[D[f[x, y], {{x, y}}] == {0, 0}, {x, y}]

f[x, y] /. sol

D[f[x, y], {{x, y}, 2}]

D[f[x, y], {{x, y}, 2}] /. sol

Table[Eigenvalues[D[f[x, y], {{x, y}, 2}] /. sol[[i]]], {i, Length[sol]}]
```

5. $(a,b):=(\sqrt{3}/4,1/2)$ とおく。$F(a,b)=0$, $F_y(a,b)=1/2\neq 0$ であるから陰関数定理によって，(a,b) の近傍で $y=\varphi(x)$ ととける。

$$\varphi'(x)=-\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))},\quad \varphi'(a)=-\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}=\sqrt{3}.$$

ゆえに接線は $y-1/2=\sqrt{3}(x-\sqrt{3}/4)$ である。整理して $y=\sqrt{3}x-1/4$.

$F(x,y)=0$ と $F_y(x,y)=0$ を連立して解くと，$(x,y)=(0,0),(1/2,1/2),(1/2,-1/2),(-1/2,1/2),(-1/2$

6. E は閉かつ有界 ($\|(x,y)\|\le\max\{a,b\}$), f は E 上連続であるから最大値と最小値を持つ。E 上 $\nabla g\neq 0$ であるから，極値点 (x,y) (最大点，最小点を含む) は Lagrange の未定乗数法で求まる。つまり $\exists\lambda\in\mathbf{R}$ s.t. $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$. $g(x,y)=0$ と連立して解いて

$$(x,y)=\pm\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

$$f\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\sqrt{a^2+b^2},\quad f\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=-\sqrt{a^2+b^2}.$$

それぞれ最大値，最小値である。■

2　2012年度

2.1　2012年度 多変数の微分積分学1, 多変数の微分積分学1演習 試験問題

(2012年7月30日施行)

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合、閉集合、有界集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^2$ の有界でない開集合の例をあげ、それが有界でないこと、開集合であることを示せ。

2.　$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ について、(a) f は連続, (b) f は各変数につき偏微分可能, (c) f は C^1 級, (d) f は全微分可能, という 4 つの条件を考える。

(1) 条件 (d) が成り立つとはどういうことか定義を述べよ。

(2) 条件 (a), (b), (c), (d) 間の関係について説明せよ。

(3) 次式で定義される $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ について以下の (i), (ii) に答えよ。(i) $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^∞ 級であることを示せ。(ii) $\mathbf{R}^2$ で条件 (a), (b), (c), (d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2+xy+x^2y+y^2+y^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \\ 1 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$$

3.　C^∞ 級の $f\colon \mathbf{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) \in \mathbf{R}$ と、$\vec{a} = (a,b,c)$, $\vec{h} = (p,q,r) \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$F(t) := f(\vec{a} + t\vec{h}) = f(a+tp, b+tq, c+tr) \quad (t \in \mathbf{R})$$

とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) $F'(t)$, $F''(t)$ を計算せよ (f を使って表せ)。

(2) 自然数 m に対して $F^{(m)}(t)$ を f を用いて表す式を推定し、帰納法を用いて証明せよ。

4.　$f(x,y) := 2x^3 + 6xy^2 - 2x$ について、以下の問に答えよ。

(1) f のヤコビ行列 $f'(x,y)$ と Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。

(2) f の極値を求めよ。

(3) f のグラフ $z = f(x,y)$ の $(x,y) = (1,1)$ での接平面の方程式を求めよ。

5.　どちらか一方を選んで解答せよ。(1) $f(r,\phi,\lambda) = \begin{pmatrix} r\cos\phi\cos\lambda \\ r\cos\phi\sin\lambda \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$ に対して、$\det f'(r,\phi,\lambda)$ を求めよ。(2) $f(x) := \|x\|^{2-n}$ $(x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ とおくとき、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$ を示せ。

6.　$f, g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y) := x^2+y^2$, $g(x,y) := x^2+2xy+3y^2-4$ で定め、$N_g := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; g(x,y) = 0\}$ とおく。
(1) N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であることを示せ。(2) 条件 $g(x,y) = 0$ のもとでの $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ。

問題の解説

2.　(2) (c) ならば (d), (d) ならば (a), (d) ならば (b) という 3 つを定理として学んだ。その系として、(c) ならば (a), (c) ならば (b) も成り立つ。この 5 つ以外は成り立たない（反例がある）。(3) (i) 分母と分子それぞれは多項式なので $\mathbf{R}^2$ で C^∞ 級である。ゆえに分母が 0 になるところ (原点) をのぞき、f は C^∞ 級である。(ii) 実は (a) は成り立たない。つまり原点では f は連続でない ($|f(x,y) - f(0,0)|$ の極限が 0 でないことを確かめる)。これが分かると、(c), (d) が成り立たないことがすぐ分かる。(b) については、実際に $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を計算してみる。極限が確かに存在して $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 1$ となる。ゆえに (b) は成立する。 ■

3.　これは宿題の類題である。$(p+q+r)^m$ の展開と似た式が現れる。$m=2,3$ の時は簡単であろう。一般の m についての公式は、$(p+q+r)^m = \displaystyle\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\ge 0\\ \alpha+\beta+\gamma=m}} \frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!}p^\alpha q^\beta r^\gamma$ と似た式となるわけである。■

4.　$f'(x,y)=0$ となる点は $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ の 4 つ。f は $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ で極大で、極大値 $\frac{4}{3\sqrt{3}}$. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ で極小で、極小値 $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$. 他の 2 点では f は極値を取らない。■

5.　どちらも宿題の類題。(1) $\det f'(r,\phi,\lambda) = -r^2\cos\phi$. (2) $f=r^{2-n}$, $r_{x_1}=x_1/r$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = (2-n)r^{1-n}\cdot r_{x_1} = (2-n)x_1 r^{-n}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = (2-n)\left[r^{-n}+x_1\cdot(-n)r^{-n-1}\cdot x_1/r\right] = (2-n)\left[r^{-n}-nx_1^2 r^{-n-2}\right]$, $\triangle f = (2-n)\left[nr^{-n}-nr^2\cdot r^{-n-2}\right] = 0$. ■

6.

(1) 閉集合であること: $g(x,y)$ は x と y の多項式なので、g は関数として $\mathbf{R}^2$ 全体で連続である。ゆえに $N_g=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)=0\}$ は $\mathbf{R}^2$ の閉集合である。

有界集合であること: 一般に $\frac{1}{2}(x^2+y^2)\le x^2+2xy+3y^2$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$ であるから (証明したければ、右辺から左辺を引いて平方完成をすれば良い)、$(x,y)\in N_g$ のとき、$x^2+y^2\le 2(x^2+2xy+3y^2)=2\cdot 4=8$. すなわち $\|(x,y)\|\le 2\sqrt{2}$. ゆえに $N_g\subset \overline{B}((0,0);2\sqrt{2})$. これは N_g が有界であることを示している。

(2) 「条件 $g(x,y)=0$ のもとでの $f(x,y)$ の最大値」とは、f の N_g における最大値ということである。最小値についても同様。

(g と同様に) f も $\mathbf{R}^2$ で連続なので、特に f は N_g 上でも連続である。ゆえに f は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合である N_g で最大値、最小値を持つ。それらは当然 f の N_g 上での極大値、極小値である。N_g 上で $\nabla g\ne 0$ であることが確かめられるので、極大となる点、極小となる点は、Lagrange の未定乗数法で得られる。x, y, λ についての連立方程式

$$\nabla f(x,y)=\lambda g(x,y),\quad g(x,y)=0$$

を解くと、

$$(x,y)=\left(1+\sqrt{2},-1\right),\left(-1-\sqrt{2},1\right),\left(-1+\sqrt{2},1\right),\left(1-\sqrt{2},-1\right).$$

この 4 点の中に f の最大値、最小値を与える点が必ずある。

$f\left(1+\sqrt{2},-1\right)=f\left(-1-\sqrt{2},1\right)=4+2\sqrt{2}$, $f\left(-1+\sqrt{2},1\right)=f\left(1-\sqrt{2},-1\right)=4-2\sqrt{2}$

であることから、$\left(1+\sqrt{2},-1\right)$ と $\left(-1-\sqrt{2},1\right)$ で f は最大値 $4+2\sqrt{2}$ を取り、$\left(-1+\sqrt{2},1\right)$ と $\left(1-\sqrt{2},-1\right)$ で f は最小値 $4-2\sqrt{2}$ を取る。■

3　2011 年度

3.1　2011 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 試験問題

(2011 年 7 月 26 日施行)

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義と閉集合の定義を述べよ。(2) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2<1,\ |x|+|y|\le 2\}$ とおくとき、以下の問 (a), (b), (c) に答えよ。

(a) A を図示せよ。(b) A が $\mathbf{R}^2$ の開集合であるかどうか、$\mathbf{R}^2$ の閉集合であるかどうか述べよ。(c) (b) で「…である」と述べたことを証明せよ。証明に使う定理があれば、それを書け。

2. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ について、(a) f は各変数につき偏微分可能, (b) f は連続, (c) f は全微分可能, (d) f は C^1 級, という 4 つの条件を考える。

(1) (d) が成り立つとはどういうことか、定義を書け。

(2) 条件 (a), (b), (c), (d) 間の関係について説明せよ (ある条件から別の条件が一般に導かれるならば、それをすべて指摘せよ)。

(3) 次式で定義される $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ が、条件 (a), (b), (c), (d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\})\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}.$$

(4) (3) の f について、$f_{xy}(0,0)$ と $f_{yx}(0,0)$ を調べよ (存在するならばその値を求めよ)。

3. C^2 級の関数 $u\colon\mathbf{R}^2\ni(x,t)\mapsto u(x,t)\in\mathbf{R}$ と正定数 c に対して

$$\xi=x-ct,\quad \eta=x+ct,\quad v(\xi,\eta)=u(x,t),\quad \text{すなわち}\quad v(\xi,\eta):=u\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\eta-\xi}{2c}\right)$$

とおくとき、以下のものを v の偏導関数で表せ。(1) $\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}$ (2) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$ (3) $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$

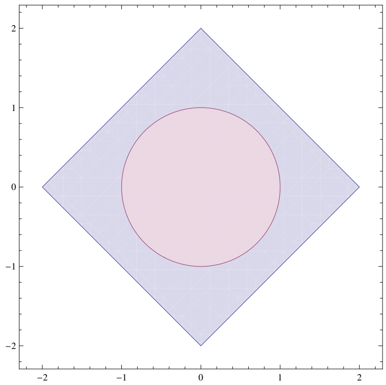
4. $f(x,y):=(x^3-x)(y^3-y)$ について、以下の問に答えよ。
(1) f の gradient $\nabla f(x,y)$ と Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(2) f の極値を求めよ。

5. $f,g\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を $f(x,y):=x^2+y^2$, $g(x,y):=5x^2+6xy+5y^2-8$ で定め、$N_g:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)=0\}$ とおく。
(1) N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であることを示せ。(2) N_g 上の点 (x_0,y_0) における、N_g の接線の方程式を求めよ。(3) $(x_0,y_0)\in N_g$ が曲線 $f(x,y)=c$ (c はある定数) の上にあり、かつ (x_0,y_0) における $f(x,y)=c$ の接線が、N_g の接線と一致する (つまり N_g と $f(x,y)=c$ が共通の接線を持つ) とき、(x_0,y_0) を求めよ。(4) N_g における f の最大値、最小値を求めよ (厳密な証明は不要)。

略解

1. (1) $A\subset\mathbf{R}^N$ とする。A が $\mathbf{R}^N$ の開集合であるとは、$\forall x\in A$, $\exists\varepsilon>0$ s.t. $B(x;\varepsilon)\subset A$ が成り立つことをいう。A が $\mathbf{R}^N$ の閉集合であるとは、$A^c(=\mathbf{R}^N\setminus A)$ が $\mathbf{R}^N$ の開集合であることをいう。(2) (a) $x^2+y^2<1$ ならば $|x|+|y|=\sqrt{(|x|+|y|)^2}\le\sqrt{2|x|^2+2|y|^2}=\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{2}<2$ であるから (一応証明を書いたが、ここは図から分かるとして構わない)、実は $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$. ゆえに原点中心半径 1 の円を描いて、その内部とすれば良い。(b) A は $\mathbf{R}^2$ の開集合であり、閉集合ではない。(c) $f(x,y)=x^2+y^2$ は多項式であるから、$f\colon\mathbf{R}^2\ni(x,y)\mapsto f(x,y)\in\mathbf{R}$ は連続である。ゆえに $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; f(x,y)<1\}$

は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。「$f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ が連続で、$b\in\mathbf{R}$ とするとき、$\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)<b\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である」、「$f(x_1,\dots,x_n)$ が $x_1,\dots,x_n$ の多項式ならば、$f\colon \mathbf{R}^n\ni(x_1,\dots,x_n)\mapsto f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}$ は連続である」という定理を用いた。 ■



A は二つの共通部分で、結局は開円盤 $\{(x,y); x^2+y^2<1\}$ です。

```
RegionPlot[{Abs[x]+Abs[y]<=2,x^2+y^2<1},{x,-2.2,2.2},{y,-2.2,2.2}]
```

- (1) の開集合の主語なしは半分の得点とする。「A が開集合であるとは」のように、何が開集合であるか (この場合は A) はっきり書くこと。
- (2-a) 点線と斜線を描いて欲しい。本当は「斜線部の領域、境界は含まない」のような言葉を添えるべきと思うが、こちらも板書でその手の言葉をサボっている手前、それは要求しなかった。
- (2-a) の図が間違っている (例えば円盤の上半分とか) のは、(2-b) 以下採点しない。
- 「開球は開集合」と堂々と言ってくれても良かったと思うけれど (それはそれで多くの人が知っている定理だ)、その証明を書いた人も多かった。もちろん、それでも結構。
- (2-b) は「閉集合でない」まで書いて欲しかったが、減点はやめた。本当は開集合であることは、閉集合でないことを意味しないので、両方について書くべきである。

2.

(1) f の Ω における 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j=1,\dots,n)$ がすべて存在し、それらが (つまり $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ が) Ω で連続であること。

(2) (d)$\Longrightarrow$(c), (c)$\Longrightarrow$ (b), (c)$\Longrightarrow$ (a) とそれから導かれる (d) $\Longrightarrow$ (a), (d) $\Longrightarrow$ (b) は成立するが、それら以外は一般には成立しない。

(3) この f は実は C^1 級で、(従って) (a), (b), (c), (d) がすべて成立する。f が $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で C^∞ 級であることは明らかなので、問題は $(0,0)$ でどうなるかだが、$f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ が存在して、f_x と f_y は $(0,0)$ で連続なことが分かるので、f は C^1 級である。手短な証明は

$$f_x(x,y)=\frac{y^3(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y(x,y)=\frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\quad ((x,y)\neq(0,0)),$$
$$f_x(0,0)=0,\quad f_y(0,0)=0$$

から

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f_x(x,y)=f_x(0,0),\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f_y(x,y)=f_y(0,0)$$

を示す (具体的には引き算して不等式評価)、という路線。例えば

$$|f_x(x,y)-f_x(0,0)|=\frac{|y|\cdot|y|^2\left|-x^2+y^2\right|}{\left(x^2+y^2\right)^2}\le\frac{|y|\left(x^2+|y|^2\right)\left(|-x^2|+|y^2|\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=|y|\to 0.$$

(4) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ については、宿題の問 5 とほとんど同じ (x と y を入れ替えただけ)。$f_{xy}(0,0)=1$, $f_{yx}(0,0)=0$. ■

- (1) で「f が微分可能で f' が連続」と書いた人がいるけれど、それは 1 変数の場合の引写しだね。多変数の場合に f' が連続ってどういうこと？もちろん定義できるんだけど、かなりやっかいだから (1 階の場合で行列値関数だし、階数が上がった C^2 級ってどう定義する？)、それを避けるように話が作られているのに (避けずにやっている本は 5% もないと思う)、自分で勝手に作ってはいけません。結局 C^1 級の定義がきちんと書けた人は少数派でした。

- $y=kx$ 作戦では極限が存在することは証明出来ない。(授業中に何度も言ったので、ここで説明は繰り返さない。)

- (3) の証明部分は間違った主張でなければ、説明不足でも正解にした場合がある。でも間違った不等式が多い。結局は証明しないで正しい不等式を書くのは無理ということか？「不等式は必ず証明しなさい」 と言う方が親切なのかも。

- 間違った不等式を「証明つきで」使う人も少なくなかった。任意の x,y に対して $\dfrac{1}{x^2+y^2}\le 1$ とも限らないし、$xy\ge 0$ とも限らない。$\dfrac{1}{x^2+y^2}\le\dfrac{1}{y^2}$ みたいなことをする人もいたが (分母を小さくすれば大きくなる、というつもりだろう)、$(x,y)\ne(0,0)$ であるからと言って $y\ne 0$ とは限らないので、やってはいけない評価だ。

3. 宿題の問 8 の解き方のうち、$\dfrac{1}{c^2}u_{tt}-u_{xx}$ を計算していって、$-4v_{\eta\xi}$ に等しくなることを示す、というのをして下さい、ということ。

$$\xi_x=1,\quad \xi_t=-c,\quad \eta_x=1,\quad \eta_t=c.$$

chain rule によって

$$\begin{aligned}
u_t&=v_\xi\xi_t+v_\eta\eta_t=-cv_\xi+cv_\eta,\\
u_{tt}&=-c(v_{\xi\xi}\xi_t+v_{\xi\eta}\eta_t)+c\left(v_{\eta\xi}\xi_t+v_{\eta\eta}\eta_t\right)=c^2v_{\xi\xi}-c^2v_{\xi\eta}-c^2v_{\eta\xi}+c^2v_{\eta\eta}\\
&=c^2\left(v_{\xi\xi}+v_{\xi\eta}+v_{\eta\xi}+v_{\eta\eta}\right),\\
u_x&=v_\xi\xi_x+v_\eta\eta_x=v_\xi+c_\eta,\\
u_{xx}&=v_{\xi\xi}+v_{\xi\eta}+v_{\eta\xi}+v_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-4\frac{\partial^2v}{\partial\xi\partial\eta}.■$$

- u の偏導関数を v で書く、v の偏導関数を u で書く、両方やっておいたのに、片方しか「覚えていない」人がいるみたい。複数のやり方を見せるのは、どちらも重要だからで、何か一つやり方を覚えておしまいというのは心掛けが悪いです。そもそもこの問題は合成関数の微分法を理解してもらうための問題であって、違う問題が出ても解けるようにならないと。逆方向はお手上げでは困る。

- $u_t=-cv_\xi+cv_\eta$ だけで止った人にも 4 点進呈。

4. (1) $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}(3x^2-1)(y^3-y)\\(3y^2-1)(x^3-x)\end{pmatrix}$, $H(x,y)=\begin{pmatrix}6x(y^3-y) & (3x^2-1)(3y^2-1)\\(3x^2-1)(3y^2-1) & 6y(x^3-x)\end{pmatrix}$

(3) $\nabla f(a,b)=0$ を満たす点 (停留点) は、$(a,b)=(0,0),\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\pm(1,1)$, $\pm(1,-1)$, $\pm(1,0)$, $\pm(0,1)$ の 13 個。$H(a,b)$ の符号を調べて、$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき $H(a,b)=\begin{pmatrix}-4/3 & 0\\0 & -4/3\end{pmatrix}$ は負値なので極大値 $\frac{4}{27}$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき $H(a,b)=\begin{pmatrix}4/3 & 0\\0 & 4/3\end{pmatrix}$ は正値なので極小値 $-\frac{4}{27}$ を取る。他の点では $\begin{pmatrix}0 & 4\\4 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -2\\-2 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ など不定符号なので極値は取らない。■

- $f(x,y)$ の式を展開してから微分した人が結構いました。「微分する」のような目的の前に、それが簡単になるような式変形をすることはあります。場合によっては因数分解してから微分するということだってあるでしょう。「まずは展開して」はちょっと拙いですね。そうやると、かなり面倒な問題になってします。

- 解が 13 個ない解答がかなり多かった。論理の計算が弱いというか、しないんでしょうね (答案ではいきなり間違った答に飛んでしまっている)。

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y)=0 &\iff \left(3x^2-1=0 \quad\text{or}\quad y^3-y=0\right) \quad\text{and}\quad \left(3y^2-1=0 \quad\text{or}\quad x^3-x=0\right)\\
&\iff (3x^2-1=0 \text{ and } 3y^2-1=0) \text{ or } (3x^2-1=0 \text{ and } x^3-x=0)\\
&\qquad \text{or } (y^3-y=0 \text{ and } 3y^2-1=0) \text{ or } (y^3-y=0 \text{ and } x^3-x=0)\\
&\iff (x,y)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad\text{or}\quad \text{解なし} \quad\text{or}\quad \text{解なし}\\
&\qquad \text{or}\quad (x,y)=(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1).
\end{aligned}$$

- $\begin{pmatrix}0 & a\\a & 0\end{pmatrix}$ は不定符号という定理を作って使った人がいた。偉い。そういうようにやるものです。たくさんの場合があるわけだけど、きれいに解決。

5.

(1) $g(x,y)$ は x と y の多項式であるから、$g\colon \mathbf{R}^2\ni(x,y)\mapsto g(x,y)\in\mathbf{R}$ は連続である。ゆえに $N_g=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)=0\}$ は $\mathbf{R}^2$ の閉集合である。さて、任意の $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ に対して、

$$5x^2+6xy+5y^2\geq 2(x^2+y^2)$$

が成り立つ。実際、

$$\text{左辺}-\text{右辺}=3x^2+6xy+3y^2=3(x+y)^2\geq 0.$$

これから $(x,y)\in N_g$ ならば、

$$8=5x^2+6xy+5y^2\geq 2(x^2+y^2) \quad\text{ゆえに}\quad x^2+y^2\leq 4.$$

ゆえに $N_g\subset\overline{B}\,((0,0);2)$. これは N_g が有界であることを示している。

(2) $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 10x+6y \\ 6x+10y \end{pmatrix}$ であるから、(x_0, y_0) における接線の方程式は

$$(10x_0+6y_0)(x-x_0)+(6x_0+10y_0)(y-y_0)=0.$$

これから

$$(10x_0+6y_0)x+(6x_0+10y_0)y=10x_0^2+12x_0y_0+10y_0^2.$$

$(x_0,y_0)\in N_g$ であるから右辺は 16 である。2 で両辺を割って

$$(5x_0+3y_0)x+(3x_0+5y_0)y=8.$$

(3) $f(x,y)=c$ の (x_0,y_0) における接線は、$x_0x+y_0y=c$. これと $(5x_0+3y_0)x+(3x_0+5y_0)y=8$ が一致するので、

$$\exists\lambda\in\mathbf{R}\quad \text{s.t.}\quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5x_0+3y_0 \\ 3x_0+5y_0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

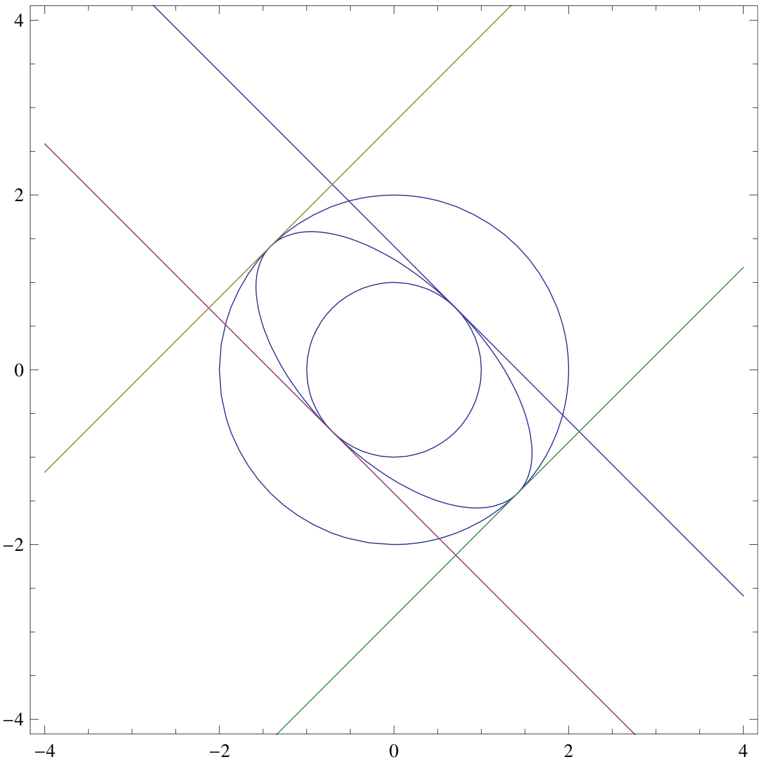
これと $f(x_0,y_0)=c$ あるいは $g(x_0,y_0)=0$ を連立して解いて、

$$(x_0,y_0,c)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right),\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},4\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},4\right).$$

ちなみに接線の方程式は

$$x_0+y_0=\pm\sqrt{2},\quad x_0-y_0=\pm2\sqrt{2}.$$

(4) f が極値を取るとき、f の等高線 $f(x,y)=c$ の接線は N_g の接線であると考えられる (横断的に交わっている場合は、c を少しずらすことで、f の値を小さくしたり大きくしたり出来るので、極値とはならない)。分かりにくいかも知れないが、図を見ると納得しやすいかも。(3) で求めた c のうち、大きい方が最大値、小さい方が最小値である。$(x,y)=\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ のとき最大値 4, $(x,y)=\pm(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ のとき最小値 1. ■



- (1) 関数 g と集合 N_g が混ざっていて、「N_g は連続」なんてのは困る。
- N_g の正体が分かると見通しが良いでしょうか。2 変数 2 次多項式が 0 だから、2 次曲線というのはすぐに分かります (線形代数で習っているかなあ…)。だから例外的な状況 (空集合、1 点、直線のようなもの) を除いて円錐曲線 (楕円、放物線、双曲線) というものになります。(1) で有界と判定されるので、楕円であるということが分かります。
- (1) $x^2+y^2 \le 5x^2+6xy+5y^2=8$ から $\|(x,y)\| \le 2\sqrt{2}$ としている人が多いような気がするけれど、最初の不等号は何故？有界性の証明で、正しい不等式だが証明さぼりは、半分の 2 点。$4x^2+4y^2 \le 5x^2+6xy+5y^2=8$ とか $5x^2+5y^2 \le 5x^2+6xy+5y^2=8$ というのもあったが、これらは成立しない不等式。
- (2) だけど、$10x+6y+6xy'+10yy'=0$ から、$y'=-\dfrac{10x+6y}{6x+10y}$ という式を出して、$y=-\dfrac{5x_0+3y_0}{3x_0+5y_0}(x-x_0)+y_0$ とした人がいた。なるほど。でも分母が 0 になったらどうするの。まあ 4 点あげよう。
- (3) で $\exists\lambda\in\mathbf{R}$ s.t. $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$ が登場しているのに注目。この問題は Lagrange の未定乗数法を知らずに解けるはず。
- (3) は通りすぎて、(4) を Lagrange の未定乗数法で解いた人にも点をあげました。

3.2 2011 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 追試験問題

(2011 年 8 月 2 日施行)

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の有界集合の定義を述べよ。(2) 次の各集合を図示し、有界であればそうであることを証明せよ。さらに閉集合であることを証明せよ。
(a) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2-y^2=1,\ x^2+y^2\le 4\}$ (b) $B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; y=\sin x\}$

2. 次の式で定義される $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ に対して、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}+x-y & ((x,y)\ne(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

(1) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ。 (2) f は C^1 級であることを示せ。 (3) $f_{xy}(0,0)$ と $f_{yx}(0,0)$ を求めよ。 (4) f は C^2 級であるかどうか答えよ。

3. C^3 級の関数 $f\colon \mathbf{R}^2\ni(x,y)\mapsto f(x,y)\in\mathbf{R}$ と (a,b), $(h,k)\in\mathbf{R}^2$ に対して

$$F(t):=f(a+th,b+tk)\quad(t\in\mathbf{R})$$

によって $F\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を定義するとき、$F'(t)$, $F''(t)$, $F'''(t)$ を f とその偏導関数を用いて表せ。

4. (1) 実対称行列に関する以下の 3 つの条件の定義を書け。(a) 正値, (b) 負値, (c) 不定符号
(2) a を 0 でない実対称行列とするとき、$A=\begin{pmatrix}0&a\\a&0\end{pmatrix}$ は不定符号であることを示せ。
(3) 正値、負値、不定符号のいずれでもない実対称行列の具体例をあげよ。

5. $f(x,y) := (x-y)e^{-x^2-y^2}$ について、以下の問に答えよ。
(1) f の gradient $\nabla f(x,y)$ と Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(2) f の極値を求めよ。
(**注** 停留点における f の Hesse 行列の符号を判定すること。)

6. (1) 曲線 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},1\right)$ における接線の方程式を求めよ。
(2) 曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}=1$ と平面 $x+y+z=k$ が接するような実数 k の値を求めよ。

解説

1. (1) $A\subset\mathbf{R}^N$ とする。A が有界であるとは、$\exists R\in\mathbf{R}$ s.t.

$$(☆)\qquad \forall x\in A\quad \|x\|\le R$$

が成り立つことをいう。(2) (a) 図の双曲線のうち、原点中心半径 2 の閉円盤に含まれている部分。$(x,y)\in A$ とするとき、$\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{4}=2$ だから、$R=2$ として (☆) が成立する。$f(x,y):=x^2-y^2-1$, $g(x,y)=x^2+y^2-4$ とおくと、いずれも x と y の多項式であるから、$f,g\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ は連続であり、

$$A=A_1\cap A_2,\quad A_1:=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; f(x,y)=0\right\},\quad A_2:=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)\le 0\right\}$$

と書けるが、A_1 と A_2 は $\mathbf{R}^2$ の閉集合であるから (「$\mathbf{R}^n$ 上の連続関数 f と実数 c に対して、$\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)=c\}$ も $\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)\le c\}$ も $\mathbf{R}^n$ の閉集合である」)、A も $\mathbf{R}^2$ の閉集合である。
(b) B はご存じ sin のグラフである。これは有界ではない。実際 $\forall R\in\mathbf{R}$ に対して、$x:=|R|+1$, $a:=(x,\sin x)$ とおくと $a\in B$ で、$\|a\|\ge|x|=|R|+1>R$. $f(x,y)=y-\sin x$ は連続関数である (2 つの連続関数 $\varphi:(x,y)\mapsto x$ と $\psi:z\mapsto\sin z$ の合成 $\psi\circ\varphi\colon(x,y)\mapsto\sin x$ は連続であり、多項式関数 $g(x,y)=y$ も連続。ゆえに $f=g-\psi\circ\varphi\colon(x,y)\to y-\sin x$ も連続)。$B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; f(x,y)=0\}$ であるから、B は閉集合である。

2. (1) $h\ne0$ とするとき $f(h,0)=h$, $f(0,h)=-h$ であるから、

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-0}{h}=1,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h-0}{h}=-1.$$

(2) $(x,y)\ne(0,0)$ のとき、

$$f_x(x,y)=1+\frac{y(x^4+3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=-1+\frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから、$(x,y)\to(0,0)$ のとき

$$|f_x(x,y)-f_x(0,0)|=|y|\,\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\le|y|\,\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}=|y|\to0,$$

$$|f_y(x,y)-f_y(0,0)|=|x|\frac{x^2\left|x^2-y^2\right|}{(x^2+y^2)^2}\le|x|\frac{(x^2+y^2)\left(|x^2|+|y^2|\right)}{(x^2+y^2)^2}=|x|\to0.$$

すなわち

$$\lim_{\substack{(x,y)\neq(0,0)\\(x,y)\to(0,0)}} f_x(x,y) = f_x(0,0), \qquad \lim_{\substack{(x,y)\neq(0,0)\\(x,y)\to(0,0)}} f_y(x,y) = f_y(0,0).$$

ゆえに f_x, f_y ともに $(0,0)$ で連続である。

(3) $h \neq 0$ に対して、

$$f_x(0,h) = 1 + \frac{h\left(0^4 + 3\cdot 0^2 h^2\right)}{(0^2+h^2)^2} = 1,$$

$$f_y(h,0) = -1 + \frac{h^3(h^2-0^2)}{(h^2+0^2)^2} = -1+h$$

であるから、

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,0+h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h} == \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)-(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1.$$

(3) もし f が C^2 級ならば $f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つはずであるが、(2) よりそうではないから、f は C^2 級ではない。

3.

$$F'(t) = f_x(a+th,b+tk)h + f_y(a+th,b+tk)k,$$

$$F''(t) = f_{xx}(a+th,b+tk)h^2 + 2f_{xy}(a+th,b+tk)hk + f_{yy}(a+th,b+tk)k^2,$$

$$F'''(t) = f_{xxx}(a+th,b+tk)h^3+3f_{xxy}(a+th,b+tk)h^2k+3f_{xyy}(a+th,b+tk)hk^2+f_{yyy}(a+th,b+tk)k^3.$$

4. (1) A を実対称行列とする。(a) A が正値とは、A のすべての固有値が正であることをいう。(b) A が負値とは、A のすべての固有値が負であることをいう。(c) A が不定符号とは、A の固有値に正のものと負のものがあることをいう。(2) $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a \\ -a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = (\lambda - a)(\lambda + a)$ であるから、A の固有値は a と $-a$ である。$a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ であるから、a と $-a$ は異符号である。ゆえに A は不定符号である。(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は 2 と 0. A は正値でも (0 は正でない)、負値でも (2 は負ではない), 不定符号でも (負の固有値がない) ない。■

5. (1) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (1+2xy-2x^2)e^{-x^2-y^2} \\ (-1-2xy+2y^2)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}$,

$$H(x,y) = 2e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} (-3x+2x^3+y-2x^2y) & (x-y+2x^2y-2xy^2) \\ (x-y+2x^2y-2xy^2) & (3y-2y^3+x(-1+2y^2)) \end{pmatrix}.$$

(2) $H(1/2,-1/2) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値は $-\dfrac{4}{\sqrt{e}}, -\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ で両方とも負であるから、$H(1/2,-1/2)$ は負値である。ゆえに f は $(1/2,-1/2)$ で極大、極大値 $f(1/2,-1/2) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. $H(-1/2,1/2) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $\dfrac{4}{\sqrt{e}}, \dfrac{2}{\sqrt{e}}$ で両方とも正であるから、$H(-1/2,1/2)$ は正値である。ゆえに f は $(-1/2,1/2)$ で極小、極小値 $f(-1/2,1/2) = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

6.

(1) $F(x,y) := \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2}$ とおく。

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{3} \\ y \end{pmatrix}, \quad \nabla F\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$ における接線は、この点を通り、$\nabla F\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$ を法線ベクトルに持つので、

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 1 \cdot (y-1) = 0.$$

整理して、

$$\sqrt{\frac{2}{3}}x + y - 2 = 0. \qquad \left(y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x + 2\right)$$

(2) $F(x,y,z) := \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{4}$ とおき、$F(x,y,z) = 1$ の接平面で、法線ベクトルが $(1,1,1)$ に平行なものを求める。接点を (x_0, y_0, z_0) とすると、

$$\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{3} + \frac{z_0^2}{4} = 1,$$

$$\exists t \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \left(x_0, \frac{2y_0}{3}, \frac{z_0}{2}\right) = t(1,1,1).$$

これを解いて $(t, x_0, y_0, z_0) = \pm\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, 1, \dfrac{4}{3}\right)$. (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式

$$x_0(x - x_0) + \frac{2y_0}{3}(y - y_0) + \frac{z_0}{2}(z - z_0) = 0$$

に代入して、

$$x + y + z = 3, \quad x + y + z = -3. \blacksquare$$

4　2010 年度

4.1　2010 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 試験問題

(2010 年 7 月 26 日施行)

1.　(1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^2$ の部分集合 (ただし空集合、全平面以外のもの) で、開集合であるものの例をあげ、(1) で述べた定義に基づき、それが開集合であることを示せ。(3) 次の命題が真ならば証明し、偽ならば反例をあげよ: 「F_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が $\mathbf{R}^N$ の開集合ならば、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$ は $\mathbf{R}^N$ の開集合である。」

2. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ について、(a) f は C^1 級, (b) f は連続, (c) f は全微分可能, (d) f は各変数につき偏微分可能, という 4 つの条件を考える。

(1) (c) が成り立つとはどういうことか、定義を書け。

(2) 条件 (a), (b), (c), (d) 間の関係について説明せよ (ある条件から別の条件が一般に導かれるならば、それをすべて指摘せよ)。

(3) 次式で定義される $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が、条件 (a), (b), (c), (d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

3. (1) $\varphi\colon (0,\infty)\times[0,2\pi) \ni (r,\theta) \mapsto (x,y)\in\mathbf{R}^2$ を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ で定めるとき、φ のヤコビ行列を求めよ。また φ は単射であることを示せ。
(2) $u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto u(x,y)\in\mathbf{R}$ があるとき、$U\colon (0,\infty)\times[0,2\pi) \ni (r,\theta)\mapsto U(r,\theta)\in\mathbf{R}$ を

$$U(r,\theta) := u(x,y),\quad x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\quad (r\in[0,\infty),\ \theta\in\mathbf{R})$$

で定めるとき、次式が成り立つことを示せ。

$$u_{xx}+u_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}.$$

4. $f(x,y) := x^4+y^4+6x^2y^2-2x^2-2y^2$ について、以下の問に答えよ。

(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

5. (1) 陰関数定理を書け。
(2) $F(x,y) := \log\sqrt{x^2+y^2} - \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ $((x,y)\in(0,\infty)\times\mathbf{R})$ に対して、$(1,0)$ の近傍で、$F(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

6. $f,g\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を $f(x,y) := x^2+2xy+y^2$, $g(x,y) := 3x^2+2xy+3y^2-4$ で定め、$N_g := \{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)=0\}$ とおく。
(1) N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であることを示せ (ヒント: $2x^2+2y^2 \le 3x^2+2xy+3y^2$)。(2) f は N_g 上で最大値、最小値を取ることを示せ。(3) N_g 上で $\nabla g \ne 0$ であることを示せ。(4) Lagrange の未定乗数法を用いて、f の N_g における最大値、最小値を求めよ。

本試験解説

120 点満点で採点。採点基準は現時点では暫定的。

1.

(1) $A\subset\mathbf{R}^N$ が $\mathbf{R}^N$ の開集合であるとは、

$$\forall a\in A,\quad \exists\varepsilon>0\quad \text{s.t.}\quad B(a;\varepsilon)\subset A$$

が成り立つことをいう。ただし $B(a;\varepsilon) := \{x\in\mathbf{R}^N; \|x-a\|<\varepsilon\}$.

(2) $A=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2; x_1>0\}$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。$\forall a=(a_1,a_2)\in A$ に対して、A の定義から $a_1>0$ が成り立つが、$\varepsilon:=a_1$ とおくと、$\varepsilon>0$ で、$B(a;\varepsilon)\subset A$. 実際 $\forall x\in B(a;\varepsilon)$ に対して、$\|x-a\|<\varepsilon$ であるから、$|x_1-a_1|\le\|x-a\|<\varepsilon=a_1$. これから $-a_1<x_1-a_1<a_1$ が導かれるので、$x_1>0$. ゆえに $x\in A$.

(3) 偽である。$F_n:=B\left(0;\dfrac{1}{n}\right)=\left\{x\in\mathbf{R}^N;\|x\|<\dfrac{1}{n}\right\}$ とおくと、これは $\mathbf{R}^N$ の開集合であるが、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}}F_n=\{0\}$ であり、$\{0\}$ は $\mathbf{R}^N$ の開集合ではない。

採点基準　(1) 8 点 (主語なしは 4 点、主語間違いは 0 点)　(2) 6 点 (例が正しければ3点、ε 正しければ 3 点)　(3) 6 点 (真偽正しければ3点、反例が正しければ 3 点)

2.

(1) f が Ω で全微分可能とは、$\forall a\in\Omega$ で全微分可能なことをいう。f が a で全微分可能とは、$\exists A\in M(1,n;\mathbf{R})$ s.t.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{\|h\|}=0$$

が成り立つことをいう。

(2) (a)$\Longrightarrow$(c), (c)$\Longrightarrow$(b), (c)$\Longrightarrow$(d) は定理として学んだ。その系として、(a)$\Longrightarrow$(b), (a)$\Longrightarrow$(d) も成り立つ。これ以外は一般には成立しない。

(3) 実は (a) 満たさない, (b) 満たす, (c) 満たす, (d) 満たす, である。事前に分かれば、色々と省略が可能だが、ここでは一つ一つチェックしてみる。まず $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で f は C^∞ 級であることは明らかである (多項式関数の制限 $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\ni(x,y)\mapsto x^2+y^2\in(0,\infty)$ は C^∞ 級、$(0,\infty)\ni z\mapsto\sqrt{z}\in(0,\infty)$ は C^∞ 級、$(0,\infty)\ni w\mapsto\dfrac{1}{w}\in\mathbf{R}$ は C^∞ 級, $\sin\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は C^∞ 級で、これらの合成として $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\ni(x,y)\mapsto\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\in\mathbf{R}$ は C^∞ 級である。一方 $\mathbf{R}^2\ni(x,y)\mapsto x^2+y^2\in\mathbf{R}$ も C^∞ 級である。f の $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ への制限は、これら二つの C^∞ 級関数の積として、C^∞ 級、特に C^1 級であり、$\Omega=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ として、(a),(b),(c),(d) が成り立つ)。

- (b) について、$\forall(x,y)\neq(0,0)$ に対して、

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le x^2+y^2=\|(x,y)\|^2$$

  であるから、$(x,y)\to(0,0)$ のとき、$f(x,y)\to f(0,0)$. ゆえに f は $(0,0)$ で連続である。

- (d) について、$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$, $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$ ともに

$$\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\dfrac{1}{|h|}}{h}=\lim_{h\to0}h\sin\frac{1}{|h|}=0\quad\text{(挟み撃ちの原理で証明可)}$$

  であるから、$f=f(x,y)$ は $(0,0)$ で、x についても、y についても、偏微分可能である。($f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ ということも分かった。)

- (c) について。$f(0,0)=0,\ f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &= \left|\frac{(h^2+k^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \\ &= \left|\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \\ &\le \sqrt{h^2+k^2}\to 0 \quad ((h,k)\to(0,0)).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

が成り立つので、f は $(0,0)$ で全微分可能である。

- (a) について。$(x,y)\neq(0,0)$ で、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ は成り立たない (左辺の極限がそもそも存在しない — 例えば、x 軸に沿った極限、y 軸に沿った極限を考えてみると分かる) ので、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。ゆえに f は $\mathbf{R}^2$ で C^1 級ではない。 ■

採点基準　(1) 4 点　(2) 8 点　(3) (a)〜(d) いずれも証明つきで採点 $2\times4=8$ 点

雑談　(1) は出来て欲しい。分母の $\|\ \ \|$ は大事である (分子は $\|\ \ \|$ つけてもつけなくても良い)。1 変数の場合の「f が a で微分可能 $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在」の発展になっているわけだけど (A とおいて移項して、絶対値をつけるだけ。当然 $\exists A$ と $\exists$ がつく)、似ても似つかない奇妙な式を書く人もいる。

既に学んだ 1 変数の話の多変数への拡張をしているのである
(特殊な場合として、高校で習ったはずの 1 変数の話を含む)

ことを強調しておきたい。

一方、

$$f_x(0,0)=\lim_{n\to0}\frac{|f(0+h,0)-f(0,0)|}{h}\quad(\text{これはおかしい})$$

のようにしてしまう人も散見された (ひどいまちがいですよ)。1 変数で

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{|f(a+h)-f(a)|}{h}\quad(\text{これはおかしい})$$

とするようなもので明らかにおかしい、と気付いて欲しい。

3. (1) (**単射性**) $(r,\theta),(r',\theta')\in(0,\infty)\times[0,2\pi)$, $(r,\theta)\neq(r',\theta')$, $(x,y)=\varphi(r,\theta)$, $(x',y')=\varphi(r',\theta')$ とする。もしも $r\neq r'$ ならば、$x^2+y^2=r^2\neq(r')^2=(x')^2+(y')^2$ なので、$(x,y)\neq(x',y')$. $r=r'$ かつ $\theta\neq\theta'$ の場合、$(\cos\theta,\sin\theta)\neq(\cos\theta',\sin\theta')$ であるから、$(x,y)\neq(x',y')$.
(**ヤコビ行列**)

$$\varphi'(r,\theta)=\begin{pmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}.$$

採点基準 (1) 単射性 4 点, ヤコビ行列 6 点 (2) これを解くには色々な方針がある。r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めるやり方では、それらが出て 5 点、後は完璧で 5 点。

雑談 x_r, x_θ, y_r, y_θ をばらばらに計算できるが、ヤコビ行列が何か書けない人が続出。φ とか φ^{-1} とか $\varphi(x)$ とか $\varphi'(x)$ とか、$\begin{pmatrix}x_r & y_r\\ x_\theta & y_\theta\end{pmatrix}$ とか (これは、あれほど「やらないように (転置と間違えないように)」言ったものである)、採点者を拷問にかけるような回答が多い。φ を使うならば、正しく $\varphi'(r,\theta)$ と書いて欲しい ($f=f(x)$ に対して $f'(x)$ とか、$f=f(x,y)$ に対して $f'(x,y)$ と書くのと同じ)。

「$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\operatorname{Arccos}\dfrac{x}{r}$ で一意的に定まる」という答案があった。これは 3 次元の場合を参考にしたのかな…「ちゃんと解けるのは単射だから」という悟りを持っているらしく、それは評価できるが、残念ながらその解は間違っている。この θ は一周分必要で、主値 Arccos では、半周分でしかない。

3A. (1) これは単なる計算。小テストでは、x, y, z という空間変数が 3 つの場合をやった (つまり小テストより易しい)。多分 $u_t=\triangle u$ が成り立つだろう、ということで検算にもなるので少し気が楽か。

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{(x^2+y^2-4t)}{16\pi t^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right),\\
u_x &= -\frac{x}{8\pi t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right),\\
u_{xx} &= \frac{(x^2-2t)}{16\pi t^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right),\\
\triangle u &= \frac{(x^2+y^2-4t)}{16\pi t^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right).
\end{aligned}$$

(2) 接超平面の方程式は案外苦戦する人が多い (多分覚え方が下手なのだと思う)。要点をもう一回提示すると、

- F のレベルセット $F(x)=c$ の、$x=a$ での接超平面は、$\nabla F(a)\cdot(x-a)=0$. (ただし $F(a)=c$ とする。)

- f のグラフ $y=f(x)$ の、$x=a$ での接超平面は、$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

例 (直線の接線) (1) $F(x,y)=Ax+By+C$ のとき、$\nabla F=\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$ だから、$F(x,y)=0$ の (a,b) での接線は $A(x-a)+B(y-b)=0$. 実は $0=F(a,b)=Aa+Bb+C$ だから、接線は $Ax+By+C=0$. (2) $f(x)=Ax+B$ のとき、$f'(x)=A$ だから、$y=f(x)$ の a での接線は $y=A(X-a)+f(A)$. $f(A)=Aa+B$ であるから、接線は $y=Ax+B$. ■

いずれも「式を覚えよう」などと考えないこと。前者は「$\operatorname{grad} F(x_0)$ は法線ベクトル」, 後者は「接線の式と同じ」くらい。この問題は後者の方を問われている。

$$u(1,1,1)=\frac{1}{4\pi\sqrt{e}},\quad u_t(1,1,1)=-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}},\quad u_x(1,1,1)=-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}},\quad u_y(1,1,1)=-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}}$$

であるから、接平面の方程式は

$$\begin{aligned} u &= u_t(1,1,1)(t-1)+u_x(1,1,1)(x-1)+u_y(1,1,1)(y-1)+u(1,1,1)\\ &= -\frac{1}{8\pi\sqrt{e}}(t-1)-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}}(x-1)-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}}(y-1)+\frac{1}{4\pi\sqrt{e}}\\ &= \frac{1}{8\pi\sqrt{e}}(-t+1-x+1-y+1+2) \end{aligned}$$

整理して、

$$u=\frac{5-t-x-y}{8\pi\sqrt{e}}.■$$

採点基準　(1) u_t で 4 点, u_{xx} で 4 点、 $\triangle u$ で 2 点　(2) 10 点

雑談　出て来る概念に、自然な幾何学的意味がある場合、それは逃さずに自分のものにすべきである。それ自身は例えば試験の答案の文章中に直接的に現れないかもしれないが、自分の頭の中のイメージ構築に役立ち、考えるときに有形無形の助けになる可能性が高い。 ■

4.　(1) $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}4x^3+12xy^2-4x\\ 4y^3+12x^2y-4y\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}12x^2+12y^2-4 & 24xy\\ 24xy & 12x^2+12y^2-4\end{pmatrix}$

(3) $f_x=0$ と $f_y=0$ を連立して解くわけであるが、解き方は色々ある。

- 辺々引き算すると、$(x-y)(x^2-2xy+y^2-1)=0$. これはさらに $(x-y)(x-y+1)(x-y-1)=0$ と因数分解できる。これから $x-y=0,1,-1$. これで未知数の消去が出来るので後は簡単。

- 落ち着いて見ると、$x(x^2+3y^2-1)=0$, $y(y^2+3x^2-1)=0$. 小テストの問 1 でやったようにして、

  $$(x=0\wedge y=0)\vee(x=0\wedge y^2+3x^2=1)\vee(x^2+3y^2=1\wedge y=0)\vee(x^2+3y^2=1\wedge y^2+3x^2=1).$$

  この 4 つの場合に分解してしまえば、後はすぐに未知数の消去が出来て簡単に解ける。

- 本質的に同じことだが、$x(x^2+3y^2-1)=0$, $y(y^2+3x^2-1)=0$ としてから、前者を $x=0$ or $x^2+3y^2-1=0$ として、それぞれ $y(y^2+3x^2-1)=0$ と連立。

結局 $(x,y)=(\pm1,0),(0,\pm1),(0,0),\pm(1/2,1/2),\pm(1/2,-1/2)$ と解ける。これら各点で Hesse 行列の符号を調べて、$(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$ で極小値 -1, $(0,0)$ で極大値 0 を取る、ことが分かる (その他の点では Hesse 行列は不定符号であるから、極値点ではない)。

採点基準　(1) 4 点　(2) 4 点　(3) 連立 1 次方程式を解いて 4 点、正値で極小 で 3 点、負値で極大出来て 3 点、不定符号で極値でないで 2 点。

雑談　Hesse 行列が対称になっていない答案があった。一般に「C^2 級関数の Hesse 行列は対称」が成り立つという定理を注意しただけでなく、行列の対称性はあちこちで出て来た。2 次形式の係数行列は対称であるように定めるとか、実対称行列の固有値は実数であるとか (対称性がないと、固有値が虚数になるかもしれず、そもそも符号の分類もナンセンスになるおそれあり)。体重がマイナスの人の話をしているようなもので、むちゃくちゃである。

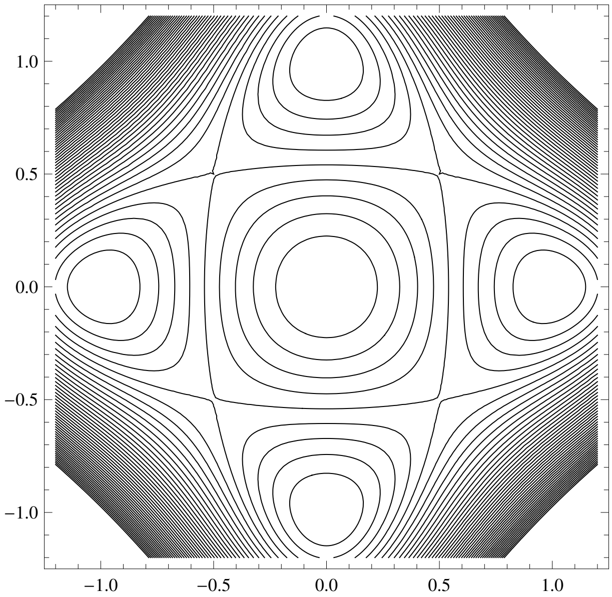


図 1: 十字型に極値点が並び、4 個の鞍点もある (分かります？スルーしないでね)

5. (1) 省略します。「陰関数定理の覚え方」[1] などを参考にして下さい。外せない要点は

(a) $\det F_y(a,b) \neq 0$ という仮定 (ついでに $F(a,b)=0$ も入れておいて)

(b) U, V, φ という 3 つのものの存在を主張する

(c) $U \times V$ で、$F(x,y)=0$ と $y=\varphi(x)$ が同値であること (これが「陰関数」の意味)

の三つ。

(2) $F(1,0) = \log 1 - \tan^{-1}\dfrac{0}{1} = 0 - 0 = 0$, $F_y(x,y) = \dfrac{-x+y}{x^2+y^2}$, $\det F_y(1,0) = F_y(1,0) = \dfrac{-1+0}{1^2+0^2} = -1 \neq 0$ であるから、$(1,0)$ の十分小さな近傍で、$F(x,y)=0$ の C^1 級の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在する。$F(x,\varphi(x))=0$ から

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$$

であり、$F_x(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $F_x(1,0) = \dfrac{1+0}{1^2+0^2} = 1$ であるから、$\varphi'(1) = -\dfrac{1}{-1} = 1$.

採点基準 (1) 配点は 10 点。基本的に上にあげた三要素をチェックして採点しますが、仮定とそれから導かれる結論の境目を間違えている場合は (つまり "$\Longrightarrow$" の場所がずれている場合は)、他がどんなに書けていても (上の三つが書けていても)、0 点です。(2) $F(1,0)=0$, $\det F_y(1,0) \neq 0$ をチェックした上で、陰関数が存在すると主張することで 5 点。正しく $\varphi'(1)=1$ が計算できて 5 点 ($\varphi'(1)=-1$ はダメ、$\varphi'(1,0)=1$ というのも陰関数を間違えているのでダメ)。

6.

(1) $g(x,y)$ は x,y の多項式であるから、関数 $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。ゆえに N_g は $\mathbf{R}^2$ の

[1] `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2009/oboekata.pdf`

閉集合である[2]。一方、$(x,y)\in N_g$ であるとき、

$$2x^2+2y^2 \le 3x^2+2xy+3y^2=4$$

であるから、$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{2}$. ゆえに N_g は有界集合である (実は楕円です)。

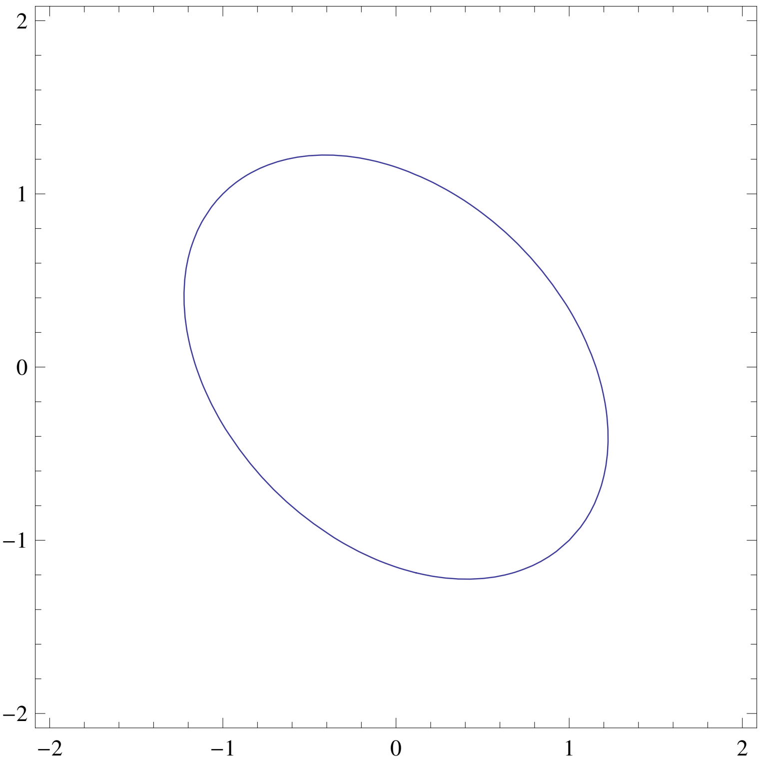


図 2: N_g: $3x^2+2xy+3y^2-4=0$

(2) $f(x,y)$ は x,y の多項式であるから、関数 $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ は連続である。特に f は N_g 上で連続である。N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であるからコンパクトであるので、その上で連続な f は、最大値と最小値を持つ。

(3)

$$\nabla g(x,y) = 2\begin{pmatrix} 3x+y \\ x+3y \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\nabla g(x,y)=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad (x,y)\notin N_g.$$

対偶を取って、$(x,y)\in N_g \Longrightarrow \nabla g(x,y)\neq 0$.

(4) (3) より (x,y) で極値であれば、

$$\exists\lambda\in\mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y), \quad g(x,y)=0.$$

前者は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.,} \quad \begin{pmatrix} 1-3\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1-3\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[2] $N_g = g^{-1}\{0\}$ だからと書いた人がいました。「集合・距離・位相 1」で連続写像による閉集合の逆像は閉集合と習ったのかな。大変結構。そういうことです。

とかける。$g(x,y)=0$ より $(x,y)\neq(0,0)$ であることから、

$$\det\begin{pmatrix}1-3\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1-3\lambda\end{pmatrix}=0.$$

これから $\lambda=0,\dfrac{1}{2}$.

- $\lambda=0$ のとき、$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$ は $x+y=0$ と同値である。これと $g(x,y)=0$ から $x^2=1$ が導かれ、結局 $(x,y)=(1,-1),(-1,1)$. このとき、いずれの場合も $f(x,y)=0$.
- $\lambda=\dfrac{1}{2}$ のとき、$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$ は $x=y$ と同値である。これと $g(x,y)=0$ から $x^2=\dfrac{1}{2}$ が導かれ、結局 $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),-\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. このとき、いずれの場合も $f(x,y)=2$.

f の N_g 上の最大値は存在し ((2) で示した)、それは N_g 上の極大値であり (「最大値は極大値」は当たり前)、条件 $\nabla g\neq 0$ on N_g が成立しているので ((3) で示した)、N_g 上の極大値はもれなく Langrange の未定乗数法で求まるはずなので (これは授業で証明した定理による)、上の計算結果から 0 と 2 のいずれか。ゆえに f の N_g 上の最大値は 0 か 2 であるが、最大値の定義から、0 は最大値ではありえない (より大きな 2 という値を取るわけだから)、ゆえに 2 が最大値である。同様の考察によって、0 が最小値であることが分かる。■

採点基準　(1) は有界と閉それぞれ 2 点　(2) 2 点　(3) 2 点 (4) 12 点 ($\exists\lambda$ s.t. $\nabla f=\lambda\nabla g$ という式を書くことに 4 点, 解くことに 4 点, それが最大と最小である理由を 4 点)

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

のように、与えられた行列 A, B について、$Ax=\lambda Bx$, $x\neq 0$ を満たす λ, x を求めよ、という問題を**一般化固有値問題** (**generalized eigenvalue problem**) と呼ぶ。線形代数の本には、一般化固有値問題でない、フツーの固有値問題しか載っていないことが多いが、それは犯罪である。というのは冗談だが、応用上は、ひょっとすると、フツーの固有値問題よりも、一般化固有値問題の方が多く登場するくらいである (まあ、分野によるけれど)。上に書いたのは、フツーの固有値問題を解くやり方の真似だが、次のような強引な方法もある。

$$Ax=\lambda Bx$$

の両辺に B^{-1} をかけて、

$$B^{-1}Ax=\lambda x.$$

これは $B^{-1}A$ という行列に関するフツーの固有値問題である。上の問題の場合に実行すると、$B^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac14&\frac14\\\frac14&\frac14\end{pmatrix}$ であるから、

$$\begin{pmatrix}\frac14&\frac14\\\frac14&\frac14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

を解くことになる。このやり方を自力で発見した人もいて、感心した。

4.2 2010年度 多変数の微分積分学1, 多変数の微分積分学1演習 追試験問題

(2010年7月30日施行)
次の1〜6の各問題を解け。**3A** と **3B** はいずれか一方を選べ。

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の有界集合の定義を述べよ。(2) 次の各集合を図示し、有界であればそうであることを証明せよ。(a) $A := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}$ (b) $B := \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1\right\}$

2. 次の関数 $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ が (a) 各変数につき偏微分可能であるか、(b) 連続であるか、(c) 全微分可能であるか、(d) C^1 級であるか、調べよ。

$$f(x,y,z) := \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & ((x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}) \\ 0 & ((x,y,z) = (0,0,0)) \end{cases}$$

3A. c を正定数、$F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を C^2 級の関数とするとき、$u\colon (\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$u(x,y,z,t) := \frac{F(r-ct)}{r}, \quad r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

で定義すると、u は次式を満たすことを示せ。

$$u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right).$$

3B. C^2 級の関数 $f\colon [0,\infty) \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、$u\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を $u(x,y,z) := f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ で定める。このとき、以下の問に答えよ。
(1) ∇u を f を用いて表せ。(2) $\triangle u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ を f を用いて表せ。(3) u が $\triangle u(x,y,z) = 0$ $((x,y,z) \neq (0,0,0))$ を満たしているならば、実は u は次の形をしていることを示せ。

$$u(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + D \quad (C,\ D \text{ は定数}).$$

4. $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 2y^2$ で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) f のグラフ $z = f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式を求めよ。(2) $\nabla f(x,y) = 0$ となる点 (x,y) を求めよ。(3) f の点 (x,y) における Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(4) f の極値を求めよ。

5. $f(x,y) = x^2 + y + \sin xy$, $P = (0,0)$ とする。$f(x,y) = 0$ の点 P の近くにおける陰関数 $x = g(y)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。
注意 $y = \varphi(x)$ でなく、$x = g(y)$ である。

6. 方程式 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ で表される平面内の曲線を E とする。点 (x,y) が E 上を動くときの、関数 $f(x,y) := x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

4.3 2010年度 多変数の微分積分学1, 多変数の微分積分学1演習 追試験問題

(2010年8月3日施行)

1.　(1) $\mathbf{R}^N$ の閉集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^2$ の部分集合 (ただし空集合、全平面以外のもの) で、閉集合であるものの例をあげ、(1) で述べた定義に基づき、それが閉集合であることを示せ。(3) 次の命題が真ならば証明し、偽ならば反例をあげよ: 「F_n $(n=1,2,\cdots)$ が $\mathbf{R}^N$ の閉集合ならば、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$ は $\mathbf{R}^N$ の閉集合である。」

2.　$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ について、(a) f は各変数につき偏微分可能, (b) f は連続, (c) f は全微分可能, (d) f は C^1 級, という 4 つの条件を考える。

(1) (d) が成り立つとはどういうことか、定義を書け。

(2) 次式で定義される $f\colon\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ が、条件 (a), (b), (c), (d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x,y,z):=\begin{cases}\dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & ((x,y)\in\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\})\\ 0 & ((x,y,z)=(0,0,0))\end{cases}$$

3.　C^2 級の関数 $u\colon\mathbf{R}^2\ni(x,t)\mapsto u(x,t)\in\mathbf{R}$ が $\dfrac{1}{4}u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)$ $((x,t)\in\mathbf{R}^2)$ を満たすとき、

$$U(p,q)=u(x,t),\quad \begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2t\\ x+2t\end{pmatrix}$$

で定義された U は、次式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial p\partial q}(p,q)=0\quad ((p,q)\in\mathbf{R}^2).$$

4.　$f(x,y):=2x^3+6xy^2-2x^2+4xy-2y^2-3x-3y$ について、以下の問に答えよ。

(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

5.　$F(x,y):=y+\sin y+x^2-e^x+1$ とする。$(x,y)=(0,0)$ の十分小さな近傍で $F(x,y)=0$ の陰関数 $x=\psi(y)$ が存在することを示し、その点における微分係数を求めよ。

注意　y について解いた $y=\varphi(x)$ でなくて、x について解いた $x=\psi(y)$ である。

6.　$f,g\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を $f(x,y):=x+y$, $g(x,y):=5x^2-6xy+5y^2-5$ で定め、$N_g:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)=0\}$ とおく。

(1) 曲線 N_g 上の点 $(1,0)$ における N_g の接線の方程式を求めよ。(2) N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であることを示せ。(3) f の N_g における最大値、最小値を求めよ。

略解

1　(1) 略, (2) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x\le 0\}$ や $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2\ge 1\}$ などが証明が簡単か。(3) 真。これは習った定理。

2 (1) f が Ω で C^1 級とは、f が各変数 x_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ について Ω で偏微分可能で、$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ が Ω で連続なことをいう。(2) f は明らかに $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ で C^∞ 級である。$(0,0,0)$ でどうなるか調べる。結論を先に言うと、$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ は $(0,0,0)$ でも存在し、連続となる。ゆえに f は $\mathbf{R}^3$ 全体で C^1 級となるので、全微分可能であるし、連続でもある。

例えば $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)$ については、

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0,0) - f(0,0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

から $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 0$. $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ のときは、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot (xyz)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2} = (\text{中略}) = \frac{(y^2+z^2)yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

極座標を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) &= \frac{(y^2+z^2)yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - 0 = \frac{r^2\left(\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\right)\cdot r^2 \sin\theta\sin\phi\cos\theta}{r^3} \\ &= r\left(\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\right)\sin\theta\sin\phi\cos\theta.\end{aligned}$$

ここで $|\sin|, |\cos| \leq 1$ を用いると、

$$\left|\left(\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\right)\sin\theta\sin\phi\cos\theta\right| \leq \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta \leq \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

であることが分かるので、

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)\right| \leq r \to 0 \quad ((x,y,z) \to (0,0,0)).$$

ゆえに $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ は $(0,0,0)$ で連続である。

3. $p = x - 2t$, $q = x + 2t$ より $x = \dfrac{1}{2}(p+q)$, $t = \dfrac{1}{4}(q-p)$ である。連鎖律 (chain rule) から

$$\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

同様にして

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial p \partial q} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\frac{\partial t}{\partial p}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial p}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{8}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right).\end{aligned}$$

u は C^2 級ゆえ、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$. また仮定から $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. ゆえに $\dfrac{\partial^2 U}{\partial p \partial q} = 0$.

4. (1) $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}6x^2+6y^2-4x+4y-3\\12xy+4x-4y-2\end{pmatrix}$ (2) $H(x,y)=\begin{pmatrix}12x-4 & 12y+4\\12y+4 & 12x-4\end{pmatrix}$

(3)

$$\begin{cases}f_x=0\\f_y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+6y^2-4x+4y-3=0\\12xy+4x-4y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+12xy+6y^2=6\\12xy+4x-4y-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2=1\\12xy+4x-4y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=\pm1\\12xy+4x-4y-3=0\end{cases}$$

$\nabla f(x,y)=0$ となるのは、$(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{7}{6},-\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{6},-\frac{7}{6}\right)$.

$$H(1/2,1/2)=\begin{pmatrix}2 & 10\\10 & 2\end{pmatrix}=:H,\quad \det H_1>0,\quad \det H_2<0$$

$H(1/2,1/2)$ は不定符号なので、$(1/2,1/2)$ で極値を取らない。

$$H(-1/2,-1/2)=\begin{pmatrix}-10 & -2\\-2 & -10\end{pmatrix}=:H,\quad \det H_1<0,\quad \det H_2>0$$

$H(-1/2,-1/2)$ は負値なので、$(-1/2,-1/2)$ で狭義の極大。

$$H(7/6,-1/6)=\begin{pmatrix}10 & 2\\2 & 10\end{pmatrix}=:H,\quad \det H_1>0,\quad \det H_2>0$$

$H(7/6,-1/6)$ は正値なので、$(7/6,-1/6)$ で狭義の極小。

$$H(-1/6,7/6)=\begin{pmatrix}-6 & 18\\18 & -6\end{pmatrix}=:H,\quad \det H_1<0,\quad \det H_2<0$$

$H(-1/6,7/6)$ は不定符号なので、$(-1/6,7/6)$ で極値を取らない。
　極小値 $f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=2$. 極大値 $f\left(\frac{7}{6},-\frac{1}{6}\right)=-\frac{86}{27}$.

5. $F_x=2x-e^x,\ F_y=1+\cos y.\ F(0,0)=0,\ F_x(0,0)=-1\neq0$ より $F(x,y)=0$ は $(0,0)$ の十分小さな近傍で $x=\psi(y)$ と x について解ける。

$$\psi'(0)=-\frac{F_y(0,0)}{F_x(0,0)}=-\frac{2}{-1}=2.$$

6.

(1) $g(1,0)=5-0+0-5=0$ だから、$(1,0)$ は確かに N_g 上の点である。

$$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}g_x\\g_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10x-6y\\-6x+10y\end{pmatrix},\quad \nabla g(1,0)=\begin{pmatrix}10\\-6\end{pmatrix}$$

であるから、$(1,0)$ における接線の方程式として、

$$10(x-1)-6(y-0)=0.$$

整理して $5x-3y-5=0$.

(2) $g(x,y)$ は x と y の多項式ゆえ、$g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。ゆえに $N_g = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; g(x,y)=0\}$ は $\mathbf{R}^2$ の閉集合である。

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - (x^2+y^2) = 4x^2 - 6xy + 4y^2 = 4\left[\left(x - \frac{3y}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}y^2\right] \geq 0$$

であるから、$(x,y) \in N_g$ であるとき

$$x^2 + y^2 \leq 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 5.$$

ゆえに $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{5}$ であるから、N_g は有界集合である。

(3) f は多項式関数で N_g で連続であるが、N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であるから、f は N_g 上で最大値と最小値を持つ。N_g 上 $\nabla g \neq 0$ であることが分かるので、N_g 上で f の最大値・最小値を与える点 (x,y) は Lagrange の未定乗数法で求まる。すなわち

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y), \quad g(x,y) = 0.$$

具体的には

$$(\sharp) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 5 = 0.$$

前者から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4\lambda} \\ \dfrac{1}{4\lambda} \end{pmatrix}.$$

($\sharp$) の第 2 式に代入して、結局 $(x,y) = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}, -\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$ と解ける。

$$f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\sqrt{5}$$

であるから、前者が最大値、後者が最小値である。■

5 2009 年度

5.1 2009 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 試験問題

(2009 年 7 月 25 日施行)

1. (1) (a) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を述べよ。(b) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 (ただし空集合、全空間以外のもの) で、有界閉集合であるものの例をあげ、(1) で述べた定義に基づき、それが有界閉集合であることを示せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 (ただし空集合、全空間以外のもの) で、有界でないもの例をあげよ。

2. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ について、P1: f は連続, P2: f は各変数につき偏微分可能, P3: f は全微分可能, P4: f は C^1 級, という 4 つの条件を考える。

(1) P$i \Longrightarrow$ Pj $(i, j \in \{1,2,3,4\},\ i \neq j)$ のうち、一般的に成立するものをすべてあげよ。

(2) $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & ((x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$ が条件 P1〜P4 を満たすか調べよ。

3. $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $(y,z) \neq (0,0)$ に対して、

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\phi, \quad z = r\sin\theta\sin\phi, \quad r \in (0,\infty), \theta \in (0,\pi), \phi \in [0,2\pi)$$

を満たす (r,θ,ϕ) が一意的に定まることを示せ。また、この式で $\varphi\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi) \ni (r,\theta,\phi) \mapsto (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ を定めるとき、$\varphi'(r,\theta,\phi)$ と、$\det\varphi'(r,\theta,\phi)$ を求めよ。

4. $f(x,y) := \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} + 2x^2y + y^2 - \dfrac{4}{3}$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

5. (1) 陰関数定理を書け。(2) a を正定数とし、$F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を $F(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-a^2 \\ x^2+y^2-ax \end{pmatrix}$ で定める。$F(\alpha,\beta,\gamma) = 0$ を満たす点 (α,β,γ) の点の近傍で、$F(x,y,z) = 0$ を (y,z) について解くことを考える。(a) 陰関数定理の仮定の成り立たない点を求めよ。(b) 陰関数定理の仮定が成り立つ点の近傍で、$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ を求めよ。

（もしも (2) が出来なければ、その代りに、$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ について、(a) 陰関数定理の仮定の成り立たない点を求め、(b) $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ における陰関数の微分係数 dy/dx を求めよ。半分の得点を与える。）

6. $f, g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を、$f(x,y,z) := x+y+z$, $g(x,y,z) := \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{4} - 1$ で定め、$N_g := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; g(x,y,z) = 0\}$ とおく。
(1) f は N_g 上で最大値、最小値を取ることを示せ。(2) N_g 上で $\nabla g \neq 0$ であることを示せ。
(3) Lagrange の未定乗数法を用いて、f の N_g における最大値、最小値を求めよ。

2009 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 試験問題 解答

1.

(1) 略

(2) 例えば、原点中心、半径 1 の閉球 $A = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ は、$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合である。$\forall x \in A$ に対して、$\|x\| \leq 1$ であるから、A は有界である。また $f(x) := \|x\|^2 - 1$ とおくと、($f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1$ は多項式関数なので) $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は連続で、$\mathbf{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| > 1\} = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > 0\}$. これは $\mathbf{R}^n$ の開集合であるから、A は閉集合である。

(3) $A := \{x \in \mathbf{R}^n; x_1 > 0\}$ は有界でない。実際、任意の $R > 0$ に対して、$x = (R+1, 0, \ldots, 0)$ とおくとき、$x \in A$, $\|x\| = R+1 > R$.

2.

(1) P4 $\Longrightarrow$ P3 (C^1 級ならば全微分可能), P3 $\Longrightarrow$ P2 (全微分可能ならば偏微分可能), P3 $\Longrightarrow$ P1 (全微分可能ならば連続) は、定理として授業でやった。(それらと) それらから導かれる P4 $\Longrightarrow$ P2, P4 $\Longrightarrow$ P1 は成立するが、それ以外は、一般には成立しない。

(2) f が $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^∞ 級であることは明らかである (分母が 0 にならない有理関数 (多項式 / 多項式) だから)。$(0,0)$ でどうなるかをチェックしよう。実は C^1 級であり、P1, P2, P3, P4 いずれも成り立つ。ここでは P1, P2, P3, P4 の順に証明するが、P2 の次に P4 を証明すると、(1) で説明したことによって、P1, P3 が導かれる (証明をさぼれる)。

- (P1) (無駄になるけれど…) $(x,y) \neq (0,0)$ とするとき、

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \le \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2.$$

ゆえに $(x,y) \to (0,0)$ のとき $|f(x,y)-f(0,0)| \to 0$. すなわち $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$. ゆえに f は $(0,0)$ で連続である。

- (P2)

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4+0^4}{h^2+0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^4+h^4}{0^2+h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

であるから、f は $(0,0)$ で各変数について偏微分可能である。

- (P3) (これも無駄になるけれど…) $(h,k) \neq (0,0)$ とするとき、

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \\
&= \frac{\left|\dfrac{h^4+k^4}{h^2+k^2} - 0 - 0\cdot h - 0 \cdot k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^4+k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}} \le \frac{h^4+2h^2k^2+k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}} \\
&= \frac{(h^2+k^2)^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \sqrt{h^2+k^2}
\end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = 0.$$

ゆえに f は $(0,0)$ で全微分可能である。

- (P4) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき、

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cdot 4x^3 - 2x\cdot(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cdot 4y^3 - 2y\cdot(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから、

$$|f_x(x,y) - f_x(0,0)| = 2|x|\left|\frac{x^4+2x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \le 2|x|\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|x|,$$

$$|f_y(x,y)-f_y(0,0)| = 2|y|\left|\frac{y^4+2x^2y^2-x^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \le 2|y|\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|y|.$$

ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = f_y(0,0).$$

すなわち、f_x と f_y は $(0,0)$ で連続である。ゆえに f は C^1 級である。■

3. まず r は $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ で求まる。$(y,z)\neq 0$ としてあるので、$r>0$ に注意すると、θ は $\theta=\cos^{-1}\dfrac{x}{r}$ で求まる。$(y,z)\neq(0,0)$ から $|x|=\sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$ であるので、$|x|/r<1$ より $\theta\neq 0,\pi$, $\sin\theta>0$ に注意すると、$(\cos\phi,\sin\phi)=\left(\dfrac{y}{r\sin\theta},\dfrac{z}{r\sin\theta}\right)$ から、$\phi\in[0,2\pi)$ が定まる。後半は普通の極座標とほぼ同じである。

$$\varphi'(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{pmatrix}.$$

$$\det\varphi'(r,\theta,\phi) = (\text{途中略}) = r^2\sin\theta.\blacksquare$$

(この問題の式は、いわば $(1,0,0)$ を北極にした極座標である。これは試験のために作ったわざとらしい式ではなくて、世の中でかなり流布している式である (これを授業で採用しても、後ろ指は指されないはず)。すいすい使いこなせなければいけない。)

4.

(1) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3+xy^2+4xy \\ y^2+x^2y+2y+2x^2 \end{pmatrix}$,

(2) $H(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+4y+y^2 & 4x+2xy \\ 4x+2xy & x^2+2y+2 \end{pmatrix}$

(3) $\nabla f(x,y)=\mathbf{0}$ を解くと、$(x,y)=(0,0),(0,-2),(\pm 2,-2),(\pm\sqrt{3},-3)$. (実際、$\nabla f(x,y)=\mathbf{0}$ の第 1 式より、$x(x^2+y^2+4y)=0$. ゆえに $x=0$ または $x^2=-y^2-4y$. $x=0$ を $\nabla f(x,y)=0$ の第 2 式に代入して、$(x,y)=(0,0),(0,-2)$. 一方、$x^2=-y^2-4y$ を $\nabla f(x,y)=0$ の第 2 式に代入して、$y^3+5y^2+6y=0$. これから $y=0,-2,-3$.)

Hesse 行列の符号を調べることになる。$(0,0)$ 以外はそれで判定できる。$(0,0)$ だけ Hesse 行列だけでは判定できない。

- $(0,-2)$ で負値なので、f は極大、極大値 $f(0,-2)=0$.
- $(\pm 2,-2)$ で正値なので、f は極小、極小値 $f(\pm 2,-2)=-4$.
- $(\pm\sqrt{3},-3)$ では不定符号なので、f は極値を取らない。
- $H(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は正値でも、負値でも、不定符号でもない。

$$f(0,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{3}+\varepsilon^2-\frac{4}{3} > -\frac{4}{3} = f(0,0) \quad (|\varepsilon| \text{ が十分小さい正数のとき}).$$

$$f(\varepsilon,-\varepsilon^2) = \varepsilon^4\left(-\frac{3}{4}+\frac{\varepsilon^2}{6}\right)-\frac{4}{3} < -\frac{4}{3} \quad (|\varepsilon| \text{ が十分小さい正数のとき}).$$

であるから $(0,0)$ は峠点であり、極値点ではない。■

5. (1) 省略 (2) $X = x$, $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ とする。

$$\det \frac{\partial F}{\partial Y} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = -4yz$$

であるから $yz \neq 0$ であれば陰関数定理が使える。(a) $y = 0$ または $z = 0$. $y = 0$ とすると、$x = 0, a$. $(x, y, z) = (0, 0, \pm a), (a, 0, 0)$. (b) それ以外の点では、$Y = \varphi(X)$ すなわち $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ と解ける。

$$\begin{pmatrix} \varphi_1'(x) \\ \varphi_1'(x) \end{pmatrix} = \varphi'(X) = -\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial X} = -\begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x - a \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{-4yz} \begin{pmatrix} 0 & -2z \\ -2y & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2z(2x - a)}{4yz} \\ \dfrac{-4xy + 2y(2x - a)}{2yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a - 2x}{2y} \\ \dfrac{a}{2z} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

6. (1) N_g は $\mathbf{R}^3$ の有界閉集合である。($\forall (x, y, z) \in N_g$ $\|(x, y, z)\| \leq 2$ であるから有界、また g は $\mathbf{R}^3$ 上の連続関数であるから、$N_g = \{(x, y, z); g(x, y, z) = 0\}$ は閉集合である)。f は N_g 上で連続であるから、最大値、最小値を持つ。(2) $\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2y}{3} \\ \frac{z}{2} \end{pmatrix}$ であるから、$\nabla g(x, y, z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$ で、$(0, 0, 0) \notin N_g$ だから、N_g 上で $\nabla g(x, y, z) \neq \mathbf{0}$.
(3) (1) より最大値、最小値が存在するが、それぞれ極大値、極小値である。(2) より極値点 $(x, y, z) \in N_g$ では、

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ \frac{2y}{3} \\ \frac{z}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\lambda \\ 3/(2\lambda) \\ 2/\lambda \end{pmatrix}.$$

$g(x, y, z) = 0$ より、$(x, y, z) = \pm\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)$.

$$f\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) = 3, \quad f\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right) = -3.$$

ゆえに最大値は $f\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) = 3$, 最小値は $f\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right) = -3$. $\blacksquare$

5.2 2009 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 追試験問題

(2009 年 8 月 3 日施行)

1. (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べよ。(2) $A := (1, 2) \times (3, 4)$ とおくとき以下の問に答えよ。(a) A を図示せよ。(b) A が $\mathbf{R}^2$ の開集合であることを証明せよ。

2. $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$ で定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) f は $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^∞ 級であることを示せ。

(2) f は $(0,0)$ で以下の各条件を満たすかどうか調べよ。
(a) 連続, (b) x, y のそれぞれについて偏微分可能, (c) 全微分可能

(3) f は $\mathbf{R}^2$ で C^1 級かどうか、理由をつけて答えよ。

3. $u(t,x,y,z) := t^{-3/2} \exp\left(-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)$ $(t>0,\ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3)$ とするとき、$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ が成り立つことを示せ。

4. $f(x,y) := 4x^3 - 6x^2y + 3xy^2 + 3y^3 - 27x + 3y$ について、以下の問に答えよ。

(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。
(4) f のグラフ $z = f(x,y)$ の、$(x,y) = (1,-1)$ における接平面の方程式を求めよ。

5. (1) 陰関数定理を書け。(2) $F(x,y) := y^2 - y^4 - x^2$, $N_F := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; F(x,y) = 0\}$ とおく。N_F 上の点 $P = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ の十分小さな近傍で、$F(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、P における接線の方程式を求めよ。また、N_F 上の点で、陰関数定理の仮定が満たされないもの (全部で 5 個ある) をすべて求めよ。

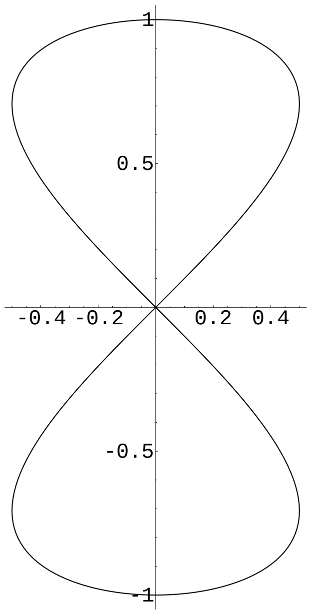


図 3: 問 5 $y^2 - y^4 - x^2 = 0$

6. $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ と $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y,z) := x^2y^2z^2$, $g(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$ で定め、$N_g := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; g(x,y,z) = 0\}$ とおく。

(1) f は N_g 上で正の最大値を取ることを示せ。

(2) Lagrange の未定乗数法を用いて、f の N_g における最大値を求めよ。

(3) 上の結果を用いて、任意の正数 a, b, c について、不等式 $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ。

1 の解答　(1) ちゃんと主語を書くこと。「$A \subset \mathbf{R}^n$ とするとき、A が開集合であるとは、$\forall a \in A,\ \exists\varepsilon > 0$ s.t. $B(a;\varepsilon) \subset A$ が成り立つことをいう。」(2) $(x,y) \in A$ に対して、$\varepsilon := \min\{x-1, 2-x, y-3, 4-y\}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ で、$B((x,y);\varepsilon) \subset A$ である。ゆえに、A は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。

2 の解答　(1) $p(x,y) := x^2+y^2$, $q(x,y) := x^3+y^3$ とおくと、$p(x,y)$, $q(x,y)$ は多項式であり、$\mathbf{R}^2$ 全体の C^∞ 級の関数を定める。$\forall(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して、$p(x,y) \neq 0$, $f(x,y) = q(x,y)/p(x,y)$ であるから、f は $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^∞ 級である。(2) (結果のみ) (a), (b) は満たすが ($f_x(0,0) = f_y(0,0) = 1$)、(c) は満たさない。(3) 全微分可能ではないので、C^1 級ではない。

3 の解答　(n 次元の場合を宿題でやった。)

$$\begin{aligned}
u_t &= \left[-\frac{3}{2}t^{-5/2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{4}t^{-7/2}\right]\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right),\\
u_x &= -\frac{x}{2}t^{-5/2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right),\\
u_{xx} &= \left[-\frac{1}{2}t^{-5/2} + \frac{x^2}{4}t^{-7/2}\right]\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right),\\
u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} &= \left[-\frac{3}{2}t^{-5/2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{4}t^{-7/2}\right]\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)
\end{aligned}$$

であるから。■

4 の解答　(1), (2) 略。(3) 停留点は $\pm(1,-1), \pm(2,1)$. $H(2,1)$ は正値なので $(2,1)$ で極小値 $f(2,1) = -34$, $H(-2,-1)$ は負値なので $(-2,-1)$ で極大値 $f(-2,-1) = 34$. $H(1,-1)$, $H(-1,1)$ は不定符号なので、f は $\pm(1,-1)$ で極値は取らない。(4) $\nabla f(1,-1) = \mathbf{0}$, $f(1,-1) = -20$ だから、$z = -20$.

5 の解答　(1) 略 (2) $F_x(x,y) = -2x$, $F_y(x,y) = 2y - 4y^3$. $F_y(\sqrt{3}/4, 1/2) = 1/2 \neq 0$ であるから、$(\sqrt{3}/4, 1/2)$ の近傍で $F(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在する。

$$\varphi'(\sqrt{3}/4) = -\frac{F_x(\sqrt{3}/4, 1/2)}{F_y(\sqrt{3}/4, 1/2)} = -\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

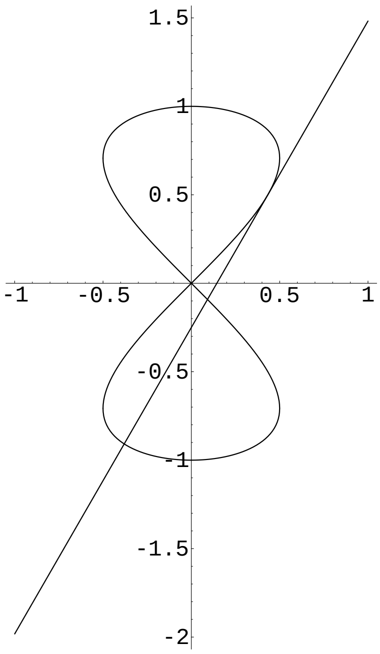
であるから、$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の方程式は

$$y = \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{2} = \sqrt{3}x - \frac{1}{4}.$$

N_F 上の点で $F_y(x,y) = 0$ を満たすものは、$2y(1-2y^2) = 0$ から、$y = 0, \pm 1/\sqrt{2}$. x は $x = \pm\sqrt{y^2 - y^4}$ から求まり、$(x,y) = (0,0), (\pm 1/2, \pm 1/\sqrt{2})$ (複号任意).

6 の解答

(1) N_g は $\mathbf{R}^3$ の閉球なので、しばしば説明しているように、$\mathbf{R}^3$ の有界閉集合である。f は N_g 上で連続なので、N_g 上で最大値を取る。f は N_g 上で正の値を取ることがあるので (例えば $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in N_g$, $f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = 1/27 > 0$)、最大値は正である。



(2) f が $(a,b,c) \in N_g$ で最大値を取ったとする。もちろん、最大値は極大値である。本試験でもやったように $\nabla g \neq \mathbf{0}$ (on N_g) であるから、極大値を与える点は Lagrange の未定乗数法で見付かる。

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(a,b,c) = \lambda \nabla g(a,b,c), \quad g(a,b,c) = 0.$$

前者から

$$a(\lambda - b^2c^2) = b(\lambda - c^2a^2) = c(\lambda - a^2b^2).$$

もしも a, b, c のいずれかが 0 であれば、$f(a,b,c) = a^2b^2c^2 = 0$ となり、$f(a,b,c) > 0$ であることに矛盾する。ゆえに $a,b,c \neq 0$. すると

$$\lambda = b^2c^2 = c^2a^2 = a^2b^2.$$

もう一度 $a,b,c \neq 0$ を用いると、$a^2 = b^2 = c^2$. $g(a,b,c) = 0$ より $a^2 = b^2 = c^2 = 1/3$. こうして

$$(a,b,c,\lambda) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{9}\right) \quad (\text{複号任意}).$$

このとき (いずれも) $f(a,b,c) = (1/3)^3 = \dfrac{1}{27}$. これが最大値に他ならない。

(3) $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$ とおくことにより、

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$$

を証明すればよい。両辺ともに 2 次同次である (x,y,z を λ (> 0) 倍すると、値が λ^2 倍になる) から、条件 $x^2+y^2+z^2 = 1$ が成り立っているときに示せば十分である。すなわち

$$\frac{1}{3} \geq (x^2y^2z^2)^{1/3} \quad (x^2+y^2+z^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$$

が証明できれば良い。(2) より

$$\frac{1}{27} \geq x^2y^2z^2 \quad (x^2+y^2+z^2 = 1)$$

が証明できているので、両辺の 3 乗根を取ればよい。■

1 についての講評　(1) 主語がない人がちらほら。こういうことのないように、答案を見に来るように言っているのだけれど…(2) $\varepsilon > 0$ であることを言わなかったり、ε 決めてから点 a を持ち出して $B(a;\varepsilon) \subset A$ としたり (どちらもおかしい)。

2 についての講評　相変わらず出来が悪い。(1) は、有理関数であること、分母が 0 にならないことの 2 点を指摘する。(2)

(a) $|f(x,y) - f(0,0)| \le \cdots$ とすべきを絶対値のない $f(x,y) - f(0,0) \le \cdots$ としたり (それでは挟み撃ちにならない！)。

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \le \frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$$

としたり (成り立たない！例えば $x^3 \le x^4$ ではないですよ !!)、

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le |x+y|$$

としたり (これも成り立たない — $(x,y) = (\varepsilon, -\varepsilon)$ を考えてみよう)。

(b) 偏微分は一番簡単なはずだが…定義に基づき偏微分係数を真面目に計算するだけのことなのに…

(c) 多分、全微分可能性の証明が一番難しい。なぜ

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

を言えば良いのか理解しているだろうか (全微分可能性の定義から出て来る)。この式の形を暗記しようとして失敗した人が少なくない。

4 についての講評　(3) 接平面が求まらなかった人が多くて、参りました (高校の微積分のテストで接線が求められない人をどう思いますか？)。「$f'(a) = 0$ を満たす a における接線は水平で、方程式は $y = f(a)$ 」というのは明らかであるが、この高次元化「$f'(a,b) = 0$ を満たす (a,b) における接平面は水平で、方程式は $z = f(a,b)$ 」. 授業では、接平面の公式を言うだけでなく、極値を取る場合の接平面は z 軸に水平だ、と言ってあります。

5 についての講評　(1) やはり期末試験答案を見に出頭しなかった人の出来はイマイチである。同じ間違いを繰り返す人が多い。何年も同じ間違いをして、直らないという人がいる。この手の問題は、授業中に出題して添削して返却しているのだけれど、あまり効果ないみたいで…(無力感がある)。

6　2008 年度

6.1　2008 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 試験問題

(2008 年 7 月 28 日施行)
次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。6 は 6A, 6B のうちから一問を選択して解答せよ。

1　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例 (ただし空集合、全空間以外のもの) をあげよ。(3) (2) であげた集合が開集合であることを、(1) の定義に基づき確かめよ。

2 $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ について、(a) f は連続, (b) f は各変数につき偏微分可能, (c) f は C^1 級, (d) f は全微分可能, という4つの条件を考える。
(1) (c) と (d) の定義を述べよ。(2) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を次式で定めるとき、f が条件 (a)〜(d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3+x^2+xy^2+xy+y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 1 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}). \end{cases}$$

3 2次元の極座標変換を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) C^2 級の関数 $f = f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta) := f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r}g_r + \dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$.

4 $f(x,y) := 2x^3 + xy + 4x^2 + y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の (x,y) における Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。 (4) (3) で求めた極値は、最大値でも最小値でもないことを示せ。

5 (1) 陰関数定理を書け。(2) 正定数 a が与えられたとき、$F(x,y) := x^3 + y^3 - 3axy$, $N_F := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; F(x,y) = 0\}$ とおく。(a) N_F 上の点 $\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$ の十分小さな開近傍において、$F(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、$\varphi'\left(\dfrac{3a}{2}\right)$ を求めよ。(b) $(0,0)$ において陰関数が存在するか論ぜよ。

6A $f(x,y) := x^2 + y^2$, $g(x,y) := x^2 - 6xy + y^2 + 2$, $N_g := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; g(x,y) = 0\}$ とする。
(1) N_g 上で f が (x_0, y_0) で極値を取るとはどういうことか、説明せよ。
(2) N_g 上で $\nabla g \neq 0$ であることを示せ。(3) Lagrange の未定乗数法により、N_g 上での f の極値の候補点を求めよ。(4) (3) で求めた極値の候補が最小値であることを証明せよ。

6B 正数 s が与えられたとき、周の長さが $2s$ である三角形のうちで面積最大のものが何か、計算で調べることを考える。面積を表す関数の極値問題を定式化して、その極値を求めよ。その極値が最大値であることを証明せよ。

注 **5** と **6A** を解答するのに参考となる図を裏面につける。

2008 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 試験問題 解答

1. (1) $A \subset \mathbf{R}^n$ とするとき、A が開集合であるとは、

$$\forall a \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(a;\varepsilon) \subset A$$

が成り立つことをいう。ここで $B(a;\varepsilon) := \{x \in \mathbf{R}^n; \|x - a\| < \varepsilon\}$.
(2) $A := (0,\infty) \times (0,\infty)$ とすると、A は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。(3) $\forall (a,b) \in A$ に対して、$\varepsilon := \min\{a,b\}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$B((a,b);\varepsilon) \subset A$ が成り立つ。実際、$(x,y) \in B((a,b);\varepsilon)$ とすると、定義から、$(x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2$ であるので、$(x-a)^2 < \varepsilon^2$ かつ $(y-b)^2 < \varepsilon^2$. これから $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ かつ $-\varepsilon < y - b < \varepsilon$. $\varepsilon \leq a$ かつ $\varepsilon \leq b$ であることに注意すると、$x > a - \varepsilon \geq a - a = 0$ かつ $y > b - \varepsilon \geq b - b$. ゆえに $x > 0$ かつ $y > 0$. これは $(x,y) \in A$ であることを意味する。 ■

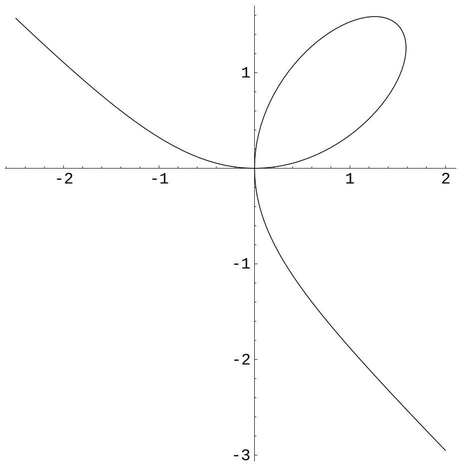


図 4: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a = 1$ の場合)

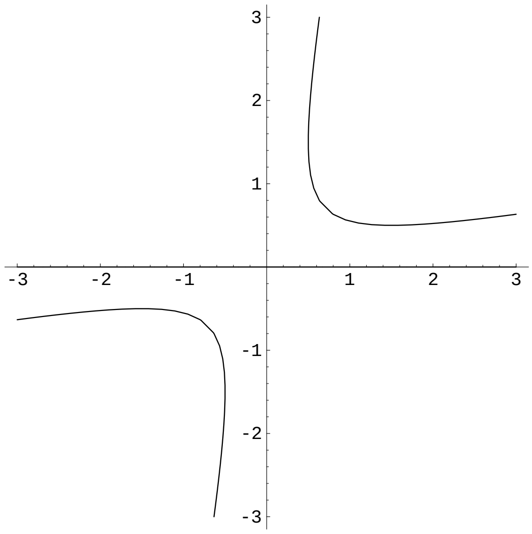


図 5: $x^2 - 6xy + y^2 + 2 = 0$

2.

(1) f が C^1 級であるとは、f が Ω 上連続かつ、任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ と任意の $a \in \Omega$ に対して、$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$ が存在して (e_i は第 i 成分が 1 で、他のすべての成分が 0 であるような $\mathbf{R}^n$ の元)、写像 $\Omega \ni x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \in \mathbf{R}$ が連続であることをいう。f が全微分可能であるとは、$\forall a \in \Omega$ に対して、$A \in M(1, n; \mathbf{R})$ が存在して、$\lim_{h\to 0} \dfrac{|f(a+h) - f(a) - Ah|}{\|h\|} = 0$ が成り立つことをいう。

(2) f は $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ において有理関数に一致するので、その範囲では C^∞ 級であるので、明らかに (a), (b), (c), (d) は成立する。$(0,0)$ でどうなるかを調べる。

(a) f は $(0,0)$ では連続でない。なぜならば

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{x^3 + x^2 + xy^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{x^3 + xy^2 + xy}{x^2 + y^2} = x + \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

であり、これは $(x,y) \to (0,0)$ のとき 0 に収束しないからである。それを確めるためには、例えば $y = kx$ に沿っての極限を調べればよい。

$$f(x,kx) - f(0,0) = x + \frac{x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = x + \frac{k}{1+k^2} \to \frac{k}{1+k^2} \quad (x \to 0)$$

であり、k の値によっては 0 にならないので (あるいは、k によって異なる値となるので極限が存在しない、と言っても良い)、$f(x,y) - f(0,0)$ の極限は 0 でない。

(b) f は $(0,0)$ では、x についても、y についても偏微分可能である。なぜならば

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^3 + h^2 + h\cdot 0^2 + h \cdot 0 + 0^2}{h^2 + 0^2} - 1\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left((h+1) - 1\right) = \lim_{h\to 0} 1 = 1, \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{0^3 + 0^2 + 0\cdot h^2 + 0\cdot h + h^2}{0^2 + h^2} - 1\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(1-1) = \lim_{h\to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

(c) f は C^1 級ではない。もし C^1 級ならば、(定義によって) 特に連続であるが、上で示したように、f は $(0,0)$ で連続でないからである。

(d) f は全微分可能ではない。もし全微分可能ならば、連続であるが、上で示したように、f は $(0,0)$ で連続でないからである。■

3.

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ であるから、

$$x_r = \cos\theta, \quad x_\theta = -r\sin\theta, \quad y_r = \sin\theta, \quad x_\theta = r\cos\theta.$$

(2) $\det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = r$ であるから、$r \neq 0$ のとき、逆写像が微分可能であることが分かる。

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

であるから、

$$r_x = \cos\theta, \quad r_y = \sin\theta, \quad \theta_x = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \theta_y = \frac{\cos\theta}{r}.$$

(3) (省略する。講義ノートの **C.3.2** (2008 年 7 月 27 日現在, pp.137–139) に書いてある。) ■

4. (1), (2), (3) $f(x,y) = 2x^3 + xy + 4x^2 + y^2$ より、

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x^2 + y + 8x \\ x + 2y \end{pmatrix}, \quad H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 6x^2 + y + 8x = 0 \quad \wedge \quad x + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2y \quad \wedge \quad 6(-2y)^2 + y + 8(-2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (y = 0 \quad \vee \quad y = \frac{5}{8}) \quad \wedge \quad x = -2y \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0), (-\frac{5}{4}, \frac{5}{8}). \end{aligned}$$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は、$\lambda^2 - 10\lambda + 15$. 固有値は $5 \pm \sqrt{5^2 - 1\cdot 15} = 5 \pm \sqrt{10}$ で、これは両方とも正なので、$H(0,0)$ は正値である。ゆえに f は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0) = 0$ を取る。

$H\left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{8}\right) = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式は、$\lambda^2 + 5\lambda - 15 = 0$. 固有値は $\lambda = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4\cdot 1\cdot 15}}{2} = \dfrac{-5 \pm 4\sqrt{5}}{2}$ で、これは正負両方あるので、$H\left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{8}\right)$ は不定符号である。ゆえに f は $\left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{8}\right)$ で極値を取らない。

(4) $f(x,0) = x^3 + x^2$ は、いくらでも大きな値、いくらでも小さな値を取ることは明らかである ($\lim_{x\to\infty}(x^3 + x^2) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + x^2) = -\infty$ であるから)。ゆえに f は最大値、最小値を持たない。■

5 (1) (省略する) (2) F は2変数の多項式関数であるから、$\mathbf{R}^2$ 全体で C^∞ である。

$$F\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)=\left(\frac{3a}{2}\right)^3+\left(\frac{3a}{2}\right)^3-3a\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3a}{2}=\left(\frac{27}{8}+\frac{27}{8}-\frac{27}{4}\right)a^3=0.$$

$$F_y(x,y)=3y^2-3ax,\quad F_y\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)=3\left(\frac{3a}{2}\right)^2-3a\frac{3a}{2}=\frac{9a^2}{4}\neq 0.$$

であるから、$\dfrac{3a}{2}$ の十分小さな開近傍 U と V が存在して、$U\times V$ で $F(x,y)=0$ は $y=\varphi(x)$ と解けて、$\varphi\colon U\to V$ は C^1 級となる。$F(x,\varphi(x))=0$ より、$F_x(x,\varphi(x))+F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$ となるので、$\varphi'(x)=-\dfrac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$. $F_x(x,y)=3x^2-3ay$, $F_x\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{3a}{2}\right)=\dfrac{9a^2}{4}$ であるから、

$$\varphi'\left(\frac{3a}{2}\right)=-\frac{F_x\left(3a/2,3a/2\right)}{F_y\left(3a/2,3a/2\right)}=-\frac{9a^2/4}{9a^2/4}=-1.$$

(3) グラフを見ると、原点のどんなに小さな開近傍を取っても、1つの x に対して、$F(x,y)=0$ を満たす y が3個存在したり、1つの y に対して、$F(x,y)=0$ を満たす x が3個存在したりする (そもそも原点で2本の曲線が交差している)。ゆえに陰関数は存在しない。$F_x(0,0)=F_y(0,0)=0$ であるから、陰関数定理とは矛盾しない (つまり陰関数定理の仮定の条件が成立しない)。■

6A $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}f_x\\f_y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix}g_x\\g_y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x-3y\\y-3x\end{pmatrix}$.

(1) $\exists\varepsilon>0$ s.t. f は $N_g\cap B((x_0,y_0);\varepsilon)$ 内の最大値または最小値を (x_0,y_0) で取る。粗く言うと、「(x_0,y_0) の十分小さな近傍と N_g の共通部分で、$f(x_0,y_0)$ が最大値または最小値となること。」

(2) $\nabla g(x,y)=0$ とすると、$(x,y)=(0,0)$ が導かれ、一方 $g(0,0)=2\neq 0$ であるから $(0,0)\notin N_g$. ゆえに $\nabla g(x,y)\neq 0$ on N_g.

(3) (2) で示したことから、条件 $g(x,y)=0$ の下での条件付き極値は、Lagrange の未定乗数法で求まる。すなわち、(x,y) で極値を取ったとすると、$\exists\lambda\in\mathbf{R}$ s.t.

(☆) $$\nabla f(x,y)=\lambda g(x,y),\quad g(x,y)=0.$$

前者から $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x-3y\\y-3x\end{pmatrix}$. これから[3] $\begin{pmatrix}1-\lambda & 3\lambda\\ 3\lambda & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. 係数行列が逆行列を持つと $(x,y)=(0,0)$ となり、これは不適 ($g(x,y)=0$ を満たさない)。逆行列を持たないためには、$(\lambda-1)^2-(3\lambda)^2=0$ が必要十分で、これから $(4\lambda-1)(2\lambda+1)=0$. すなわち $\lambda=\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{2}$.

(i) $\lambda=1/4$ のとき、$\nabla f(x,y)=\lambda g(x,y)$ は $x+y=0$ と同値で、これと $g(x,y)=0$ を連立させると実数解なし。

[3] $\dfrac{1}{\lambda}$ が行列 $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ の固有値で、(x,y) が固有ベクトル、ということに気が付いて線型代数に持ち込んでもよい。

(ii) $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ のとき、$\nabla f(x,y)=\lambda g(x,y)$ は $x=y$ と同値で、これと $g(x,y)=0$ を連立させると、 $x=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. ゆえに $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. いずれも f の値は 1. このままでは、極値の候補点のままで、実際に極値であることを示すのはもう一仕事必要ですね。次の (4) までやれば OK ですが。そういう意味で、(3) と (4) を分けたのは、失敗でした。

(4) $B:=\{(x,y);x^2+y^2\le 2^2\}$ (原点中心半径 2 の閉円盤) とおく。$B\cap N_g$ は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合である。ゆえに f が $B\cap N_g$ で最小値を持つ。それは明らかに 4 以下である。$(\mathbf{R}^2\setminus B)\cap N_g$ 上の任意の点において、f は 4 より大きいので、$B\cap N_g$ における最小値は、N_g における最小値となる。特に f は N_g 上で最小値を持つことが分かった。最小値は極値であるが、上で示したように、極値は $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$, $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=1$ しかない。ゆえにこれらが最小値である。 ■

6B 先に答を言うと、正三角形が解である (直観的に分かる人がいるであろう)。それを証明するのは案外難しい。ここでは、それを計算で示してみよう、ということである。

三角形の 3 辺を a, b, c とすると、$a+b+c=2s$. 三角形の面積 S は、ヘロンの公式により $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. $c=2s-(a+b)$ より $s-c=a+b-s$ であるから、$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(a+b-s)}$. そこで

$$f(a,b):=S^2=s(s-a)(s-b)(a+b-s)$$

で定義される関数 f を調べる。とりあえず $\mathbf{R}^2$ 全体で考える。そこで f は C^2 級である。

$$\nabla f(a,b)=\begin{pmatrix}s(2ab+b^2-2as-3bs+2s^2)\\ s(2ab+a^2-2bs-3as+2s^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s(2a+b-2s)(b-s)\\ s(a+2b-2s)(a-s)\end{pmatrix},$$

$$H(a,b)=\begin{pmatrix}2(b-s) & 2a+2b-3s\\ 2a+2b-3s & 2(a-s)\end{pmatrix}.$$

ゆえに $\nabla f(a,b)=0$ の解は $(a,b)=(0,s),(s,0),(s,s),(2s/3,2s/3)$.

$$f(0,s)=0,\quad f(s,0)=0,\quad f(s,s)=0,\quad f(2s/3,2s/3)=\frac{s^4}{27},$$

$$H(0,s)=\begin{pmatrix}0 & -s\\ -s & -2s\end{pmatrix},\ H(s,0)=\begin{pmatrix}-2s & -s\\ -s & 0\end{pmatrix},\ H(s,s)=\begin{pmatrix}0 & s\\ s & 0\end{pmatrix},\ H(\frac{2s}{3},\frac{2s}{3})=\begin{pmatrix}-\frac{2s}{3} & -\frac{s}{3}\\ -\frac{s}{3} & -\frac{2s}{3}\end{pmatrix}.$$

行列は順に、不定符号、不定符号、不定符号、負値なので、f の極値は、$(a,b)=(2s/3,2s/3)$ のときの極大値 $s^4/27$ のみ。

3 つの実数 a, b, c が三角形の 3 辺の長さとなるための必要十分条件は、(i) 正であること, (ii) 任意の 2 数の和が残りの数より大きいこと、すなわち、

$$a>0,\ b>0,\ c>0,\ a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b.$$

$a+b+c=2s$ より導かれる $c=2s-(a+b)$ を用いて、c を消去すると

$$a>0,\ b>0,\ a+b<2s,\ a+b<s,\ s>a,\ s>b.$$

まとめると (図に描くと簡単)、三角形を与える (a,b) の範囲は $\Delta := \{(a,b); a+b>s,\ a<s,\ b<s\}$ となる (ab 平面上の、3 点 $(s,0)$, $(0,s)$, (s,s) を頂点とする三角形である)。従って、f の Δ での最大値を求めればよい。上で求めた f の 4 つの停留点は、

$$(s,0),(0,s),(s,s)\in\partial\Delta,\quad \left(\frac{2s}{3},\frac{2s}{3}\right)\in\Delta$$

を満たす (だから Hesse 行列を調べなくても、意味のある範囲での、停留点は $(2s/3,2s/3)$ ただ一つであることが分かる)。

Δ に境界 $\partial\Delta$ を合わせた閉包 $\overline{\Delta}$ は、$\mathbf{R}^2$ の有界閉集合なので、連続関数 f の $\overline{\Delta}$ における最大値が存在する。$f>0$ in Δ, $f=0$ on $\partial\Delta$ であるから、この最大値は、f の Δ における最大値である。特に f は、Δ で最大値を取ることが分かる。最大値はもちろん極値であり、その点 (a,b) は停留点、すなわち $\nabla f(a,b)=0$ が成り立つ。上で得た 4 つの停留点のうち、Δ に含まれるものは $(2s/3,2s/3)$ だけであるから、f の最大値は、$(a,b)=(2s/3,2s/3)$ のときの値 $f(2s/3,2s/3)=s^4/27$. このとき、$c=2s-(a+b)=2s/3$, すなわち $a=b=c$ となるから、三角形は正三角形である。言い換えると、三角形が 1 辺 $2s/3$ の正三角形のとき、面積は最大値 $\sqrt{s^4/27}=\sqrt{3}s^2/9$ をとる。■

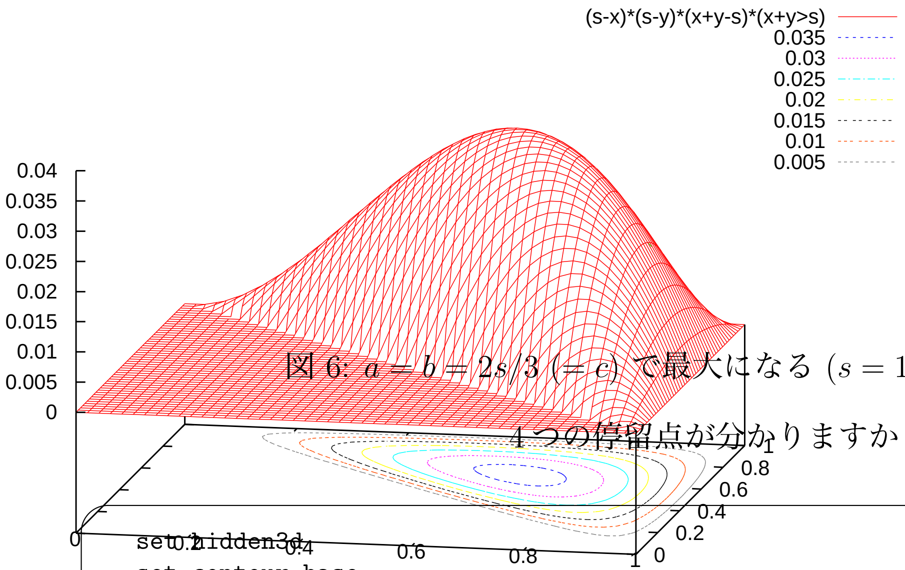


図 6: $a=b=2s/3\ (=c)$ で最大になる ($s=1$ の場合のグラフ)

4 つの停留点が分かりますか？

```
set hidden3d
set contour base
set isosamples 50,50
set cntrparam level 10
s=1
splot [0:s] [0:s] (s-x)*(s-y)*(x+y-s)*(x+y>s)
```

- **1**
  - (1) は結構良く出来ていました (過去の年度と比較をしても)。「A が開集合であるとは」のように主語もちゃんとついている人が多くて。授業で時間を使って、学生の理解度が上がる。当たり前のことだけれど、喜ばしい。

- (3) は、いわゆる ε の具体的な取り方が書いてあるかどうかで点をつけました (「(1) の定義に基づき」ですから、ε が取れることを具体的に言わないと)。結構出来ていました。それなりに時間を投入したせいかな。

- **2** うーん、猛烈に出来が悪いなあ。授業ではちゃんと説明したつもりなのだけれど、理解してもらうには、それでは不十分ということか。何かもう一工夫が必要なのか。類題を並べた練習帳でも作るのかな。

  - 「C^∞ だから C^1 でない」なんて書いた人がちらほらいたけれど、C^∞ 級ならば C^1 級ですよ (正方形は長方形だし)。C^1 級の仮定には、2 回以上微分できてはいけない、なんて書いてない。
  - C^1 級のことを「連続で 1 回微分可能」なんてのが多い (こういうミスが多いという、注意そのまんまだ。定義は真剣にマスターしないとダメです。)。sigh... (ため息)。気を取り直して繰り返すと、「1 回偏微分可能で、もとの関数とすべての 1 階偏導関数が連続」ということです。2 変数関数 $f = f(x,y)$ だったら、f_x と f_y が存在して、f と f_x と f_y が連続ということ。
  - $(0,0)$ で偏微分可能というのは、偏微分係数 $f_x(0,0)$ と $f_x(0,0)$ が存在するということなのだけれど、$f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 0$ を示して、「よって偏微分不可能」という得体のしれない答案が複数あった。なぜ ??! その反対に $f_y(0,0) = \infty$ と出しておいて (これは計算ミスでしょう)、「よって偏微分可能」と書いてあるのもありました。$= \infty$ は発散で、極限が存在したことにはなりません！
  - f が C^1 級とは、「f が全微分可能かつ f' が連続」というのがあって、これは 1 変数と誤解している可能性が高く、f' が連続とはどういう意味かも分からないのだけど (授業で多変数関数について、f' を写像として扱ったことはありません)、ウソとも言えないので、正解としておきました。
  - 「Ω で全微分可能とは、各点で全微分可能ということ」と言うのはウソではないですが、質問に答えているとは言いがたいので (1 点で全微分可能ってどういうことだ？)、1 点としました。
  - f が $(0,0)$ で連続とは、$f(x,y) \to 0$ ではなくて、$f(x,y) \to f(0,0)$, 言い換えると $|f(x,y) - f(0,0)| \to 0$ なのだけれど、$f(0,0)$ を引くことを忘れている答案がちらほら。
  - $|f(x,y) - f(0,0)|$ が 0 に収束しないことを示すのに、
    $$|f(x,y) - f(0,0)| \le \cdots \le \cdots \le \text{何か式}$$
    として、何か式 が 0 に収束しないことを証明している人がいましたが、不等式評価してから、0 に収束しないことを示しても、$|f(x,y) - f(0,0)|$ については何も分かりません。大きい奴が 0 に収束すれば、小さい方も 0 に収束するのは確かだけれど。

- **3**

  - 結構出来ている人がいました (こういうのは得意なんだな)。
  - 間違えている人も多いけれど、この問題は一度きちんと自力で解けるまで粘ってみる価値のある問題です。自分の間違いの理由を理解し、納得ができると、きっと自信がつくと思います。

  - 何でこんなことをやらされるか、今一つピンと来ない人が多いと思うけれど (何で計算するのか全く疑問を感じないというのならば、それはそれで問題だ)、ラプラシアンは超重要で、その極座標表示も超重要なのですね。数学も、必要があって生まれてくる場合が大半なのだけど、学ぶときは「順番に」やるのが普通で、何の役に立つのか見えにくい場合が多くて、時々つらくなることがあります。ラプラシアンの活躍は約1年ちょっと後の「微分方程式2」まで待って下さい (そのときにやればいいじゃないか、という意見もありそうだけれど、「微分方程式2」も忙しいし、少し面倒だからと言う理由で今それを避けるのも違うでしょう。そうそう、3次元ラプラシアンの極座標表示というのがあって、それははるかに面倒です。それから n 次元ラプラシアンの…切実に必要だからやる人がいるのですね。)。

- **4**
  - 計算ミス自身はしかたがないが、Hesse 行列が非対称になったりしたら「おかしい」と気付いて欲しい。
  - (3) で方程式解けない人がいるけれど…こういう連立代数方程式は、僕自身は高校数学の問題集でそれなりに練習した覚えがあるのだけど、今はやらないのかな。今回のは素直に未知数を消去するだけなのに。練習問題をあげておいたわけで、不得意の自覚がある人は自習しておいてね。ロジックが狂っている人が少しいました。そのせいで解が 1 つになったり、4 つになったり。
  - 固有値を計算して、その符号が分からない人もいる。うーん。$\sqrt{}$ くらい近似値求めることができて欲しいし、2 乗して比較することだって出来るわけでしょう ($5 > \sqrt{10}$ の証明は簡単ですよね — $5^2 > 10$ なのだから)。
  - 行列式の値を計算して正値とか、負値とかやっている人がいます。どうも勘違いしている人が多いようです。固有値がすべて正であるのが正値、固有値がすべて負であるのが負値、固有値に正のもの負のものがあるのが不定符号です。1 つの行列式の値だけで判定できるのは不定符号かどうかだけです (それも 2 次元の特殊性を使っています。例えば 3 次元で、固有値に正のものが 1 つ、負のものが 2 つある場合、不定符号ですが、行列式の値は 3 数の積で正です。)。
  - (4) のような問題は初めて出すので (授業中に問として出したことはある)、出来ないかな、と思ったのだけれど、出来た人が結構いました。僕の解答例よりも良い答があって、ちょっと嬉しい。

- **5**
  - (1) について。完璧な記憶は難しいので、丸暗記を目指して失敗した人は多いです。定理なのに、仮定と結論の境目がなかったり (仮定だけの定理なんてないでしょう？)。耳にタコかもしれないけれど、結局は内容を理解するよう努力するのが近道です。これだけは外せない骨格だというのも授業で説明したはずで、

$$\det F_y(a,b) \neq 0 \quad (\text{その他細かい条件}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} F(x,y)=0 \text{ は } y=\varphi(x) \text{ と解ける} \\ (\text{あるいは } F(x,y)=0 \text{ の陰関数 } y=\varphi(x) \text{ が存} \end{array}$$

    というものですね。この骨格がなかったり、曲がっていたりするのはダメです。存在定理だからそれが分かるように書くのが重要です (最初から φ があるように書いている人がいて、それは一瞬で×)。F_y でなくて、F_x とした人もちらほら。でも、それでは導関数の公式

$$\varphi'(x) = -\left(F_y(x,\varphi(x))\right)^{-1} F_x(x,\varphi(x))$$

で、F_y の逆行列を取っていることと合わないでしょう。理解すると、色々なことが芋づる式につながって、長いように見える定理も決して長くないのです。「定義を書け」、「定理を書け」、と出題するのは暗記を奨励しているようで、実は正反対のこと「早く暗記から脱却しなさい」を要求しているのです。

– (2) について。チェックすべき仮定の中で一番重要なものは (実際に計算してみないと分からないものは)、$F_y(3a/2, 3a/2) \neq 0$ でしょうか。他のことが書いてあっても、これが書いてなければダメだし、逆にこれだけ書いてあれば点があげられます。F_x と間違えたりするのは論外です。

– (3) はおまけの問題だけれど、出来ていないですね。ここで尋ねているのは、陰関数が存在するかどうかであって、陰関数定理の仮定が成立しているかどうかではありません。定理の仮定が成り立たないわけですが、だからといって結論が成り立たないとは断定できません ($P \Longrightarrow Q$ が真であっても、$\neg P \Longrightarrow \neg Q$ が真でないとは限りません)。単に定理の守備範囲外というだけです。グラフを見て、交差しているからダメだ、と気付いて欲しい。陰関数定理の最初にお話があるわけですが、それを理解しているか、です。この曲線は、**デカルトの葉線** (Folium of Descartes) という由緒正しいものですが、来年度は時間をかけて解説しよう、と思っています。

– **6A** は、(1) 5 点, (2) 5 点, (3) 10 点, (4) はおまけ
最後に問題をいじって (3) と (4) をわけて、失敗しました (厳密に言うと (3) が難しくなってしまった)。

– 答案用紙の束の最初の紙で (1) が正答だったが、その後、×が続く⋯。どうも 1. 計算の仕方を覚える, 2. 定理を覚えて理解する, 3. 定義を覚えて理解する, のような優先順位でものを考えているのではないか？と疑われますが、そうだとしたら、それは多分高校生流の考え方からまだ脱却できていないのでしょう。その順番を逆転して下さい。この **6A** は、(1) が解答できなければ、後の計算が出来たとしても、自分が何をやったのかきちんと理解出来ないわけで、とても馬鹿馬鹿しい。

– (4) で N_g が有界閉集合と書いて議論した人が一人だけいた。N_g は閉集合ではある ($\mathbf{R}^n$ 上の連続関数の零点集合だから) けれど、有界ではない (図を見れば想像できる — 何せ双曲線だから)。だから間違いなのだけれど、最大値の存在を示して、その後どう議論するかは理解していたので、半分点をあげました。

ラプラシアンの極座標表示

$$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta} \tag{1}$$

の証明を講義ノートから抜粋。

方法 1　右辺を計算していって左辺に等しいことを示す、という方針で計算してみよう。まず $g_r = f_x x_r + f_y y_r$ より

$$\begin{aligned}
g_r &= f_x \cos\theta + f_y \sin\theta, \\
g_{rr} &= \frac{\partial}{\partial r} g_r = \frac{\partial}{\partial r}(f_x x_r + f_y y_r) = \frac{\partial}{\partial r} f_x \cdot x_r + f_x \frac{\partial}{\partial r} x_r + \frac{\partial}{\partial r} f_y \cdot y_r + f_y \frac{\partial}{\partial r} y_r \\
&= (f_{xx} x_r + f_{xy} y_r) x_r + f_x x_{rr} + (f_{yx} x_r + f_{yy} y_r) y_r + f_y y_{rr} \\
&= f_{xx} (x_r)^2 + (f_{xy} + f_{yx}) x_r y_r + f_{yy} (y_r)^2 + f_x x_{rr} + f_y y_{rr}.
\end{aligned}$$

$x_r = \cos\theta$, $y_r = \sin\theta$ より $x_{rr} = y_{rr} = 0$ が導かれること、また f が C^2 級であれば $f_{xy} = f_{yx}$ であることに注意すると、

$$g_{rr} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta.$$

次に $g_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta$ より

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta} g_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}(f_x x_\theta + f_y y_\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f_x \cdot x_\theta + f_x \frac{\partial}{\partial\theta} x_\theta + \frac{\partial}{\partial\theta} f_y \cdot y_\theta + f_y \frac{\partial}{\partial\theta} y_\theta \\ &= (f_{xx}x_\theta + f_{xy}y_\theta)x_\theta + f_x x_{\theta\theta} + (f_{yx}x_\theta + f_{yy}y_\theta)y_\theta + f_y y_{\theta\theta} \\ &= f_{xx}(x_\theta)^2 + (f_{xy} + f_{yx})x_\theta y_\theta + f_{yy}(y_\theta)^2 + f_x x_{\theta\theta} + f_y y_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

$x_\theta = -r\sin\theta$, $y_\theta = r\cos\theta$ より

$$x_{\theta\theta} = -r\cos\theta, \quad y_{\theta\theta} = -r\sin\theta$$

が導かれること、また f が C^2 級であれば $f_{xy} = f_{yx}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= f_{xx}(-r\sin\theta)^2 + 2f_{xy}(-r\sin\theta \cdot r\cos\theta) + f_{yy}(r\cos\theta)^2 + f_x(-r\cos\theta) + f_y(-r\sin\theta) \\ &= f_{xx}r^2\sin^2\theta - 2f_{xy}r^2\sin\theta\cos\theta + f_{yy}r^2\cos^2\theta - (f_x r\cos\theta + f_y r\sin\theta) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta} &= f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta + \frac{1}{r}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \\ &\quad + \frac{1}{r^2}\left[f_{xx}r^2\sin^2\theta - 2f_{xy}r^2\sin\theta\cos\theta + f_{yy}r^2\cos^2\theta - (f_x r\cos\theta + f_y r\sin\theta)\right] \\ &= f_{xx}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + f_{yy}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = f_{xx} + f_{yy}. \end{aligned}$$

方法 2　(1) の右辺を計算する。方法 1 と同様に計算すると、

$$\begin{aligned} f_{xx} &= g_{rr}(r_x)^2 + (g_{r\theta} + g_{\theta r})r_x\theta_x + g_{\theta\theta}(\theta_x)^2 + g_r r_{xx} + g_\theta\theta_{xx}, \\ f_{yy} &= g_{rr}(r_y)^2 + (g_{r\theta} + g_{\theta r})r_y\theta_y + g_{\theta\theta}(\theta_y)^2 + g_r r_{yy} + g_\theta\theta_{yy} \end{aligned}$$

となる。r_{xx}, θ_{xx}, r_{yy}, θ_{yy} は何か？

$$r_x = \cos\theta, \quad r_y = \sin\theta, \quad \theta_x = \frac{-\sin\theta}{r}, \quad \theta_y = \frac{\cos\theta}{r}$$

から一目で計算というわけには行かない。また合成関数の微分法を使って

$$\begin{aligned} r_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} r_x = \frac{\partial}{\partial x}\cos\theta = \frac{\partial}{\partial r}\cos\theta \cdot r_x + \frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta \cdot \theta_x \\ &= 0 + (-\sin\theta)\frac{-\sin\theta}{r} = \frac{\sin^2\theta}{r}, \\ r_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} r_y = \frac{\partial}{\partial y}\sin\theta = \frac{\partial}{\partial r}\sin\theta \cdot r_y + \frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta \cdot \theta_y \\ &= 0 + (\cos\theta)\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\cos^2\theta}{r}, \\ \theta_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\theta_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-\sin\theta}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{-\sin\theta}{r} \cdot r_x + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{-\sin\theta}{r} \cdot \theta_x \\ &= \frac{\sin\theta}{r^2}\cos\theta + \frac{-\cos\theta}{r} \cdot \frac{-\sin\theta}{r} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}, \\ \theta_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\theta_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\cos\theta}{r} \cdot r_y + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r} \cdot \theta_y \\ &= \frac{-\cos\theta}{r^2}\sin\theta + \frac{-\sin\theta}{r} \cdot \frac{\cos\theta}{r} = \frac{-2\sin\theta\cos\theta}{r^2}. \end{aligned}$$

これから

$$(r_x)^2+(r_y)^2=1,\quad r_x\theta_x+r_y\theta_y=0,\quad (\theta_x)^2+(\theta_y)^2=\frac{1}{r^2},\quad r_{xx}+r_{yy}=\frac{1}{r},\quad \theta_{xx}+\theta_{yy}=0$$

であるから、

$$\begin{aligned}
f_{xx}+f_{yy}&=g_{rr}[(r_x)^2+(r_y)^2]+(g_{r\theta}+g_{\theta r})(r_x\theta_x+r_y\theta_y)+g_{\theta\theta}[(\theta_x)^2+(\theta_y)^2]\\
&\quad+g_r(r_{xx}+r_{yy})+g_\theta(\theta_{xx}+\theta_{yy})\\
&=g_{rr}\cdot 1+(g_{r\theta}+g_{\theta r})0+g_{\theta\theta}\frac{1}{r^2}+g_r\frac{1}{r}+g_\theta\cdot 0\\
&=g_{rr}+\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}.
\end{aligned}$$

(これは大変、ということで少しだけ工夫したのが次の方法である。)

方法 3　やはり (1) の右辺を変形していく。以下説明する方法は本質的には方法 2 と同じであるが、こちらの方が間違いにくいと思われる。

既に見た

$$f_x=g_r\cos\theta-\frac{g_\theta\sin\theta}{r},\quad f_y=g_r\sin\theta+\frac{g_\theta\cos\theta}{r}$$

という公式から、関数の x, y に関する偏微分を r, θ に関する偏微分で表現する公式

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

を得る。これを使って、

$$\begin{aligned}
f_{xx}&=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 g=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta g_r-\frac{\sin\theta}{r}g_\theta\right)\\
&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta g_r-\frac{\sin\theta}{r}g_\theta\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta g_r-\frac{\sin\theta}{r}g_\theta\right)\\
&=\cos\theta\left(\cos\theta g_{rr}+\frac{\sin\theta}{r^2}g_\theta-\frac{\sin\theta}{r}g_{\theta r}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta g_r+\cos\theta g_{r\theta}-\frac{\cos\theta}{r}g_\theta-\frac{\sin\theta}{r}g_{\theta\theta}\right)\\
&=g_{rr}\cos^2\theta-\frac{(g_{r\theta}+g_{\theta r})\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{g_{\theta\theta}\sin^2\theta}{r^2}+\frac{g_r\sin^2\theta}{r}+\frac{2g_\theta\sin\theta\cos\theta}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{yy}&=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 g=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta g_r+\frac{\cos\theta}{r}g_\theta\right)\\
&=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta g_r+\frac{\cos\theta}{r}g_\theta\right)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta g_r+\frac{\cos\theta}{r}g_\theta\right)\\
&=\sin\theta\left(\sin\theta g_{rr}-\frac{\cos\theta}{r^2}g_\theta+\frac{\cos\theta}{r}g_{\theta r}\right)+\frac{\cos\theta}{r}\left(\cos\theta g_r+\sin\theta g_{r\theta}-\frac{\sin\theta}{r}g_\theta+\frac{\cos\theta}{r}g_{\theta\theta}\right)\\
&=g_{rr}\sin^2\theta+\frac{(g_{r\theta}+g_{\theta r})\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{g_{\theta\theta}\cos^2\theta}{r^2}+\frac{g_r\cos^2\theta}{r}-\frac{2g_\theta\sin\theta\cos\theta}{r^2}.
\end{aligned}$$

(式は長いけれど、途中で迷うところがないと思われる。こういうのが「工夫」であろう。)

ゆえに

$$f_{xx}+f_{yy}=g_{rr}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+g_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r^2}+g_r\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{r}=g_{rr}+\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}.$$

7　2002年度

7.1　2002年度 解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題

(2002年7月29日施行)

次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。6 は 6A, 6B, 6C のうちから一問を選択して解答せよ。

1　(1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(3) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を記せ。(4) 次の A_1, A_2 の各々につき、簡単に図示し、それが有界集合かどうか、開集合かどうか、閉集合かどうか、調べよ。$A_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2/4 - y^2/9 < 1\}$, $A_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^4 + y^4 = 1\}$.

2　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω から $\mathbf{R}^m$ への関数について、次の 4 つの条件の関係を説明せよ。(a) Ω で連続, (b) Ω で各変数でつき偏微分可能, (c) Ω で C^1 級, (d) Ω で全微分可能.
(2) $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を次式で定義するとき、f が条件 (a)〜(d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & ((x,y,z) \neq (0,0,0)) \\ 0 & ((x,y,z) = (0,0,0)). \end{cases}$$

3　c を正定数、$F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を C^2 級の関数とするとき、$u\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ を

$$u(x,y,z,t) = \frac{F(r-ct)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

で定義すると、u は $\mathbf{R}^4$ 全体で次式を満たすことを示せ。

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right).$$

4　$f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ の極値を求めよ。

5　点 (x,y,z) が方程式 $\dfrac{(x-1)^2}{1} + \dfrac{(y-2)^2}{4} + \dfrac{(z-3)^2}{9} = 1$ で表わされる $\mathbf{R}^3$ の部分集合 E の上を動くときの、関数 $f(x,y,z) = x+y+z$ の値について考える。
(1) f は E で最大値、最小値を持つことを示せ。(2) f の E における最大値、最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ。(3) f が (x_0, y_0, z_0) で最大値 k を取るとき、方程式 $x+y+z=k$ で表わされる集合と E はどういう関係にあるか。

6A　平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta) = f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r + \dfrac{1}{r^2} g_{\theta\theta}$.

6B　地球の表面上にある 2 点の緯度経度が分かっているときに、その 2 点間の (表面に沿っての) 道のりの求め方を説明せよ。(ただし地球は球であると考える。)

6C　Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$, $g\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ をともに C^1 級の関数とする。$F\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を $F(x) = (f(x), g(x))$ (内積) で定義するとき、$F'(x)$ を求めよ。

2002 年度 解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題 解説

1 (1)〜(3) について主語がないものは減点 (講義ノートの「期末試験の採点から」を見よ)。

(1) $A \subset \mathbf{R}^n$ が有界であるとは、

$$\exists R \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A \quad \|x\| \le R$$

が成り立つことをいう。

(2) $A \subset \mathbf{R}^n$ が開集合であるとは、

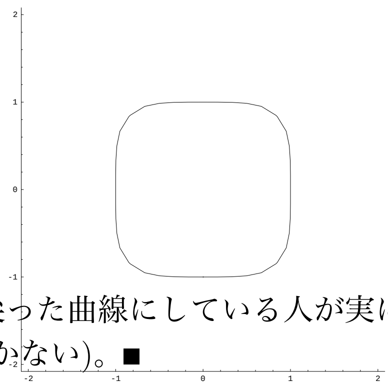
$$\forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(a; \varepsilon) \subset A$$

が成り立つことをいう。

(3) $A \subset \mathbf{R}^n$ が閉集合であるとは、A の補集合 $\mathbf{R}^n \setminus A$ が開集合であることをいう。

(4) A_1 は双曲線 $x^2/4 - y^2/9 = 1$ (2 本の曲線) ではさまれる (言い換えると、原点を含む) 領域 (境界含まず) で、有界ではなく、開集合であり、閉集合ではない。(境界が 2 直線 $x/2 \pm y/3 = 0$ を漸近線とする双曲線であることは良いとして、原点を含まない 2 つの領域と間違えた人が結構いた。$(x, y) = (0, 0)$ を代入して符号を調べれば簡単に分かると思うのだが…)

A_2 は単位円の 4 角を出っ張らせた (正方形の 4 角を丸めたという方が分かりよい？) 感じの閉曲線で、有界であり、開集合ではなく、閉集合である。



これを $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ で尖った曲線にしている人が実に多かった [4](少し減点 — もっともこのミスをしても、後には響かない)。■

2 出来が悪く驚いている。特に (1) は

$$\begin{array}{ccccc} \text{(c) } C^1 \text{ 級} & \Longrightarrow & \text{(d) 全微分可能} & \Longrightarrow & \text{(a) 連続} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{(b) 各変数につき偏微分可能} & & \end{array}$$

というだけのことで、丸暗記するにしても負担がないはずなのに (丸暗記を推奨しているわけではない)、ひどいできだった。これが理解できていないと、この辺の理論構成がまったくわけが分からないものになっているのだろう (教師としてとても気が重い…)。

[4] $F(x, y) = x^4 + y^4 - 1$ の零点集合上、$\nabla F \neq 0$ が成り立つので、尖るはずはない。

(1) (c) ならば、(a), (b), (d) いずれも成立。(d) ならば、(a), (b) ともに成立。それ以外は成り立たない (反例がある)。

(2) f は (a), (b) を満たすが、(c), (d) を満たさない。(a), (b) を満たすこと、(d) が成り立たないことを確かめれば、(c) が成り立たないことはすぐわかる (一般に (c) $\Longrightarrow$ (d) なので)。

まず $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ において、f は分母が 0 にならない有理関数なので、C^∞ 級である。ゆえに原点でどうなるかを調べればよい。(a) について、$(x,y,z) \neq (0,0,0)$ に対して、

$$|f(x,y,z) - f(0,0,0)| = \frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2} = |x|\frac{|yz|}{x^2+y^2+z^2} \leq |x|$$

なので、$(x,y,z) \to (0,0,0)$ のとき、$f(x,y,z) \to f(0,0,0)$. ゆえに f は $(0,0,0)$ で連続。ここで、

$$x^2+y^2+z^2 \geq y^2+z^2 \geq 2\sqrt{y^2z^2} = 2|yz|$$

から

$$\frac{|yz|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

となることを用いた (これをきちんと書いてくれた人は少なかった)。あるいは、極座標を用いて、次のようにしてもよい。

$$\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{r\sin\theta\cos\phi\cdot r\sin\theta\sin\phi\cdot r\cos\theta}{(r\sin\theta\cos\phi)^2+(r\sin\theta\sin\phi)^2+(r\cos\theta)^2} = r\cos\theta\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi$$

となることから

$$|f(x,y,z)| \leq |r\cos\theta\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi| \leq r$$

ゆえに $(x,y,z) \to 0$ とするとき ($r \to 0$ なので)

$$f(x,y,z) \to 0 = f(0,0,0)$$

としても良い。f が原点で各変数について偏微分可能であることを示すのは簡単なのでここでは省略。最後に f が原点で全微分可能でないことを示そう。

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)-f(0,0,0)-f_x(0,0,0)x-f_y(0,0,0)y-f_z(0,0,0)z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$$

が成り立たないことを示すことになる。$f(0,0,0)=0$, $f_x(0,0,0)=0$, $f_y(0,0,0)=0$, $f_z(0,0,0)=0$ なので、

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0$$

が成り立つかどうか、ということである。実は左辺の極限は存在せず[5]、この式は成り立たないのだが、それを確かめるには、

$$(x,y,z) = t(1,k,\ell)$$

とおいて、$t \to 0$ としたときの極限を調べるとか (2 変数で直線 $y = kx$ にそって原点に近づけるときどうなるか調べることの真似)、極座標を使うとか、色々やり方がある。■

3 合成関数の微分法 (チェイン・ルール) を用いて計算するだけ。

[5] 分母分子がともに 3 次同次式であるから、慣れている人には明らかである。直感的に言うと、微分をするたびに、相対的に分子の次数が低くなって、性質が悪くなっていくわけ。余談だが、最初は $f(x,y,z) = (xyz)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ という関数で問題を作ろうかとも考えていた。

4

$$f'(x,y) = (f_x \quad f_y) = \begin{pmatrix} y - \dfrac{1}{x^2} & x - \dfrac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

なので、$f'(x,y)=0$ を満たす点は連立1次方程式

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad x = \frac{1}{y^2}$$

の解となる。y を消去して、$x = x^4$. これから $x(x-1)(x^2+x+1)=0$. 実数解は $x=0,1$ だが、$x=0$ は元の方程式を満たさないので $x=1$ だけが解。対応する y は $y = \dfrac{1}{1^2} = 1$. ゆえに $(x,y)=(1,1)$. f の Hesse 行列は

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{y^3} \end{pmatrix}$$

で、$(x,y)=(1,1)$ では $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. これは正定値である (固有値を求めて、1, 3 は両方とも正と言っても良いし、主座小行列式の値 $2, 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 3$ がみな正と言ってもよい)。ゆえに f は $(1,1)$ で極小となる。つまり「$(x,y)=(1,1)$ で f は極小値 3 を取る。」■

5 (この問題は図形的「直観」で、接するときが最大最小を与えると分かるので、未定乗数法を使わなくても答は出る。)

(1) E は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合であり、f は連続であるから、「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合上の実数値連続関数は最大値・最小値を持つ」という定理により、f は E 上最大値を持つことが分かる。

(2) $g(x,y,z) := \dfrac{(x-1)^2}{1} + \dfrac{(y-2)^2}{4} + \dfrac{(z-3)^2}{9} - 1$ とおくと、$\nabla g(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x-1 \\ \dfrac{y-2}{4} \\ \dfrac{z-3}{9} \end{pmatrix}$. これは E の上で 0 にならない (g が 0 になるには、$(x,y,z)=(1,2,3)$ となることが必要十分だが、この点は E に含まれない)。ゆえに E 上の f の極値は未定乗数法で求まる。(x,y,z) が極値点であるための必要十分条件は、

$$\exists\lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z), \quad g(x,y,z) = 0$$

で、最初の式から $x - 1 = \dfrac{1}{2\lambda}$, $y - 2 = \dfrac{4}{2\lambda}$, $z - 3 = \dfrac{9}{2\lambda}$ が得られ、これを 2 番目の式 $g(x,y,z)=0$ に代入すると、$2\lambda = \pm\sqrt{14}$. 極値は

$$f\left(1+\frac{1}{\sqrt{14}}, 2+\frac{4}{\sqrt{14}}, 3+\frac{9}{\sqrt{14}},\right) = 6+\sqrt{14}, \quad f\left(1-\frac{1}{\sqrt{14}}, 2-\frac{4}{\sqrt{14}}, 3-\frac{9}{\sqrt{14}},\right) = 6-\sqrt{14}.$$

最大値と最小値は (1) で存在が分かっていて、それは当然極値であり、極値はこの2つしかないので、最大値は $6+\sqrt{14}$, 最小値は $6-\sqrt{14}$.

(3) $x+y+z=k$ は (x_0,y_0,z_0) で E に接する。■

6A 再履修者向けの問題 (講義ノートの「期末試験の採点から」を見よ)。出て来た間違いも講義ノートで説明してあるものが多い。以下は余談。ヤコビ行列の定義が頭に入っていなくて、

$$r_x = \cos\theta, \quad r_y = -\frac{\sin\theta}{r}$$

なんてミスする人が出て来るが、物理的に考えると、次元がつりあっていなくて、明らかに変だよね (長さの次元のある量を長さの次元のある量で微分したら、無次元量になるはず — r_y の方が間違いだ)。

6B (誰も解いてくれなかった。この手の問題は、大昔ならば球面三角法として、講義もされたのだろうけれど、現在ではベクトルの計算で簡単にできることとして、逆にあまり説明されないのかも… 参考まで) 極座標と直交座標 (デカルト座標) の関係式を理解していれば、緯度、経度から直交座標を求める式は導けるはず (省略)。後は、地球の中心から二点 $\vec{x}, \vec{y}$ を見込む角 θ を $\cos\theta = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{\left\|\vec{x}\right\|\left\|\vec{y}\right\|}$ で算出して、道のり $= R\theta$ (R は地球の半径) とすれば良い。■

6C 結果のみ書いておくと (確認は素朴な計算なので簡単)、(A の転置を A^T で表わすことにして)

$$F'(x) = g(x)^T f'(x) + f(x)^T g'(x).\blacksquare$$

8 2001年度

8.1 2001年度 解析概論I, 解析概論演習I 試験問題

(2001年7月23日施行)
次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。

1 (1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(3) 次の $\mathbf{R}^2$ の部分集合の各々につき簡単に図示し、それが有界集合か、開集合か、それぞれ判別せよ (理由も簡単に記せ)。(i) $A_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2/4 + y^2/9 \le 1\}$. (ii) $A_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}$.

2 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & ((x,y) \ne (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ (ヒント: 場合分けが必要である)。(2) ∇f は原点で連続であるかどうか調べよ。(3) f は原点で全微分可能かどうか調べよ。

3 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 2y^2$ で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) f のグラフ $z = f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式を求めよ。(2) $\nabla f(x,y) = 0$ となる点 (x,y) を求めよ。(3) f の点 (x,y) における Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(4) f の極値を求めよ。

4 平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) $x_r,\ x_\theta,\ y_r,\ y_\theta$ を求めよ。(b) $r_x,\ r_y,\ \theta_x,\ \theta_y$ を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x, y)$ が与えられているとき、$g(r, \theta) = f(x, y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r + \dfrac{1}{r^2} g_{\theta\theta}$.

5 C^2 級の関数 $f\colon [0, \infty) \to \mathbf{R}$ に対して、$u\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $u(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ で定義する。このとき以下の問に答えよ。
(1) $u'(x, y)$ を f を用いて表せ。(2) $\triangle u := u_{xx} + u_{yy}$ を、f を用いて表せ。(3) u が $\triangle u(x, y) = 0$ $((x, y) \neq 0)$ を満たしているとき、f を求めよ。

6 $\mathbf{R}^3$ において、曲面 $xyz = 1$ 上の点で原点に最も近いものを求めよ。

2001 年度 解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題 解答

1 (1) $A \subset \mathbf{R}^n$ が有界集合とは、$\exists R \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A \quad \|x\| \le R$ が成り立つことである。
(2) $A \subset \mathbf{R}^n$ が開集合とは、$\forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(x; \varepsilon) \subset A$ が成り立つことである。
(3) (i) 有界集合である ($\vec{x} = (x, y) \in A_1$ に対して $\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3\sqrt{x^2/9 + y^2/9} \le 3\sqrt{x^2/4 + y^2/9} \le 3 \cdot 1 = 3$)。開集合ではない ($\vec{x} = (2, 0) \in A_1$ だが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(\vec{x}; \varepsilon) \not\subset A_1$. 実際 $(2 + \varepsilon/2, 0) \in B(\vec{x}; \varepsilon)$ だが $(2 + \varepsilon/2, 0) \notin A_1$)。(ii) 有界集合ではない ($\vec{x}_n \overset{\text{def.}}{=} (\sqrt{n+1}, \sqrt{n}) \in A_n$ であるが、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|\vec{x}_n\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n+1} = \infty$)。開集合ではない ($\vec{x} \overset{\text{def.}}{=} (1, 0) \in A_2$ だが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(\vec{x}; \varepsilon) \not\subset A_2$. 実際 $(1 + \varepsilon/2, 0) \in B(\vec{x}; \varepsilon)$ だが、$(1 + \varepsilon/2, 0) \notin A_2$)。■

2 (1) $(x, y) \neq (0, 0)$ であるとき、

$$f_x(x, y) = y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{(x^2 + y^2) \cdot (2x) - (2x)(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \cdot \frac{(x^2 + y^2) \cdot (-2y) - (2y)(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

であるから

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4) \\ x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4) \end{pmatrix}.$$

一方 $(x, y) = (0, 0)$ においては、

$$f_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

より

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2)$(x, y) \to (0, 0)$ のとき $\nabla f(x, y) \to \nabla f(0, 0)$. 実際

$$|f_x(x, y) - f_x(0, 0)| \le |y| \frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} \le 2|y| \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y| \to 0 \quad ((x, y) \to (0, 0)),$$

$$|f_y(x,y)-f_y(0,0)| \le |x|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} \le 2|x|\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|x| \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0))$$

だから。ゆえに ∇f は原点で連続である。
(3) 上で調べたことから f は C^1 級であるから全微分可能である。■

3 (1) $\nabla f(x,y) = {}^t(2x-2y^2, 4y-4xy)$ であるから、接平面の公式 $z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ に代入して

$$z-(a^2-2ab^2+2b^2) = (2a-2b^2)(x-a)+(4b-4ab)(y-b).$$

整理して

$$z = 2(a-b^2)x + 4b(1-a)y - a^2 - 2b^2 + 4ab^2.$$

(2) $(0,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ の 3 点。(3) $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & 4(1-x) \end{pmatrix}$. (4) $(x,y)=(0,0)$ で極小値 0. ■

4 (講義ノート参照)

5 (1) $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと、$r_x = x/\sqrt{x^2+y^2}$, $r_y = y/\sqrt{x^2+y^2}$. $u(x,y) = f(r)$ であるから、

$$u'(x,y) = (u_x(x,y)\ u_y(x,y)) = (f'(r)r_x\ f'(r)r_y) = \frac{f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\ y).$$

(2) (実は第 4 問を使っても解ける)

$$r_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2)^{-1/2}\right) = 1\cdot(x^2+y^2)^{-1/2} + x\cdot(-1/2)(x^2+y^2)^{-3/2}(2x) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

であるから、

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)r_x\right) = f''(r)r_x\cdot r_x + f'(r)\cdot r_{xx} = f''(r)\frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(r)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

同様にして

$$u_{yy}(x,y) = f''(r)\frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(r)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

ゆえに

$$\triangle u(x,y) = f''(r)\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + f'(r)\frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = f''(r) + \frac{f'(r)}{r} = f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(3) $f''(r) + f'(r)/r = 0$ において、$g(r) = f'(r)$ とおくと、$g'(r)/g(r) = -1/r$. 積分して

$$\log|g(r)| = -\log r + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

$C = \log C'$ とおくと、C' は正の任意定数で、$\log|g(r)| = \log(C'/r)$. ゆえに $g(r) = \pm C'/r = C''/r$ (C'' は任意定数). これから $f(r) = A\log r + B$ (A, B は任意定数)。■

6 $f(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z) \overset{\text{def.}}{=} xyz-1$ とおく。講義の例と同様の考察で条件 $g(x,y,z)=0$ の下での f の最小値が存在することが示される (省略)。

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (g(x,y,z)=0 \text{ なる任意の } (x,y,z))$$

であるから、条件 $g(x,y,z)=0$ の下での f の極値は Lagrange の未定乗数法で求まる。$F(x,y,z,\lambda) \overset{\text{def.}}{=} f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$ とおくと、$\nabla F(x,y,z,\lambda)=0$ から $(x,y,z,\lambda)=(-1,-1,1,2)$, $(-1,1,-1,2)$, $(1,-1,-1,2)$, $(1,1,1,2)$. いずれの場合も $f(x,y,z)=3$ であるから、これは f の最小値である。ゆえに曲面 $g(x,y,z)=0$ 上の点と原点との距離 $(=\sqrt{f(x,y,z)})$ の最小値は $\sqrt{3}$.
■ (**別解** 3 正数についての「相加平均 $\geq$ 相乗平均」という不等式から $x^2+y^2+z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3$, 等号 $\Leftrightarrow x^2=y^2=z^2 \Leftrightarrow (x,y,z)=(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$) ■

8.2 2001 年度 解析概論 I, 解析概論演習 I 追試験問題

(2001 年 7 月 31 日施行)
次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。

1 (1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を記せ。(3) 次の $\mathbf{R}^2$ の部分集合を簡単に図示し、それが有界集合かどうか、閉集合かどうか、答えよ (理由も簡単に記せ)。
(i) $A_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; 1 < xy < 2\}$. (ii) $A_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^4+y^4=1\}$.

2 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) f は原点で連続ではないことを示せ。(2) f は原点で偏微分可能かどうか調べよ。(3) f は原点で全微分可能かどうか答えよ (理由も述べよ)。

3 $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-xy-zx-z$ で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) $f'(x,y,z)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y,z)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

4 $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x+y^2}$ で定まる関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ について、以下の問に答えよ。
(1) f の 2 階までの偏導関数をすべて求めよ。(2) Taylor の定理を用いて

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-P(x,y)|}{x^2+y^2} = 0$$

を満たす多項式 $P(x,y)$ のうちで次数最低のものを求めよ。

5 (1) 陰関数定理を記せ。
(2) $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $F(x,y) \overset{\text{def.}}{=} x^3-3xy+y^3=0$ で定義するとき、以下の問に答えよ。
- (i) $F(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) の十分近くで、$F(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在を陰関数定理で保証するための、(a,b) についての条件 (なるべく簡単なもの) を求めよ。
- (ii) (i) の条件が成り立つとき、陰関数定理で存在が保証された陰関数 φ に対して $\varphi'(x_0)=0$ となる点 x_0 を求め、$\varphi''(x_0)$ の符号を調べて、φ が極値を取るかどうか答えよ。

6　条件 $x^2+y^2-1=0$ のもとで、関数 $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ の最大値、最小値を求めよ。(**注意:** どういう手段で解いても良い。)

9　2000 年度

9.1　2000 年度解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題

(2000 年 7 月 17 日施行)

次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。A, B 二つあるものについては一方のみを選択して解答せよ。

1　(1) $\mathbf{R}^n$ の有界集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を記せ。(3) 次の各集合につき、それが有界閉集合かどうか判別せよ (理由も簡単に記せ)。(i) $A_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2\le 1\}$. (ii) $A_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2-y^2=1\}$. (iii) $A_3=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+y^2<1\}$.

2A　正定数 p に対して、$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を $f(x)=\begin{cases} |x|^p\sin\dfrac{1}{x} & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$ で定義するとき、以下の問に答えよ。(1) f は $\mathbf{R}$ で連続か？(2) f は $\mathbf{R}$ で微分可能か？(3) f は $\mathbf{R}$ で C^1 級か？

2B　次式で定義される関数 $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ について、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x} & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

(1) 原点で連続であるかどうか調べよ。 (2) 原点での偏微分係数を求めよ。(3) 原点で全微分可能であるかどうか調べよ。

3　次式で定義される関数 $U\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ が $U_t=U_{xx}$ を満たすことを示せ。

$$U(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right).$$

4　平面の極座標を考える。つまり $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f=f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta)=f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx}+f_{yy}=g_{rr}+\dfrac{1}{r}g_r+\dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$.

5　Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ を C^2 級の関数、$a\in\Omega$, $h\in\mathbf{R}^n$ とする。(1) $\|h\|$ が十分に小さければ $\{a+th; t\in(-1,1)\}\subset\Omega$ となることを示せ。(2) $\|h\|$ が (1) の条件を満たすほど十分小さい場合に、$F(t)=f(a+th)$ $(t\in(-1,1))$ とおいて $F\colon(-1,1)\to\mathbf{R}$ を定義したとき、$F'(t)$, $F''(t)$ を求めよ。(3) C^2 級の関数に対する Taylor 展開の定理を書け。

6　$\mathbf{R}^2$ を定義域とする関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ について以下の問に答えよ。(1) f のグラフ $z=f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における接平面の方程式を求めよ。 (2) $\nabla f(x,y)=0$ となる (x,y) をすべて求めよ。(3) f の極値をすべて求めよ。

2000 年度解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題 の解答？

1 (1), (2) ともに、定義の書き方がなっていない人が多かった (講義ノートの p.148 付近を見ること)。何が有界集合であるか、何が閉集合であるか、主語が曖昧なものはダメである。なお、主語が $\mathbf{R}^n$ になっている人が結構いた (ひどい勘違いであり、中間点もあげられない[6])。

(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が有界であるとは、

$$(\exists R \in \mathbf{R}) \quad (\forall x \in A) \quad \|x\| \le R$$

が成り立つことである。

目についた間違い: 「上に有界かつ下に有界」とした人が少なくなかったが、それは $\mathbf{R}$ の部分集合の場合だけしか通用しない定義である。多次元の世界では上限、下限というものはない。

(2) (少し上とは違った書き方をしてみよう) $A \subset \mathbf{R}^n$ について、

$$A \text{ が閉集合} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} A^c \text{ が開集合}. \quad (\text{ただし } A^c \text{ は } A \text{ の補集合 } \mathbf{R}^n \setminus A \text{ を表わす})$$

目についた間違い: 閉集合であることを、開集合ではないことと勘違いしている

(3) 判別の結果だけ書いておくと、

(i) 有界であり、閉集合である

(ii) 有界でないが、閉集合である

(iii) 有界であるが、閉集合ではない

目についた間違い: (iii) について、開集合であると書いただけの人が何人かいたが、それでは閉集合であるかないか答えたことにならない。それから一点からなる集合は閉集合で (これは正しい)、閉集合の和は閉集合だから (有限個の閉集合ならば真だが、無限個の閉集合の場合はそうではない — つまり、ここがおかしい)、曲線は閉集合という論法を使う人がいたが、もしそれが正しければ、すべての集合は閉集合になってしまうはずである (おかしい)。

2A ($p = 2$ の場合に説明したことがあるのだが…) まず $\mathbf{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbf{R}; x \ne 0\}$ で f は何回でも微分出来る。特に連続、微分可能、C^1 級である。それで問題は $x = 0$ においてどうか、である。まず連続性は次のようにして分かる。$|\sin(1/x)| \le 1$ から

$$|f(x)| = |x|^p \left|\sin \frac{1}{x}\right| \le |x|^p \to 0 \quad (x \to 0).$$

ゆえに

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

次に微分可能性については、

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|^p}{h} \sin \frac{1}{h}$$

[6]たとえ話をすると、「大学生とは何か」という問に対して、「桂田祐史が大学生であるとは」と書き出すようなものである。不特定の人を表わすもの — 例えば A — を持ち出して「A が大学生であるとは」のような書き出しでないと変でしょ。

が存在するかという問題である。まず $p>1$ の場合は 0 という極限を持つ。$0<p\le 1$ の場合には極限がない。ゆえに $p>1$ の場合のみ微分可能 ($f'(0)=0$)、そうでない場合は微分可能でない。次に C^1 級かどうかについて。まず $p\le 1$ の場合は (微分可能でないのだから) 明らかに C^1 級でない。以下 $p>1$ とする。まず $x>0$ の場合を考えよう。

$$f'(x)=(p-1)x^{p-1}\sin\frac{1}{x}+x^p\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=(p-1)x^{p-1}\sin\frac{1}{x}-x^{p-2}\cos\frac{1}{x}$$

右辺第 1 項は $x\to+0$ のとき 0 に収束するが、右辺第 2 項については、

$$\lim_{x\to+0}x^{p-2}\cos\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & (p>2\text{ の場合})\\ \text{極限なし} & (1<p\le 2\text{ の場合})\end{cases}$$

$x<0$ の場合も含めてまとめると、

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\begin{cases}0=f'(0) & (p>2\text{ の場合})\\ \text{極限なし} & (1<p\le 2\text{ の場合})\end{cases}$$

ゆえに $p>2$ の場合 f は C^1 級で、$0<p\le 2$ の場合は C^1 級でない。■

2B かなり難しい問題であるが、よく似た $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ という場合を説明しておいたので (講義ノートにも書いてある)、簡単に結果だけ書いておく。

(1) f は不連続である。$y=kx$ とおいて何か書いた人は全員沈没である。それ以外に $\left|\dfrac{y^2}{x}\right|\le|y^2|$ とか、ムチャクチャな計算をしている人が多くて閉口した (本当にそうなると信じているのか？それとも書かないよりは何か書いた方が良いと勘違いしているのか？)

(2) 簡単なはずなのに、出来ている人があまりいなかった (なぜなんだろう？)。ちなみに結果だけ書いておくと $f_x(0,0)=1,\ f_y(0,0)=0$ である。

(3) 結論は「全微分可能ではない」。理由としては「連続でないから」が簡単だが、

$$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

でないことを示すという方針でも解ける (分母を x にした人が多かった — もちろん間違い)。この式は (2) の結果を用いると

$$\lim_{(x,y)\to 0}\frac{y^2}{x\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

と同値であるが、これが成り立たないことを示すのは難しくない (例えば $y=kx$ とおいてみるのでも OK)。

3 要領よく解ける人、要領は悪いが解ける人、解けない人、様々だった。念のため自己採点できるように途中経過を書いておくと、

$$U_t=U_{xx}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\frac{x^2-2t}{4t^2}.$$

(計算の要領は悪い人でも、結果が等しくなることが分かっているので、間違いは自分で発見できるはず — 率直に言うと、これは点をあげるための問題。こういうのを解けなかったり、give up するのはちょっとマズイ。試験場に冷房がなくて暑いのはひどいと思うけれど、こういうところは粘って欲しい。)

4

(1) さすがにほとんどの人が出来ていた。

(2) 半分くらいしか出来ていなかった。講義でも説明した「よくあるが、とんでもない間違いである」 $r_x = \dfrac{1}{\cos\theta}$ という答が過去最高の頻度で現れた (教師として残念だ)。それから (これも講義で説明した)

$$(\textbf{これは間違い}) \qquad \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & x_\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

という間違いも 10 人近くあった。ヤコビ行列の定義くらいは間違えないように。「一つの行は一つの関数に対応し、一つの列は一つの変数に対応する」ことはしっかり頭にたたき込んでおくこと。正しくは

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

(3) 結構できていた。チェイン・ルールが分かっているようであれば半分位の中間点はつけた。

5 今年度は陰関数定理を出さないので、何か定理を書けという問題を出したかったので、2 階に限定して Taylor の定理を尋ねてみた。

(1) Ω が開集合なので、$\exists\varepsilon > 0$ s.t. $B(a;\varepsilon) \subset \Omega$. そこで h を $\|h\| < \varepsilon$ となるように取れば、$\forall t \in (-1,1)$ に対して

$$\|(a+th) - a\| = \|th\| = |t| \cdot \|h\| \le 1 \cdot \|h\| = \|h\| < \varepsilon$$

なので $a + th \in B(a;\varepsilon)$ (分からない人は、図を描いてみること)、ゆえに $a + th \in \Omega$. 従って $\{a + th; t \in (-1,1)\} \subset \Omega$.

(2) まず 1 階微分は、

$$F'(t) = f'(a+th)h$$

で簡単である。この右辺は行列とベクトルの積の意味なので、順番が大切で、

$$hf'(a+th)$$

と書くとナンセンスになってしまう。2 階については、$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ とおいて、

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)h_i h_j$$

6

(1) 答は $z = -3x - 3y$. 解き方としては、接線の方程式 $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ の 2 次元版である

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

という公式に $(a,b)=(0,0)$ を代入するというのが一つ。もう一つは

$$F(x,y,z) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x,y)-z$$

とおいて、

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_y(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$$

という公式に $(a,b)=(0,0)$, $c=f(a,b)=f(0,0)=0$ を代入するというもの。

目立った間違い: 1 次式でない答 (2 次式とか3 次式) を書いた人が結構いたが、それは平面内の直線の方程式を求めろと言う問題の解答に 3 次式を書くようなものである。

(2) $(x,y)=(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. これはさすがに大半の人が出来ていたが、これを $(x,y)=(\pm 1,\pm 1)$ と書くのは曖昧である (複号任意なのか、複号同順なのかによって、2 点になるか 4 点になるか変わってしまうので)。

(3) 行列の正値、負値の判定ができない人が多かった。この問題の場合、Hesse 行列は対角行列なので、対角成分が固有値そのものであることに気が付けば (あるいは講義で強調したように、2 次の正方行列は 2 次方程式を解くだけで固有値が求まるのだから、それを実行しても良い)、定義から即答できるはずである。$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ は正値、$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ は不定符号、$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ は負値。ゆえに $(1,1)$ では極小値 $f(1,1)=-4$、$(-1,-1)$ では極大値 $f(-1,-1)=4$ を取る。

その他、全般的なこと　基本的な表記法が身についていない人がいる。

- 偏微分を表わす ∂ が書けないのか、d で済ませている。(d を ∂ で代用することはできるが、その逆はダメ。)
- 偏微分なのにプライム $'$ を使っている (どの変数で微分しているかが表わせない)。
- 微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x}$ は微分したいものの左側に書くべきなのに、右側に書いている。例えば $\dfrac{\partial}{\partial x}g_r$ としないで、$g_r\dfrac{\partial}{\partial x}$ と書いている。

それ以外に、

- 等式なのに等号 $=$ を書かない。
- 括弧 (,) の対応がでたらめ。

というのも結構あった。単なるケアレス・ミスと軽く考えず真剣に反省して欲しい。

それから、理由を尋ねているときに、「明らか」とか「自明」というのは意味がない。

同値という言葉を「値が同じ」という意味に使う人がいるが、それは自分勝手な言葉使いである (「同値」という言葉をそういう意味に使うことはない)。

おまけの問題 1　次の行列が正値であるか、負値であるか、不定符号であるか、そのどれでもないか、判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

答は順に、正値、負値、不定符号、不定符号、正値、負値、どれでもない、どれでもない、である。

おまけの問題 2　次の行列が正値であるか、負値であるか、不定符号であるか、そのどれでもないか、判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

答は順に、正値、不定符号、正値、負値、正値。

おまけの問題 3　次はよくある間違いだが、どこがおかしいか指摘せよ。修正できるものは修正せよ。

1. $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が有界であるための必要十分条件は A が上に有界かつ下に有界であることである。
2. 関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ が連続的微分可能とは、f が連続で全微分可能なことである。
3. A が閉集合であるとは、A が開集合でないことである。
4. ある集合 A について閉集合かどうか判別せよと問われたとき、A が開集合であることが分かったので、そう書いておいた。
5. 2 変数関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ の原点での連続性を調べるには、

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$$

   であるかどうか調べればよいが、それに直線 $y = kx$ にそった極限がすべて 0 であるか、言い換えると

   $$\lim_{x\to 0} |f(x,kx) - f(0,0)| = 0$$

   が任意の k について成り立つことを確かめればよい。

チェック問題 1　以下の言葉について、定義を書きなさい。

(1)　有界集合	(2)　開集合	(3)　閉集合	(4)　(点列の) 収束
(5)　連続関数	(6)　偏微分可能	(7)　全微分可能	(8)　連続的微分可能
(9)　C^1 級	(10) (行列の) 正値	(11) (行列の) 負値	(12) (行列の) 不定符号
(13) Hesse 行列	(14) 2 次形式	(14) (関数の) 極大	(15) (関数の) 極小

チェック問題 2　$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合に関係する定理を 3 つ以上あげなさい。

チェック問題 3　次の定理を書け。

(1) 陰関数定理　(2) 逆関数定理　(3) Taylor の定理

チェック問題 3　次の各論理式の否定を作れ。

(1) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ (\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq N)\ \|x_n - a\| \leq \varepsilon.$

(2) $(\forall x \in A)\ (\exists \varepsilon > 0)$ s.t. $B(x; \varepsilon) \subset A.$

(3) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\delta > 0)\ (\forall x \in B(a; \delta))\ \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$

(4) $(\exists R \in \mathbf{R})\ (\forall x \in A)\ \|x\| \leq R.$

9.2　2000 年度解析概論 I, 解析概論演習 I 追試験問題

1.　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例 (ただし空集合 $\emptyset$, 全空間 $\mathbf{R}^n$ でないもの) の例をあげ、それが開集合であることを示せ。

2　関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq 0) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

で定義するとき、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。(1) 原点で連続であるかどうか調べよ。 (2) 原点で偏微分可能であるか調べよ。(3) 原点で全微分可能であるかどうか調べよ。

3　$f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ により $f\colon \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ を定義するとき、$\triangle f \overset{\text{def.}}{=} f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ を計算せよ。

4　平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x, y)$ が与えられているとき、$g(r, \theta) = f(x, y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r} g_r + \dfrac{1}{r^2} g_{\theta\theta}.$

5　次の各文はいずれも誤りである。どこが間違っているか指摘し、可能ならば正しく修正せよ。

(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が有界であるための必要十分条件は A が上に有界かつ下に有界であることである。

(2) 関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ が連続的微分可能とは、f が連続で全微分可能なことである。

(3) A が閉集合であるとは、A が開集合でないことである。

(4) 2 変数関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ の原点での連続性を調べるには、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = 0$$

であるかどうか調べればよいが、それに直線 $y = kx$ にそった極限がすべて 0 であるか、言い換えると

$$\lim_{x\to 0} |f(x,kx) - f(0,0)| = 0$$

が任意の k について成り立つことを確かめればよい。

6 $\mathbf{R}^2$ を定義域とする関数 $f(x,y) = xy(x^2+y^2-1)$ について以下の問に答えよ。(1) f のグラフ $z = f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における接平面の方程式を求めよ。 (2) $\nabla f(x,y) = 0$ となる (x,y) をすべて求めよ。(3) f の極値をすべて求めよ。

10　1999 年度

10.1　1999 年度解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題

次の 1〜6 の 6 問に解答せよ。A, B 二つあるものについては一方のみを選択して解答せよ。

1A　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。 (2) 次の各集合につき、それが開集合かどうか判別せよ。(i) 空集合 $\emptyset$. (ii) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2/4 + y^2/9 \geq 1\}$. (iii) $\{1/n; n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}$.

1B　**1A** で開集合だけでなく、「閉集合」、「有界集合」について答えよ。

2A　$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}^n$ とするとき、次の各条件の定義と、お互いの関係について述べよ。(a) f は a で連続である。(b) f は a で各変数につき偏微分可能である。(c) f は a で全微分可能である。(d) f は a で連続的微分可能である。

2B　次式で定義される関数 f または g の一方を選び、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 1 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

(1) 原点で連続であるかどうか調べよ。 (2) 原点での偏微分係数を求めよ。(3) 原点で全微分可能であるかどうか調べよ。

3　xyz 空間で、方程式 $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} = 1$ で表される曲面に平面 $x + y + z = k$ (k はある実定数) が接しているという。k の値を求めよ。

4　平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta) = f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r}g_r + \dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$.

5　関数 $f(x,y)=x^4+y^4-2(x^2+y^2)$ について以下の問に答えよ。
(1) f の極値を求めよ。(2) f のすべての極値点を含む範囲で等高線を描け (概形でよい)。

6　(1) 陰関数定理を記せ。
(2) $F(x,y,z)=\begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix}$, $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$, $F_2(x,y,z)=x+y+z$ によって $F\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ を定めるとき、$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}$ を計算し、$y\neq z$ なる点の近くでは、$F(x,y,z)=0$ が $y=\varphi_1(x)$, $z=\varphi_2(x)$ と y, z について解けることを示し、φ_1', φ_2' を求めよ。

1999 年度解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題 解答

1A　(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が開集合であるとは

$$\forall a\in A \quad \exists\varepsilon>0 \quad \text{s.t.} \quad B(a;\varepsilon)\subset A$$

が成り立つことと定義する。ただし $B(a;\varepsilon)$ は $\mathbf{R}^n$ の a を中心とする半径 ε の開球である:

$$B(a;\varepsilon)=\{x\in\mathbf{R}^n; \|x-a\|<\varepsilon\}.$$

(2) (i) $\emptyset$ は開集合である。「空集合は $\mathbf{R}^n$ の開集合」という定理があった。
　(ii) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2/4+y^2/9\geq 1\}$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合ではない。実際 $a=(2,0)$ は A に属するが、任意の正数 ε に対して $B(a;\varepsilon)$ は A に含まれない ($(2-\varepsilon/2,0)$ は $B(a;\varepsilon)$ に含まれるが、 A には含まれないから)。
　(iii) $B=\{1/n; n\in\mathbf{N}\}\cup\{0\}$ は $\mathbf{R}$ の開集合ではない。実際 $a=0$ は B に含まれるが、任意の正数 ε に対して、$B(a;\varepsilon)$ は A は B に含まれない ($-\varepsilon/2$ は $B(a;\varepsilon)$ に含まれるが、負の数であるから明らかに B には含まれないから)。■

1B　まず閉集合について。

(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が閉集合であるとは、補集合 $A^c=\mathbf{R}^n\setminus A$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合であることと定義する。

(2) (a) 空集合は閉集合である。「空集合は $\mathbf{R}^n$ の閉集合」という定理があった。
　(b) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2/4+y^2/9\geq 1\}$ は $\mathbf{R}^2$ の閉集合である。「$f\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ が連続であるとき、$\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)\leq c\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である」という定理を $f(x,y)=1-(x^2/4+y^2/9)$, $c=0$ として適用すればよい。
　(c) 与えられた集合 $B=\{1/n; n\in\mathbf{N}\}\cup\{0\}$ の補集合は

$$(-\infty,0)\cup(1,\infty)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(1/(n+1),1/n)\right)$$

と開区間の合併の形に表されるから開集合である (「開区間は開集合」、「開集合の合併は開集合」)。ゆえに B は閉集合である。

次に有界集合について。

(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A が有界であるとは、

$$\exists R \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A \quad \|x\| \le R$$

が成り立つことと定義する。

(a) 空集合は有界である (明らかである)。

(b) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2/4 + y^2/9 \ge 1\}$ は $\mathbf{R}^2$ の有界集合ではない。実際 $x_n = (n,0)$ とおくと、任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して、$x_n \in A$, $\|x_n\| = n$ であるから、

$$\forall R \in \mathbf{R} \quad \exists x \in A \quad \|x\| > R$$

が成り立つ ($n > R$ となる $n \in \mathbf{N}$ を取り、$x = x_n$ とおく)。

(c) 明らかに有界である。

2A

- まず (d)$\Longrightarrow$(c), (c)$\Longrightarrow$ (b), (c)$\Longrightarrow$ (a) が定理として成り立つ (学習済み)。
- 上にあげた定理の系として (d)$\Longrightarrow$ (b), (d)$\Longrightarrow$ (a) も成り立つことは明らか。
- それ以外は成り立たない。

1. (a)$\Longrightarrow$(c) の反例として $f(x) = |x|$.
2. (b)$\Longrightarrow$(c) の反例として

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \ne (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定義される $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ がある。これは $(0,0)$ で偏微分可能 (明らかに $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$) だが、不連続で特に全微分不可能。

3. (c)$\Longrightarrow$(d) の反例として、

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \ne 0) \\ 0 \end{cases}$$

で定義される $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ がある。これは $x = 0$ で微分可能であるが連続的微分可能ではない。

2B f について。

(1) f は原点で連続である。実際 $(x,y) \ne (0,0)$ のとき

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} |x| \dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |x| \dfrac{|y|}{|y|} = |x| & (y \ne 0) \\ |y| \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |y| \dfrac{|x|}{|x|} = |y| & (x \ne 0) \end{array} \right. \le |x| + |y| \end{aligned}$$

となるので $(x,y) \to (0,0)$ のとき $|f(x,y) - f(0,0)| \to 0$. すなわち $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

(2) $f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}(f(h,0)-f(0,0))/h=\lim_{h\to 0}(0-0)/h=\lim_{h\to 0}0=0$, $f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}(f(0,h)-f(0,0))/h=\lim_{h\to 0}(0-0)/h=\lim_{h\to 0}0=0$.

(3) $(x,y)\to(0,0)$ のとき

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

は 0 に収束しない (そもそも極限がない) ので、f は $(0,0)$ で全微分可能ではない。

g について。

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ とすると

$$\begin{aligned}|g(x,y)-g(0,0)| &= \left|\frac{\sin x^2+\sin y^2}{x^2+y^2}-1\right|\\ &= \left|\frac{\sin x^2-x^2}{x^2+y^2}+\frac{\sin y^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{\sin x^2-x^2}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{\sin y^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\end{aligned}$$

$(x,y)\to(0,0)$ のとき、右辺第一項、第二項とも 0 に収束する。実際

$$\left|\frac{\sin x^2-x^2}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{\sin x^2-x^2}{x^2}\right|=1-\frac{\sin x^2}{x^2}\to 0\quad(x\to 0),\qquad\left|\frac{\sin y^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1-\frac{\sin y^2}{y^2}\to 0\quad(y\to 0).$$

ゆえに $\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=g(0,0)$ で、g は $(0,0)$ で連続である。

(2) まず Taylor の定理より

$$|\sin x-x|\leq\frac{|x|^3}{3!}$$

が成り立つことに注意しておく。任意の $h\neq 0$ に対して

$$\left|\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h}\right|=\left|\frac{1}{h}\left(\frac{\sin h^2}{h^2}-1\right)\right|=\left|\frac{\sin h^2-h^2}{h^3}\right|\leq\frac{h^6}{3!}\frac{1}{h^3}=\frac{h^3}{3!}$$

であるから

$$g_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h}=0.$$

まったく同様に $g_y(0,0)=0$.

(3)

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x,y)-g(0,0)-g_x(0,0)x-g_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| &= \frac{|g(x,y)-g(0,0)-0-0|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &\leq \left|\frac{\sin x^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|+\left|\frac{\sin y^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|\end{aligned}$$

$$\left|\frac{\sin x^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|\leq\frac{|\sin x^2-x^2|}{|x|^3}\leq\frac{x^6}{3!}\frac{1}{|x|^3}=\frac{|x|^3}{3!}\to 0,\qquad\left|\frac{\sin y^2-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right|\leq\frac{|y|^3}{3!}\to 0.$$

ゆえに $(x,y)\to(0,0)$ のとき

$$\left|\frac{g(x,y)-g(0,0)-g_x(0,0)x-g_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\to 0.$$

すなわち g は $(0,0)$ で微分可能。

3 $F(x,y,z) = x^2/1 + y^2/2 + z^2/3$ とおくと、曲面は $F(x,y,z) = 1$ となり、

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y/2 \\ 2z/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6x \\ 3y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

それゆえ曲面 $F(x,y,z) = 1$ 上の点 (x_0, y_0, z_0) における法線ベクトルとして $\begin{pmatrix} 6x_0 \\ 3y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}$ が取れる。ゆえに接平面の方程式は

$$6x_0(x - x_0) + 3y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0.$$

移項して

$$6x_0x + 3y_0y + 2z_0z = 6x_0^2 + 3y_0^2 + 2z_0^2 = 6(x_0^2 + y_0^2/2 + z_0^2/3) = 6F(x_0, y_0, z_0).$$

点 (x_0, y_0, z_0) は曲面上の点なので $F(x_0, y_0, z_0) = 1$ であるから、方程式は

$$x_0x + \frac{y_0y}{2} + \frac{z_0z}{3} = 1. \tag{2}$$

この方程式 (2) が $x + y + z = k$ と同値であるためには、ある実数 t が存在して

$$t\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0/2 \\ z_0/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

となることが必要十分。

$$tx_0 = 1, \quad ty_0/2 = 1, \quad tz_0/3 = 1, \quad t = k.$$

これから

$$x_0 = 1/k, \quad y_0 = 2/k, \quad z_0 = 3/k.$$

(x_0, y_0, z_0) が $F(x,y,z) = 1$ 上にあることから、

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{k}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{k}\right)^2 = 1.$$

これを解いて $k = \pm\sqrt{6}$. ■

4 略。

5 (最後の等高線は略 – 紙の節約)。まず grad と Hesse 行列は

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x(x^2-1) \\ 4y(y^2-1) \end{pmatrix}, \quad H(x,y) = \begin{pmatrix} 4(3x^2-1) & 0 \\ 0 & 4(3y^2-1) \end{pmatrix}.$$

$\nabla f(x,y) = 0$ を解くと、

$$(x,y) = (-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,-1), (0,0), (0,1), (1,-1), (1,0), (1,1).$$

- $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ (複号任意) のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$ であり、これは明らかに正値であるから、極小となる。極小値 $f(\pm1,\pm1)=-2$.
- $(x,y)=(\pm1,0)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix}8&0\\0&-4\end{pmatrix}$ であり、これは明らかに不定符号であるから、極値ではない。
- $(x,y)=(0,\pm1)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix}-4&0\\0&8\end{pmatrix}$ であり、これは明らかに不定符号であるから、極値ではない。
- $(x,y)=(0,0)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}$ であり、これは明らかに負値であるから、極大となる。極大値 $f(0,0)=0$.

6

(1) (略)

(2) $X=x$, $Y=(y,z)$ として $F(x,y,z)=F(X,Y)$ と表すと

$$\det\frac{\partial F}{\partial Y}=\det\begin{pmatrix}(F_1)_y&(F_1)_z\\(F_2)_y&(F_2)_z\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}2y&2z\\1&1\end{pmatrix}=2(y-z).$$

これは $y\neq z$ のとき $\neq 0$ であるから、陰関数定理が適用できて $F(X,Y)=0$ は Y について $Y=\varphi(X)$ と解ける。つまり $y=\varphi_1(x)$, $z=\varphi_2(x)$ と解けるわけである。

$$\varphi'(X)=\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)=\frac{1}{2(y-z)}\begin{pmatrix}1&-2z\\-1&2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x-z}{y-z}\\\dfrac{-x+y}{y-z}\end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\varphi_1'(x)=\frac{x-z}{y-z}=\frac{x-\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)},\quad \varphi_2'(x)=\frac{-x+y}{y-z}=\frac{-x+\varphi_1(x)}{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}.$$

10.2 1999年度解析概論I 追試験問題 (1999年7月27日版)

以下の 6 問に解答せよ。6A, 6B についてはいずれか一問を選択して解答せよ。

1 (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例 (ただし、空集合や全空間でないもの) を一つあげ、それが開集合であることを、前小問の解答に記した定義にもとづき証明せよ。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合のうち、開集合でないものを一つあげ、それが開集合でないことを示せ。

2 (1) Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}^m$, $a\in\Omega$ とするとき、f が a で全微分可能であるとはどういうことか、定義を記せ。(2) A を実数を成分とする m 行 n 列の行列として、$g\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ を $g(x)=Bx$ $(x\in\mathbf{R}^n)$ で定義する。このとき任意の $x\in\mathbf{R}^n$ に対して g は x で全微分可能であることを示せ。

3 $\mathbf{R}^2$ を定義域とする関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ について以下の問に答えよ。(1) f のグラフ $z=f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における接平面の方程式を求めよ。 (2) $\nabla f(x,y)=0$ となる (x,y) をすべて求めよ。(3) f の極値をすべて求めよ。

4 (1) C^2 級の関数 $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ に対して、$v(x,t)=f(x-t)+g(x+t)$ とおくと、$\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ であることを示せ。

(2) $u\colon \mathbf{R}^2\ni(x,t)\mapsto u(x,t)\in\mathbf{R}$ が C^2 級の関数で、$\mathbf{R}^2$ 上 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすとするとき、以下の問に答えよ。(a) $X=x-t$, $Y=x+t$, $u(x,t)=U(X,Y)$ により $U\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を定義すると、$\dfrac{\partial^2 U}{\partial X\partial Y}=0$ が成り立つことを示せ。(b) $u(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$ を満たす関数 f, g が存在することを示せ。

5 Taylor の定理により、以下の関数を $(0,0)$ において 4 階の項 (x, y の 4 次式のところ) まで展開せよ (剰余項は書かなくてもよい)。

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

6A (1) 陰関数定理を記せ。 (2) $f(x,y)=x^3+y^3-2xy$, $P=(1,1)$ とする。$f(x,y)=0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y=g(x)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

6B (1) 陰関数定理を記せ。(2) 変数 x, y, z, u, v の間に $xy+uv=0,\quad x^2+y^2+z^2=u^2+v^2$ の関係があるとする。点 $(x,y,z,u,v)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1,1,2)$ の近傍において、これを u, v について解けることを示せ。さらに $(x,y,z)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$ における $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial z}$ の値を求めよ。

10.3 1999 年度解析概論 I 追試験問題

(1999 年 7 月 28 日 (水曜日) 実施)

1 (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を書け。(2) 次の各命題の真偽を判定し、真であるものは証明し、偽であるものは反例をあげよ。

(a) U_i $(i=1,2,\cdots)$ がいずれも $\mathbf{R}^n$ の開集合ならば、和集合 $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$ も $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(b) U_i $(i=1,2,\cdots)$ がいずれも $\mathbf{R}^n$ の開集合ならば、共通部分 $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty}U_i$ も $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(c) $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ が連続写像で、U が $\mathbf{R}^n$ の開集合であるとき $f(U)$ は $\mathbf{R}^m$ の開集合である。

2 次式で定義される関数 $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ について以下の問に答えよ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y} & (x+y\neq 0 \text{ のとき})\\ 0 & (x+y=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

(1) f は $(0,0)$ で連続かどうか調べよ。(2) f は $(0,0)$ で偏微分可能かどうか調べよ。(3) f は $(0,0)$ で全微分可能かどうか調べよ。

3 $f(x,y)=4xy-2y^2-x^4$ で定義される $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)=0$ となる点 (x,y) をすべて求めよ。(2) f の極値を求めよ。(3) f のグラフ $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ における接平面の方程式を求めよ。

4A 次式で定義される関数 $U\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ が $U_t=U_{xx}$ を満たすことを示せ。

$$U(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right).$$

4B つまり $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi))$ とするとき、以下の問に答えよ。

(1) (a) 写像 $(r,\theta)\mapsto(x,y)$ の偏微分係数 x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) 写像 $(x,y)\mapsto(r,\theta)$ の偏微分係数 r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f=f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta)=f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} を g の偏微分係数 (g_r, g_θ, g_{rr}, $g_{r\theta}$, $g_{\theta\theta}$ 等) を用いて表せ。

5 (1) $n\in\mathbf{N}$ に対して $f(t)=\log(1+t)$ の n 階導関数を求め、$f(t)$ を $t=0$ において Taylor 展開せよ。(2) $g(x)=\log(1+x^2)$ を $x=0$ において展開せよ。(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)-x\sin x}{x^4}$ を求めよ。

6 (1) 逆関数定理を書け。
(2) $f=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\end{pmatrix}\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ を $f_1(x,y)=x^3-3xy^2$, $f_2(x,y)=3x^2y-y^3$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で f の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の十分近くにおける f の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

11 1998年度

11.1 1998年度解析概論 I, 解析概論演習 I 試験問題

(1998年7月27日実施)
次の 1 〜 6 の 6 問を解答せよ。A, B 二つあるものは、一方を選択して解答すること。

1A. (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を書け。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の定義を書け。(3) $\mathbf{R}^n$ の閉集合の例 (空集合と全空間以外のもの) を一つあげ、それが閉集合であることを定義に従って示せ。

1B. (1) $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合の例を一つ記せ。(2) $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合に関係した定理をなるべくたくさん書け。(3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A 上の連続関数 $f\colon A\to\mathbf{R}$ が、任意の $x\in A$ に対して $f(x)>0$ を満たしているとするとき、$f(x)\geq C>0$ $(\forall x\in A)$ を満たすような定数 C が存在するかどうか答え、成り立つならばその理由を、成り立たないならば反例をあげよ。

2 次式で定義される関数 $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ について、(1) 原点での連続性, (2) 原点での偏微分可能性, (3) 原点での全微分可能性, の三つを調べよ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0)).\end{cases}$$

3　方程式 $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$ で定義される $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 S について、以下の問に答えよ。(1) S 上の点 (x_0,y_0,z_0) における S の接平面の方程式を求めよ。(2) S 上の点 (x_0,y_0,z_0) における S の法線ベクトルが、ベクトル $(1,1,1)$ に平行であるという。(x_0,y_0,z_0) を求めよ。(3) 点 (x,y,z) が曲面 S 上を動くときの、$x+y+z$ の値の範囲を求めよ。

4A　平面の極座標を考える。つまり $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f=f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta)=f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき次の式が成り立つことを確かめよ: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

4B　C^2 級の関数 $f\colon [0,\infty)\to\mathbf{R}$ が与えられたとき、$u\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ を $u(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ で定める。このとき、以下の問に答えよ。
(1) ∇u を f を用いて表せ。(2) $\triangle u := u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ を f を用いて表せ。(3) u が $\triangle u(x,y,z)=0$ $((x,y,z)\neq(0,0,0))$ を満たしているならば、実は u は次の形をしていることを示せ。

$$u(x,y,z)=\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+D \quad (C,\ D\ \text{は定数}).$$

5　関数 $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ の極値を求めよ。

6　(1) 陰関数定理を記せ。
(2) $F(x,y):=x(x-1)^2-y^2$ とするとき、以下の問に答えよ。 (a) 方程式 $F(x,y)=0$ で定義される xy 平面内の曲線の概形を描け。 (b) $F(x,y)=0$ から定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ について、(1) で記した陰関数定理が適用できない点 (その点の近傍での陰関数の存在が定理から主張できない点) を求めよ。

11.2　1998 年度解析概論 I, 解析概論演習 I　追試験問題

(1998 年度 7 月 31 日実施？) 次の 1 〜 7 の 7 問を解答せよ。

1.　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を書け。(2) $\mathbf{R}^2$ の開集合の例 (空集合と全空間以外のもの) を一つあげよ。(3) (2) であげた集合が開集合であることを (1) で記した定義に従って証明せよ。

注意　(3) では、具体的にどう ε を取ればいいのか書かないと証明にならない。

2.　関数 $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を次式で定めるとき、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)\ \text{のとき})\\ 0 & ((x,y)=(0,0)\ \text{のとき}).\end{cases}$$

(1) f は原点で連続か？理由をつけて答えよ。(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ。(3) f は原点で全微分可能でないことを示せ。

3. 多変数ベクトル値関数について以下の問に答えよ。(1) 連続性の定義を書け。(2) 全微分可能性の定義を書け。 (3) 連続的微分可能性 (C^1 級である) の定義を書け。 (4) 多変数ベクトル値関数について、以下の (a)〜 (d) の 4 条件の間の関係を述べよ (任意の二条件について、一方から他方が導かれるかどうか述べよ)。(a) 連続である。 (b) 全微分可能である。 (c) 連続的微分可能である。 (d) 各変数について偏微分可能である。

4. xyz 空間で、方程式 $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}=1$ で表される曲面に、平面 $x+y+z=k$ (k はある実定数) が接しているという。このとき k の値を求めよ。

5. (1) U, V を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon U\to V$ を C^1 級の全単射で逆写像も C^1 級であるものとする。$x\in U$ に対して $f(x)=y$ とおくとき、合成関数の微分法を用いて、$(f^{-1})'(y)=(f'(x))^{-1}$ を示せ。
(2) $U=\{(r,\theta); r>0, -\pi<\theta<\pi\}$ とおく。$\varphi\colon U\ni(r,\theta)\longmapsto(x,y)\in\mathbf{R}^2$ を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と定めるとき、以下のものを求めよ。
(a) φ のヤコビ行列 $\varphi'(r,\theta)$. (b) φ^{-1} のヤコビ行列 $(\varphi^{-1})'(x,y)$. (c) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\theta}{\partial y}$.

6. 関数 $f(x,y)=xye^{-x^2-y^2}$ について、以下の問に答えよ。(1) ∇f を求めよ。 (2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) $\nabla f(x,y)=0$ となる点 (x,y) を求めよ。 (4) f の極値を求めよ。

7. (1) 陰関数定理を記せ。
(2) $F(x,y):=x^3+y^3-2xy$, $P=(1,1)$ とする。$F(x,y)=0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在を示し、その点における微分係数の値を求めよ。

1998 年度解析概論 I, 解析概論演習 I　追試験問題 解答

1. (1) $A\subset\mathbf{R}^n$ が開集合であるとは、$\forall x\in A\ \exists\varepsilon>0$ s.t. $B(x;\varepsilon)\subset A$. (2) $A=(0,1)\times(0,1)$.
(3) $\vec{x}=(x,y)\in A$ とすると、$0<x<1$, $0<y<1$. ここで $\varepsilon=\min\{x,1-x,y,1-y\}$ とおくと $\varepsilon>0$ で $B(\vec{x};\varepsilon)\subset A$.

2. (1) 連続である。

$$|f(x,y)|=\frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2}\le\frac{|x|^3}{x^2+y^2}+\frac{|y|^3}{x^2+y^2}\le\frac{x^2}{x^2+y^2}|x|+\frac{y^2}{x^2+y^2}|y|\le|x|+|y|\to0\quad((x,y)\to(0,0))$$

これから

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0).$$

(2)

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3/h^2-0}{h}=1,\\ f_y(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h^3/h^2-0}{h}=-1.\end{aligned}$$

(3) もし微分可能なら

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

となるはずで、これから

$$
\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3-k^3}{h^2+k^2}-h+k}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{h,k\to 0} \frac{(h^3-k^3)-(h-k)(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} \\
&= \lim_{h,k\to 0} \frac{hk^2-kh^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0
\end{aligned}
$$

が導かれるはずだが、これは成り立たないことが分かる。実際

4.

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} - 1$$

より

$$\nabla f = (2x, y, 2z/3).$$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ y \\ 2z/3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \lambda, \quad z = \frac{3\lambda}{2}.$$

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3\lambda}{2}\right)^2 = 1.$$

$$\lambda^2 = \frac{2}{3}.$$

$$(x,y,z) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right).$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2}\right) = \pm\sqrt{6}.$$

6.

$$f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$$

$$f_x = y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}, \quad f_y = x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}.$$

(1) $\nabla f = \begin{pmatrix} y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} \\ x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$

(2)

$$H(x,y) = e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} -2xy(3-2x^2) & (1-2x^2)(1-2y^2) \\ (1-2x^2)(1-2y^2) & -2xy(3-2y^2) \end{pmatrix}.$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\nabla f = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y(1-2x^2) = 0 \\ \text{and} \\ x(1-2y^2) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \quad \text{or} \quad x = \pm\sqrt{1/2} \\ \text{and} \\ x = 0 \quad \text{or} \quad y = \pm\sqrt{1/2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0), \left(\pm\sqrt{1/2}, \pm\sqrt{1/2}\right) \quad (\text{複号任意})
\end{aligned}
$$

12　1997年度

12.1　1997 年度　解析概論I・解析概論演習I　試験問題

(1997年7月23日実施)
1 〜 7 を解け (結果だけでなく途中経過も記せ)。1, 3, 6 は A, B いずれかを選んで解け。

1A　(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べよ。(2) 次の命題を証明せよ。「U, V を $\mathbf{R}^n$ の開集合とするとき、$U \bigcap V$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。」(3) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例として、空集合、全空間以外のものをあげ、それが開集合であることを証明せよ。

1B　$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を連続関数とするとき、$\Omega := \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > 0\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合、 $F := \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \le 0\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。このことを示せ。

2　関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を次式で定めるとき、以下の問 (1), (2), (3) に答えよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & ((x,y) \ne (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}). \end{cases}$$

(1) f は原点で連続か？理由をつけて答えよ。(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ。(3) f は原点で微分可能でないことを示せ。

3A　$u(t,x,y,z) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)$ は $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ を満たすことを示せ。

3B　A を n 次実対称行列、$b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とするとき、$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax,x) + (b,x) + c \quad (x \in \mathbf{R}^n)$ で定義するとき、 $\operatorname{grad} f$ と f の Hesse 行列を求めよ (途中経過を記せ)。

4　次の二つの曲面 π_1, π_2 が接する (π_1, π_2 の接平面が一致する) ように正定数 λ を定めよ。

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ xyz = \lambda, \\ \pi_2 &: \ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{aligned}$$

5　平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta) = f(x,y)$ で関数 g を定める。このとき (a) f_x, f_y を g_r, g_θ で表せ。(b) g_r, g_θ を f_x, f_y で表せ。

(3) 次の式が成り立つことを確かめよ: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

6A　$f(x,y) = x^4 - xy + y^4$ の極大・極小を調べよ。

6B　$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\}$ とおき、$f\colon K \to \mathbf{R}$ を $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$ で定義する。このとき、f の最大値と最小値を求めよ。

7 (1) 陰関数定理を記せ。(2) 方程式 $F(x,y,z) = x^2 + (x - y^2 + 1)z - z^3 = 0$ は点 $(0,0,1)$ の近傍で z について解けることを示せ。また、その点における $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ の値を求めよ。

12.2 1997 年度 解析概論 I・解析概論演習 I 追試験問題

(1997 年 7 月 29 日 13:00〜15:00 実施)
1 〜 7 を解け (結果だけでなく途中経過も記せ)。

1 (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べよ。(2) 次の命題を (1) で述べた定義に基づいて証明せよ。「U, V を $\mathbf{R}^n$ の開集合とするとき、$U \bigcup V$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。」(**注意:** 本試験の問題 1A では $U \bigcap V$ であったが、ここでは $U \bigcup V$ である。間違えないこと。) (3) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例として、空集合、全空間以外のものをあげ、それが開集合であることを証明せよ。

2 関数 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。このとき、以下の問に答えよ。
(1) $f(x,y)$ は、各 y を固定すると x の連続関数であり ($\mathbf{R} \ni x \mapsto f(x,y) \in \mathbf{R}$ は連続ということ)、各 x を固定すると y の連続関数である ($\mathbf{R} \ni y \mapsto f(x,y) \in \mathbf{R}$ は連続ということ) ことを示せ。(簡単な説明で構わない。どちらでも同様だから、一方だけ示せばよい。)
(2) f は原点で連続でないことを示せ。

3 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \|x\|^{2-n}$ で定めるとき、次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

4 r を正定数とするとき、$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ とおく。(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。
(2) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 (a,b,c) における接平面を求めよ。

5 平面の極座標を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) (a) x_r, x_θ, y_r, y_θ を求めよ。(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y を求めよ。

(2) 関数 $f = f(x,y)$ が与えられたとき、$g(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で関数 g を定める。このとき
(a) g_r, g_θ を f_x, f_y で表せ。(b) f_x, f_y を g_r, g_θ で表せ。
(c) 次の式が成り立つことを確かめよ: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$.

6 $f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ の極大・極小を調べよ。

7 (1) 陰関数定理を記せ。

(2) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix}$, $F_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, $F_2(x,y,z) = x+y+z$ によって $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を定めるとき、$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}$ を計算し、$y \neq z$ なる点の近くでは、$F(x,y,z)=0$ が $y=\varphi(x)$, $z=\phi(x)$ と y, z について解けることを示し、φ', ψ' を求めよ。

13 1996年度

13.1 1996 年度 解析概論 I・解析概論演習 I 試験問題

(1996 年 7 月 25 日実施)

次の 1, 2, 3, 4, 5, 6 を解け。1, 2, 3 は選択問題 (それぞれ **A**, **B** のいずれか一方を選べ)。結果だけでなく途中経過も記すこと。

1A 次の $\mathbf{R}^2$ の部分集合を図示し、有界であるか、開集合であるか、閉集合であるかを判定せよ (理由は述べなくてよい)。 (1) $A = \{(x,y); x^2 + \dfrac{y^2}{4} < 1\}$. (2) $B = \{(x,y); x^2 - y^2 = 1\}$.

1B 次の各問に答えよ。(1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べなさい。(2) $a \in \mathbf{R}^n$ とするとき、$A = \{a\}$ は開集合ではないことを、(1) で述べた開集合の定義に基づいて証明しなさい。(3) $\mathbf{R}^n$ の開集合の例を一つあげ、それが開集合であることを、 (1) で述べた開集合の定義に基づいて証明しなさい。

2A (1) 空間極座標の定義を述べよ。(2) 空間極座標で定義される写像のヤコビ行列を求めよ。

2B $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ であることを示せ。

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ を示せ。

3A 曲面 $z = xy(x^2+y^2-4)$ 上の点 $(1,2,2)$ における曲面の接平面と法線を求めよ。

3B $u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ が C^2 級の関数で、$\mathbf{R}^2$ 上 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすとする。

(1) $X = x-t$, $Y = x+t$, $u(x,t) = U(X,Y)$ により $U\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を定義するとき、$\dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$ を満たす関数 f, g が存在することを示せ。

4　関数 $f(x,y)=x^3+y^3-x^2+xy-y^2$ の極値を求めよ。

5　(1) 陰関数定理を記せ。(2) $F(x,y,z)=x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}-3,\ P=(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ とする。$F(x,y,z)=0$ の点 P の近くにおける陰関数 $z=\varphi(x,y)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

6　$a_1, a_2, \cdots, a_n, b\in\mathbf{R}$, $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq(0,0,\cdots,0)$ とするとき、条件 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b=0$ のもとで、$f(x)={x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2$ の最小値を求めよ。

1996 年度　解析概論 I・解析概論演習 I　試験問題 略解

1A

(1) A は楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の内部 (斜線含まず) である。図は省略する。

- (a) A は有界である。
- (b) A は開集合である。
- (c) A は閉集合ではない。

(2) B は 2 直線 $x+y=0$, $x-y=0$ を漸近線とする双曲線である。図は省略する。

- (a) B は有界でない。
- (b) B は開集合でない。
- (c) B は閉集合である。

1B

(1) A を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とするとき、 A が $\mathbf{R}^n$ の開集合であるとは、

$$\forall a\in A, \exists\varepsilon>0 \text{ s.t. } B(a;\varepsilon)\subset A$$

が成り立つことである。

(2) $A=\{a\}$ とする。 $a\in A$ であるが、$\forall\varepsilon>0$ に対して $B(a;\varepsilon)\not\subset A$ である。(実際、$x=a+\dfrac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ とおくと、$\|x-a\|=\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ より、 $x\in B(a;\varepsilon)$. また $a\neq x$ より $x\notin A$. ゆえに $B(a;\varepsilon)\not\subset A$.) ゆえに A は開集合でない。

(3) $A=\mathbf{R}^n$ とすると、A は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。実際、$\forall a\in A$ に対して、$\varepsilon=1$ とすると $B(a;1)\subset\mathbf{R}^n=A$ であるから。

2A

(1) $\mathbf{R}^3$ の点 $P=(x,y,z)$ に対して

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{array}\right)$$

を満たす (r,θ,φ) を P の極座標と言う。

(2) $\Phi\colon (r,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z)$ とすると、

$$\Phi'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

2B

(1) $x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(x,0)} \\ &= \left(x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{(x^2+y^2)(-2y)-(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(x,0)} \\ &= x\frac{x^2}{x^2} \\ &= x. \end{aligned}$$

$x=0$ のときは

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 = x.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ についても、同様の計算で $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -y$ が示される (省略)。

(2) (1) の結果から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\right)\Bigg|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}(x)\Bigg|_{x=0} = 1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right)\Bigg|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x}(-y)\Bigg|_{y=0} = -1 \end{aligned}$$

であるから、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

3A $F(x,y,z) = xy(x^2+y^2-4) - z$ とおくと、

$$z = xy(x^2+y^2-4) \Leftrightarrow F(x,y,z) = 0.$$

$$\nabla F(x,y,z)=\begin{pmatrix}F_x\\F_y\\F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(x^2+y^2-4)+xy\cdot 2x\\x(x^2+y^2-4)+xy\cdot 2y\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x^2y+y^3-4y\\3xy^2+x^3-4x\\-1\end{pmatrix},$$

$$\nabla F(1,2,2)=\begin{pmatrix}3\cdot 2+2^3-4\cdot 2\\3\cdot 2^2+1-4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\9\\-1\end{pmatrix}$$

であるから、接平面の方程式は

$$6(x-1)+9(y-2)+(-1)(z-2)=0,$$

すなわち

$$6x+9y-z-22=0.$$

また法線の方程式は

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{9}=\frac{z-2}{-1}.$$

3B

(1) まず

$$X=x-t,\quad Y=x+t$$

より

$$x=\frac{1}{2}(X+Y),\quad t=\frac{1}{2}(Y-X)$$

である。合成関数の微分法より

$$\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial Y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial X\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial Y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)\frac{\partial t}{\partial Y}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=0.\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial X}\left(\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right)=0$ より、$\dfrac{\partial U}{\partial Y}$ は X によらない関数である。それを G と書こう:

$$\frac{\partial U}{\partial Y}(X,Y)=G(Y).$$

これから

$$U(X,Y)=U(X,0)+\int_0^Y\frac{\partial U}{\partial Y}(X,s)ds=U(X,0)+\int_0^Y G(s)ds.$$

そこで $f(X):=U(X,0)$, $g(Y):=\displaystyle\int_0^Y G(s)ds$ とおくと、

$$U(X,Y)=f(X)+g(Y).$$

ゆえに

$$u(x,t)=U(X,Y)=f(X)+g(Y)=f(x-t)+g(x+t).$$

4 $f(x,y)=x^3+y^3-x^2+xy-y^2$ より

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} 3x^2-2x+y \\ 3y^2+x-2y \end{pmatrix}.$$

また f の Hesse 行列を H とすると

$$H=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x-2 & 1 \\ 1 & 6y-2 \end{pmatrix}.$$

さて、

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x^2-2x+y=0 \\ 3y^2+x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x+y=0 \\ (x+y-1)(x+y)=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y)=(0,0),(1/3,1/3).\end{aligned}$$

(1) $(x,y)=(0,0)$ のとき $H=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. H の r 次主座小行列を D_r とすると、$\det D_1=-1<0$, $\det D_2=4-1=3>0$ であるから、 H は負値である。ゆえにここで極大となる。

(2) $(x,y)=(1/3,1/3)$ のとき $H=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. H の r 次主座小行列を D_r とすると、$\det D_2=-1<0$ であるから、 H は不定符号である。ゆえにここで極値をとらない。

ゆえに f は $(0,0)$ で極大値 0 をとる。

5

(1) 省略。

(2) $F(x,y,z)=x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}-3$ より、F は C^1 級で $F'(x,y,z)=(2x,y,2z/3)$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,\sqrt{2},\sqrt{3})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\neq 0$ であるから、$(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ の近くで $F(x,y,z)=0$ は $z=\varphi(x,y)$ と解けて、

$$\varphi'(x,y)=-\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right),\quad \therefore\ \varphi'(1,2)=-\frac{3}{2\sqrt{3}}(2\cdot 1,\sqrt{2})=\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

6 $g(x_1,\cdots,x_n):=a_1x_1+\cdots a_nx_n+b$ とおくと、 f, g は $\mathbf{R}^n$ で C^1 級である。条件 $g(x)=0$ のもとで $f(x)$ が最小値を持つことの証明はここでは省略する (幾何学的に考えれば、原点と超平面 $g(x)=0$ との距離の平方であるから明らかである。きちんと出来たらエライ。)。$\nabla g(x)=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、その条件つき最小値は Lagrange の未定乗数法で求まる。すなわち

$$F(x,\lambda):=f(x)-\lambda g(x)$$

とおくと、条件つき最小値を与える点は連立方程式

$$\nabla F(x,\lambda)=0 \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_j} \quad (j=1,\cdots,n) \\ g(x)=0 \end{cases}$$

の解である (∇ は (x, λ) に関する gradient を表すとする)。これを解くと

$$x_j = -\frac{a_j b}{\displaystyle\sum_{k=1}^n (a_k)^2} \quad (j = 1, \cdots, n).$$

ゆえに求める最小値は

$$\sum_{j=1}^n \left(-\frac{a_j b}{\displaystyle\sum_{k=1}^n (a_k)^2} \right)^2 = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^n b^2 (a_j)^2}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n (a_k)^2\right)^2} = \frac{b^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^n (a_k)^2}.$$

14 1995年度

14.1 1995 年度 微分積分学 I・同演習 試験問題

次の 1, 2, 3, 4, 5 を解け。1,2,3,5 は選択問題である。

1A 次の $\mathbf{R}$ の各部分集合について、有界であるか、開集合であるか、閉集合であるかを判別し理由を述べよ。
(1) $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\}$. (2) $(0, 1)$. (3) $\{x; x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 2\}$. (4) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. (5) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

1B$_1$ (1) $\mathbf{R}^n$ の開集合の定義を述べよ。 (2) $\mathbf{R}^n$ の開球が開集合であることを、(1) の解答で述べた定義に従って示せ。 (3) $\mathbf{R}^n$ の部分集合で、開集合でないものの例をあげ、開集合でない理由を述べよ。

1B$_2$ (1) $\mathbf{R}^n$ の収束列は有界であることを証明せよ。(2) $\mathbf{R}^n$ の収束列は Cauchy 列であることを証明せよ。

1C U, V をそれぞれ $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n$ の開集合、$f \colon U \to V$ を連続関数とする。このとき $W \subset V$ なる任意の開集合 W に対して $f^{-1}(W) := \{x \in U; f(x) \in W\}$ は $\mathbf{R}^m$ の開集合となることを証明するため、以下の空欄を埋めよ。「任意の $a \in$ $\boxed{\text{ア}}$ をとると、$a \in U$ かつ $f(a) \in$ $\boxed{\text{イ}}$. $\boxed{\text{イ}}$ は $\boxed{\text{ウ}}$ であるから、$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(f(a); \varepsilon) \subset$ $\boxed{\text{イ}}$ (ここで $B(\alpha; r)$ は中心 α, 半径 r の開球を表す記号). f の連続性から $\boxed{\text{エ}}$ $\delta > 0$ s.t. $\|x - a\| < \delta \Longrightarrow x \in U$ かつ $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. ゆえに $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset W$ となるが、これから $B(a; \delta) \subset$ $\boxed{\text{オ}}$. ゆえに $f^{-1}(W)$ は開集合である。」

2A 次の式で定義される関数 $u \colon \mathbf{R}^4 \ni (t, x, y, z) \mapsto u(t, x, y, z) \in \mathbf{R}$ が $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ を満たすことを示せ。

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t} \right).$$

2B$_1$ U, V をそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の開集合、$f\colon U \to V$ とする。
(1) f が連続であるとはどういうことか。定義を記せ。 (2) f が微分可能であるとはどういうことか。定義を記せ。 (3) f が C^1 級であるとはどういうことか。定義を記せ。 (4) 多変数関数について、 (a) 連続である, (b) 各変数に関して偏微分可能である, (c) 微分可能である, (d) C^1 級である、という 4 つの条件の間の関係を述べよ。

2B$_2$ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$ を満たす C^2 級の関数 f は存在しないことを示せ。

3A 次の各 f の偏導関数 f_x, f_y を求めよ。(1) $f(x,y) = \cos(x^3 + xy)$. (2) $f(x,y) = \arccos \dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$.
(3) $f(x,y) = \log\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$. (4) $f(x,y) = \log\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3B$_1$ A を n 次実対称行列、$b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ として、$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ で定める。この時 $\nabla f(x)$ を求めよ。

3B$_2$ xyz 空間で、方程式 $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} = 1$ で表される曲面に平面 $x + y + z = k$ (k はある実定数) が接しているという。k の値を求めよ。

3C $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を C^1 級の写像で、$a \in \mathbf{R}^n$, $\det f'(a) = 0$ が成り立つとする。a において逆関数定理の仮定は成り立たないので、

$$\exists U\colon a \text{ を含む } \mathbf{R}^m \text{ の開集合}\ \ \exists V\colon f(a) \text{ を含む } \mathbf{R}^n \text{ の開集合}\ \text{ s.t. } f|_U\colon U \to V \text{ は全単射 (ゆえに } f_U^{-1} \text{ が存在)}$$

は成り立つとは限らないが、f によっては成り立つこともありうる。その例をあげよ。また、たとえ逆写像 f_U^{-1} が存在してもそれは $f(a)$ で微分可能ではありえないことを示せ。

4A $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ で定義される関数 f の極値点を求め、極大、極小を判定せよ。

5A (1) 陰関数定理を記せ。 (2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $P = (1,1)$ とする。$f(x,y) = 0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y = g(x)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

5B 連立方程式 $x + y + z + w = 0$, $e^x + e^{2y} + e^z + e^w = 4$ は、 0 の近傍で x, y について解けることを証明せよ。

1995 年度微分積分学 I・同演習 試験問題解答

1A 演習で大部分やってあるので、復習してあれば大体出来るであろう。

- $\mathbf{R}$ において開球 $B(a; r) := \{x \in \mathbf{R}; |x-a| < r\}$ は要するに開区間 $(a-r, a+r)$ のこと。
- 有界集合の定義
- 開集合の定義
- 「任意の開区間は開集合」

- 「任意個数の開集合の合併は開集合」
- 「集合 A が閉集合であるための必要十分条件は $\mathbf{R} \setminus A$ が開集合であること」

これくらいが基礎知識であろうか。それから講義で直接取り上げなかったが「1 点からなる集合 $\{a\}$ は開集合ではないが閉集合である」ということと、その証明をマスターしておくとスイスイ解ける。

(1) $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\}$ とおくと、

(a) $\forall x \in A$ に対して $|x| \leq 1$ が成り立つので A は有界である。

(b) $1 \in A$ であるが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(1;\varepsilon) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ は 1 より大きい数 (例えば $1+\varepsilon/2$) を含むので $B(1;\varepsilon) \not\subset A$. ゆえに A は開集合ではない。

(c) 講義で説明したように $\overline{A} = A \cup \{0\} \neq A$. 従って A は閉集合ではない。

(2) $A = (0,1)$ とおくと

(a) $\forall x \in A$ に対して $|x| \leq 1$ が成り立つので A は有界である。

(b) A は開区間で、講義で説明したように「開区間は開集合」であるから、A は開集合。(念のために繰り返し: $\forall x \in A$ に対して $\varepsilon := dist(x, A)$ とおけば $B(x;\varepsilon) \subset A$ であるから)

(c) $\mathbf{R} \setminus A = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ は開集合ではない。実際 $1 \in \mathbf{R} \setminus A$ であるが $\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(1;\varepsilon)$ は $0 < y < 1$ なる y (例えば $y = 1 - \varepsilon/2$) を含むから $B(1;\varepsilon) \not\subset (\mathbf{R} \setminus A)$。ゆえに $\mathbf{R} \setminus A$ は開集合ではない。

(3) $A = \{x; x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 2\}$ とおく。$A = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right)$ である。

(a) どんな数よりも大きな数が A に含まれていることは明らかだから A は有界ではない。

(b) $\sqrt{2} \in A$ であるが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(\sqrt{2};\varepsilon)$ は $0 < y < \sqrt{2}$ なる y (例えば $y = \sqrt{2} - \varepsilon/2$) を含み、$y \in A$ であるから $B(\sqrt{2};\varepsilon) \not\subset A$. ゆえに A は開集合ではない。

(c) $\mathbf{R} \setminus A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ は開区間ゆえ開集合。ゆえに A は閉集合である。

(4) $A = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(a) 前問と同様に A は有界でない。

(b) A は二つの開区間(それは開集合)の合併であるから開集合。

(c) $\mathbf{R} \setminus A = \{0\}$ は開集合ではない ($\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(0;\varepsilon) \not\subset A$ は明らかだから。) ゆえに A は閉集合ではない。

(5) $A = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ とおくと、講義で示したように $A = \{0\}$.

(a) 明らかに有界。($\forall x \in A$ に対して $|x| = 0 \leq 0$.)

(b) $0 \in A$ であるが、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(0;\varepsilon) \not\subset A$ は明らかだから A は開集合ではない。

(c) $\mathbf{R} \setminus A$ は前問の集合でこれは開集合だったから、A は閉集合である。

1B$_1$　以下 $B(a;r)$ で $\mathbf{R}^n$ における中心 a, 半径 r の開球 $\{x \in \mathbf{R}^n; \|x-a\| < r\}$ を表すとする。

(1) $\mathbf{R}^n$ の部分集合 A について

$$A \text{ が開集合} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0\ B(x;\varepsilon) \subset A.$$

(2) $A = B(a;r)$ として A が開集合であることを証明する。$\forall x \in A$ に対して、定義から $\|x-a\| < r$ であるから、$\varepsilon := r - \|x-a\|$ とおけば $\varepsilon > 0$. すると $B(x;\varepsilon) \subset A$ が成り立つ。実際 $\forall y \in B(x;\varepsilon)$ に対して $\|y-a\| = \|(y-x)+(x-a)\| \le \|y-x\| + \|x-a\| < \varepsilon + \|x-a\| = r$, すなわち $y \in B(a;r) = A$. ゆえに A は開集合である。

(3) 1 点からなる集合、例えば $A = \{0\}$ は開集合ではない。実際 $\forall \varepsilon > 0$ に対して $B(0;\varepsilon)$ は 0 以外の要素 (たとえば $\frac{\varepsilon}{2}e_1$, ここで $e_1 = {}^t(1,0,\cdots,0)$ は第 1 成分が 1 で残りの成分は 0 のベクトル) を必ず含むので $B(0;\varepsilon) \not\subset A$ となるから。

1B$_2$

(1) $\{x_m; m \in \mathbf{N}\}$ を $\mathbf{R}^n$ の収束列とする。$\{x_m\}$ の極限を a とおけば収束の定義から $\exists N > 0$ s.t. $m \ge N$ なる任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して $\|x_m - a\| < 1$. このとき $\|x_m\| \le \|x_m - a\| + \|a\| \le \|a\| + 1$. そこで $\mathbf{R} := \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_m\|, \|a\|+1\}$ とおくと、$\forall m \in \mathbf{N}$ に対して $\|x_m\| \le R$ が成り立つ。ゆえに $\{x_m\}$ は有界である。

(2) $\{x_m; m \in \mathbf{N}\}$ を $\mathbf{R}^n$ の収束列とする。$\{x_m\}$ の極限を a とおけば収束の定義から $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ s.t. $m \ge N$ なる任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して $\|x_m - a\| < \varepsilon/2$. すると $m \ge N, \ell \ge N$ なる任意の $m \in \mathbf{N}, \ell \in \mathbf{N}$ に対して $\|x_m - a\| \le \varepsilon/2$, $\|x_\ell - a\| \le \varepsilon/2$ であるから

$$\|x_m - x_\ell\| = \|x_m - a + (a - x_\ell)\| \le \|x_m - a\| + \|a - x_\ell\| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

ゆえに $\{x_m\}$ は Cauchy 列である。

1C　「連続関数による開集合の逆像は開集合である」という一般的になりたつ命題の証明である。何も見ずに証明せよと言われたら簡単ではないかもしれないが、この種の証明を見慣れていればいくつかの部分は（極論すれば考えないでも）分かってしまうであろう。(ア) $f^{-1}(W)$　(イ) W　(ウ) 開集合　(エ) $\exists$　(オ) $f^{-1}(W)$.

2A　演習問題に一般の n 次元版を出題しておいた (誰も解かなかったが)。u は数理物理や解析学ではよく知られた熱方程式の基本解と呼ばれるもので、熱方程式 $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ を満たすことはその筋では常識である。

$$u(t,x,y,z) = (4\pi t)^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)$$

より

$$
\begin{aligned}
u_t &= \left[-\frac{3}{2}(4\pi)(4\pi t)^{-5/2} + (4\pi t)^{-3/2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)\right]\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right) \\
&= \frac{1}{4t^2}[-6t+(x^2+y^2+z^2)]\cdot\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right), \\
u_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right)\cdot(4\pi t)^{-3/2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right) \\
&= -\frac{x}{2t}\cdot\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right), \\
u_{xx} &= \left[-\frac{1}{2t}+\left(-\frac{x}{2t}\right)^2\right]\cdot(4\pi t)^{-3/2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right) \\
&= \frac{-2t+x^2}{4t^2}\cdot\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right), \\
u_{yy} &= \frac{-2t+y^2}{4t^2}\cdot\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right), \\
u_{zz} &= \frac{-2t+z^2}{4t^2}\cdot\frac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right).
\end{aligned}
$$

これから $u_t = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ がわかる。

2B$_1$

(1) $\forall a\in U\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (\forall x\in U\colon \|x-a\|<\delta)\ \|f(x)-f(a)\|<\varepsilon.$

(2) $\forall a\in U\ \exists A\in M(m,n;\mathbf{R})$ s.t. $f(a+h)-f(a)-Ah=o(\|h\|)\ (h\to 0)$.

(3) f のすべての 1 階偏導関数が存在して、それが U で連続なこと。**詳しく言うと:** $f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ とすると $1\le\forall i\le m,\ 1\le\forall j\le n$ に対して f の偏導関数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\colon U\to\mathbf{R}$ が存在して連続となること。ここで偏導関数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は $a\in U$ に対して f_i の a における x_j に関する偏微分係数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a):=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+he_j)-f(a)}{h}$ を対応させる関数のことである (e_j は第 j 成分が 1 で、他のすべての成分が 0 となるベクトルを表す)。

(4) まず $\begin{array}{ccccc} \text{(d)} & \Longrightarrow & \text{(c)} & \Longrightarrow & \text{(a)} \\ & & \Downarrow & & \\ & & \text{(b)} & & \end{array}$ が成り立つ。矢印を逆向きにしたものは一般には成り立たない。

2B$_2$ もしもそういう f が存在したとすると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(2y)=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(x)=1.$$

となるが、f が C^2 級であることから

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

が成り立つはずで、これは矛盾である。

3A

(1) $f(x,y) = \cos(x^3+xy)$ とすると、

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\sin(x^3+xy)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^3+xy) = -(3x^2+y)\sin(x^3+xy), \\ f_y(x,y) &= -\sin(x^3+xy)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^3+xy) = -x\sin(x^3+xy). \end{aligned}$$

(2) $f(x,y) = \arccos\left(\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)$ とする。

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから、

$$f_x(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right).$$

ここで

$$\sqrt{1-\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{(1+x^2)(1+y^2)}} = \frac{|x+y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\sqrt{1+x^2}\cdot(-y)-(1-xy)\frac{2x}{2}(1+x^2)^{-1/2}}{(\sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{(1+x^2)(-y)-(1-xy)x}{(1+x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-(x+y)}{(1+x^2)^{3/2}(1+y^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

であるから

$$f_x(x,y) = -\frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}{|x+y|}\cdot\frac{-(x+y)}{(1+x^2)^{3/2}(1+y^2)^{1/2}} = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x+y}{|x+y|}.$$

同様にして

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{x+y}{|x+y|}.$$

(3) $f(x,y) = \log\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ とおくと $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(\log|x+y| - \log|x-y|\right)$.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right) = \frac{-y}{x^2-y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y+x}-\frac{1}{y-x}\right) = \frac{-x}{y^2-x^2}.$$

(4) $f(x,y) = \log\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とおくと $f(x,y) = -\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$.

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = -\frac{x}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

3B$_1$

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= [\frac{1}{2}(A(x+h),x+h)+(b,x+h)+c]-[\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c] \\
&= \{\frac{1}{2}[(Ax,x)+(Ax,h)+(Ah,x)+(Ah,h)]+(b,x)+(b,h)+c\}-[\frac{1}{2}(Ax,x)+(b,x) \\
&= \frac{1}{2}[(Ax,h)+(Ah,x)+(Ah,h)]+(b,h) \\
&= (Ax,h)+(b,h)+\frac{1}{2}(Ah,h) \\
&= (Ax+b,h)+\frac{1}{2}(Ah,h).
\end{aligned}
$$

ここで

$$|(Ah,h)| \le \|Ah\|\|h\| \le \|A\|\|h\|^2$$

より

$$\frac{1}{2}(Ah,h)=O(\|h\|^2)=o(\|h\|) \quad (h\to 0)$$

であるから

$$f(x+h)-f(x)-(Ax+b,h)=o(\|h\|) \quad (h\to 0).$$

ゆえに $f'(x)=Ax+b$.

3B$_2$

$$F(x,y,z):=\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}-1$$

とおくと

$$\nabla F=\begin{pmatrix}2x\\ y\\ \frac{2}{3}z\end{pmatrix}$$

であるから、$F(x,y,z)=0$ 上の点 (x,y,z) における法線ベクトルとして $\begin{pmatrix}2x\\ y\\ \frac{2}{3}z\end{pmatrix}$ が取れる。

さて点 (x_0,y_0,z_0) が接点であるための必要十分条件は、次の (1)-(3) が成り立つことである:

$$\frac{(x_0)^2}{1}+\frac{(y_0)^2}{2}+\frac{(z_0)^2}{3}=1, \tag{3}$$

$$x_0+y_0+z_0=k, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix}2x_0\\ y_0\\ \frac{2}{3}z_0\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}. \tag{5}$$

この (5) は

$$\exists\lambda\in\mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix}2x\\ y\\ \frac{2}{3}z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\lambda\\ \lambda\\ \frac{3}{2}\lambda\end{pmatrix}$$

となるが、これを (3) に代入して整理して

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

を得る。(4) に代入して

$$k = x + y + z = \frac{\lambda}{2} + \lambda + \frac{3}{2}\lambda = 3\lambda = \pm\sqrt{6}.$$

4A

$$f_x(x,y) = (1-2x^2)ye^{-x^2-y^2}, \quad f_y(x,y) = (1-2y^2)xe^{-x^2-y^2}$$

であるから

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2x^2)ye^{-x^2-y^2} \\ (1-2y^2)xe^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1-2x^2)y = 0 \\ (1-2y^2)x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad (x,y) = 0 \quad \text{または} \quad (x,y) = \begin{pmatrix} \pm 1/\sqrt{2} \\ \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (\text{複号任意}) \end{aligned}$$

さて

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} f_x = 2xy(2x^2-3)e^{-x^2-y^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}, \\ f_{yx} &= f_{xy} = (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} f_y = 2xy(2y^2-3)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

であるから f の Hesse 行列を H とすると

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy(2x^2-3)e^{-x^2-y^2} & (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \\ (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} & 2xy(2y^2-3)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

(i) $(x,y) = (0,0)$ のとき、$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で $\det H = -1 < 0$ ゆえ、これは不定符号。ゆえに極値点ではない。

(ii) $(x,y) = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ のとき $H = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$. で、$H$ の固有値がともに $-2e^{-1}$ で負なので、H は負値。ゆえに極大となる。極大値は $\dfrac{1}{2e}$.

(iii) $(x,y) = (\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$ (複号同順) のとき、$H = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$ で、H の固有値がともに $2e^{-1}$ で正なので、H は正値。ゆえに極小となる。極大値は $-\dfrac{1}{2e}$.

5A

(1) **定理 14.1 (陰関数定理 (implicit function theorem))** Ω を $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ を C^1 級の関数とする。さらに点 $(a,b) \in \Omega$ において $F(a,b) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ は逆行列を持つとする。
$\Longrightarrow$ $\exists U$: a を含む開集合 $(\subset \mathbf{R}^m)$, $\exists V$: b を含む開集合 $(\subset \mathbf{R}^n)$, $\exists \varphi\colon U \to V$: C^1 級の関数 s.t.

(i) $\varphi(a) = b$.

(ii) $\forall (x,y) \in U \times V$ について

$$F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x).$$

すなわち $U \times V$ において、F の零点集合は φ のグラフに一致する:

$$(U \times V) \cap N_F = \operatorname{graph}\varphi,$$

ただし

$$N_F := \{(x,y) \in \Omega; F(x,y) = 0\}, \quad \operatorname{graph}\varphi := \{(x,\varphi(x)); x \in U\}.$$

(iii) $\varphi'(x) = -\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))^{-1}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))$.

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$ とおくと $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は C^1 級で、$f_y(x,y) = 3y^2 - 2x$. ゆえに $f_y(1,1) = 3 \cdot 1^1 - 2 \cdot 1 = 1 \neq 0$ であるから $(1,1)$ の近傍で $f(x,y) = 0$ は $y = g(x)$ と解ける。$f_x(x,y) = 3x^2 - 2y$ より $f_x(1,1) = 3 \cdot 1^1 - 2 \cdot 1 = 1$ であるから

$$g'(1) = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = -\frac{1}{1} = -1.$$

5B

$$X = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f_1(X,Y) = x + y + z + w, \quad f_2(X,Y) = e^x + e^{2y} + e^z + e^w - 4, \quad f(X,Y) = \begin{pmatrix} f_1(X,Y) \\ f_2(X,Y) \end{pmatrix}$$

とおくと $f\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \ni (X,Y) \longmapsto f(X,Y) \in \mathbf{R}^2$ は C^1 級で、

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(X,Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^x & 2e^y \end{pmatrix}.$$

これから

$$\det \frac{\partial f}{\partial Y}(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

ゆえに $f(X,Y) = 0$ は 0 の近傍で Y について解ける。いいかえると (x,y) について解ける。

15 1994年度

15.1 1994年度 微分積分学I· 同演習 試験問題

(1994 年 7 月 18 日)
以下の 5 問の中から 4 問を選んで解答せよ。

1. 多変数ベクトル値関数について、(1) 微分可能性の定義を書け。(2) 以下の 4 つの条件の間の関係を述べよ。(a) 微分可能, (b) 各変数について偏微分可能, (c) 連続, (d) 連続微分可能。

2. (1) U, V を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon U \to V$ を C^1 級の全単射で逆写像も C^1 級であるものとする。$x \in U$ に対して $f(x) = y$ とおくとき、合成関数の微分法を用いて、$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$ を示せ。
(2) $U = \{(r,\theta); r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$ とおく。$f\colon U \ni (r,\theta) \longmapsto (x,y) \in \mathbf{R}^2$ を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と定めるとき、以下のものを求めよ。
(a) f のヤコビ行列 $f'(r,\theta)$. (b) f^{-1} のヤコビ行列 $(f^{-1})'(x,y)$. (c) $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$.

3. r を正定数とするとき、$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ とおく。(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。
(2) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 (a,b,c) における接平面を求めよ。

4. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

5. (1) 陰関数定理を書け。
(2) 変数 x, y, z, u, v の間に $xy + uv = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2$ の関係があるとする。点 $(x,y,z,u,v) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, 1, 2)$ の近傍において、これを u, v について解けることを示せ。さらに $(x,y,z) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ における $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$ の値を求めよ。

1994 年度 微分積分学 I· 同演習 試験結果について講評

後期の最初の講義で解答例を示し、必要な説明をするが、間が空いてしまうので、いくつかコメントしておく。

1. 多変数ベクトル値関数について、(1) 微分可能性の定義を書け。(2) 以下の 4 つの条件の間の関係を述べよ。(a) 微分可能, (b) 各変数について偏微分可能, (c) 連続, (d) 連続微分可能。

この種の問題は出す[7] と明言していて、練習問題にも含めておいたのだから、点を稼いでもらえると考えていた（大ハズレだった)。解答した人の中では (1) の出来はまあまあだったが、(2) の結果は散々であった。講義で「(a) $\Longrightarrow$ (b)」、「(a) $\Longrightarrow$ (c)」、「(d) $\Longrightarrow$(a)」は証明してある。この三つだけ書いてもらえば良いと考えていた。これから自明に分かる (d)$\Longrightarrow$(b), (d)$\Longrightarrow$(c) 以外は、すべて反例がある。(反例については講義で紹介しなかったかもしれないが、練習問題にしたのだから、成り立つかどうかだけは、自分で調べておくべきである。) (b) という条件が非常に弱いもので、それだけではほとんど何も使いようがないことをもっと強調すべきだったと反省している。「(c)$\Longrightarrow$(a) （つまり、連続 $\Longrightarrow$ 微分可能)」という解答もあったが、ちょっとマズイ（「微分可能ならば連続だけど、逆はダメ」くらいは常識のはず)。

[7] 初回の講義の際に配ったプリントで強調したように、重要な概念は、その定義を書けるようにしなければいけない。

2. (1) U, V を $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon U \to V$ を C^1 級の全単射で逆写像も C^1 級であるものとする。$x \in U$ に対して $f(x) = y$ とおくとき、合成関数の微分法を用いて、$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$ を示せ。
(2) $U = \{(r,\theta); r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$ とおく。$f\colon U \ni (r,\theta) \longmapsto (x,y) \in \mathbf{R}^2$ を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と定めるとき、以下のものを求めよ。
(a) f のヤコビ行列 $f'(r,\theta)$. (b) f^{-1} のヤコビ行列 $(f^{-1})'(x,y)$. (c) $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$.

陰関数定理のところで、定理（陰関数の存在）の証明自体は難しいが、導関数の公式については、暗記しなくても、合成関数の微分法を用いて機械的に導けることを強調した。その逆関数版を尋ねたのが (1) であるが、誰も出来ていなかった（残念）。証明は二行足らず「$f^{-1}(f(x)) = x$ $(x \in U)$ の両辺を微分すると (合成関数の微分法より) $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = I$ (I は単位行列) となることから、 $(f^{-1})'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}$ $\therefore (f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}$.」よーく考えてみよう。 (2) について、ヤコビ行列を知らなかったり、ヤコビ行列式と勘違いした人が少なからずいたのは、ひどい。とはいえ (2-a),(2-b) の出来は全体としてはまあまあであった。 (2-c) は (2-b) の結果からすぐ（計算なしで）出てくるものなのに、独立に計算して間違えている人が大勢いた。複雑で下手をすると訳の分からなくなってしまう計算を見通し良く遂行するために、一見抽象的にも見える定理の存在意義がある[8]のだから、よく検討しておくこと。それから、$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial r}}$ という、よくある間違いがあったが、試験を受ける段階でまだこうしているのはマズイ。行列として逆を取らなければだめ。つまり、

$$f(r,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad f'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}.$$

そして

$$f^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \left(f^{-1}\right)'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

逆関数の微分の公式 $\left(f^{-1}\right)'(x,y) = (f'(r,\theta))^{-1}$ から

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1}.$$

注： $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ という式を使った人がいた。多くの本に載っているが、ウソのある公式なので、使ってはいけない（今回はこれで減点はしなかった）。

3. r を正定数とするとき、$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ とおく。(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。
(2) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 (a,b,c) における接平面を求めよ。

まず ∇ を覚え間違いしている答案があった（重罪）。(2) は $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ とおいて法線ベクトル $\nabla F(a,b,c)$ を求めた人、接線の方程式の拡張になっている公式 $z - c = \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b)$ を使った人、半々くらいだったが、出来はまあまあだった。$c = \sqrt{r^2 - a^2 - b^2}$ であるから、結果は色々な表し方があるが、そこで減点はしなかった。($a(x-a)+b(y-b)+c(z-c) = 0$ とか、$ax + by + cz = r^2$ などがきれいと思うけど。)

[8]それだけではないけど。

4. $f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

これも出来はまあまあである。単純な計算ミスについては、一度間違えても、その後の計算自体が正しければ、中間点をつけている。**細かい注意：**Hesse 行列のことを断りなしに H と書く人がいるが、マズイ。f の gradient を $\mathrm{grad} f$ と書いたり ∇f と書くのは、少なくとも微積分の話をしている時には、常識として認められるが、説明なしに、アルファベット一文字 H で Hesse 行列を表すというのは、ずぼらに過ぎる。講義ではよほど忙しい時以外は、「f の Hesse 行列 H」と書いたし、忙しくて板書しなかった時も、言葉ではしゃべったはずである。(高校数学で 2 次方程式の話をしていて、いきなり D と書いたら、判別式のことであると解釈するのだろうが、こういうものも本当は説明しておくべきである。) それから $2y+2xy=0$ を割算して $x=-1$ とするなど（当然 $2y(1+x)=0$ から $x=-1$ または $y=0$ となる）方程式を解き損ねている人が結構いた。

5. (1) 陰関数定理を書け。
(2) 変数 $x,\ y,\ z,\ u,\ v$ の間に $xy+uv=0,\quad x^2+y^2+z^2=u^2+v^2$ の関係があるとする。点 $(x,y,z,u,v)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1,1,2)$ の近傍において、これを $u,\ v$ について解けることを示せ。さらに $(x,y,z)=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$ における $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$ の値を求めよ。

定理を機械的に覚えているせいか、それとも数学的な言いまわしに慣れていないのか、予想通り (1) の出来がぱっとしない。明確な間違い以外にも、次のような点で採点者の神経が逆撫でされた（今回は甘く採点したけど）：

- $\subset$ と $\in$ の混同
- 開集合であることを明示しないもの（これを省くと正確さが落ちるか、かえって面倒になる）
- 滑らかさの仮定（関数が C^1 級であること）を書き落とすもの
- 同じ条件を断りなしに [9] 異なった表現で二重・三重に書いてあるもの (「C^1 級で、、、微分可能で、、、導関数が連続」 — 解答者が理解しているのか、とても不安になる)
- ヤコビ行列の逆関数と書くもの（やはり「逆行列」としてほしい。行列を線形写像と同一視しているつもりかな？)
- どこまでが仮定で、どこからが（仮定から導かれる）結果なのかの境界が曖昧なもの

ベクトル変数について解く例は講義でやらなかったが、(2) をきちんと解いている人がいたのは心強い。要するに、$F_1(x,y,z,u,v)=xy+uv$, $F_2(x,y,z,u,v)=x^2+y^2+z^2-(u^2+v^2)$, $F=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ とおいて、$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}$ が逆行列を持つことをチェックする。

定理の記号に近付けると、$X=(x,y,z)$, $Y=(u,v)$ として、$F(X,Y)=0$ を Y について $Y=\varphi(X)$ と解く問題となる。

$$\frac{\partial F}{\partial Y}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial X}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

[9] 例えば「すなわち」とか「言い換えると」のような断りの言葉を添えて、複雑なことを言い換えるのは有用で、講義でもよく使った。

より、陰関数 $Y=\varphi(X)$ の導関数は

$$\varphi'(X)=-\left(\frac{\partial F}{\partial Y}(X,\varphi(X))\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial X}(X,\varphi(X))=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

この結果は 2×3 行列であるが、その成分が $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$ になっているわけである (問題 2 と同様)。

15.2 1994 年度 微分積分学 I· 同演習 試験問題 (追)

(1994 年 7 月 23 日)
以下の 7 問の中から 4 問を選んで解答せよ。

1. 多変数ベクトル値関数について以下の問に答えよ。(1) 連続性の定義を書け。(2) 微分可能性の定義を書け。(3) 連続微分可能 ($=C^1$ 級である) とはどういうことか、説明せよ。

2. (1) A を実数を成分とする $m\times n$ 行列, $b\in\mathbf{R}^m$ とする。$f\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ を $f(x)=Ax+b$ で定義するとき、ヤコビ行列 $f'(x)$ を求めよ。 (一般の次元で考えにくければ、$m=n=3$ として解答せよ。) (2) $g\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ を $g(x)=x$ ($x\in\mathbf{R}^n$) で定めるとき、ヤコビ行列 $g'(x)$ を求めよ。

3. $U=\{(r,\theta,t);r>0,-\pi<\theta<\pi,t\in\mathbf{R}\}$ とおく。$f\colon U\ni(r,\theta,t)\longmapsto(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=t$ と定めるとき、以下のものを求めよ。
(1) f のヤコビ行列 $f'(r,\theta,t)$. (2) f^{-1} のヤコビ行列 $(f^{-1})'(x,y,z)$. (3) $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$.

4. 曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (a, b, c は正の定数) 上の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の方程式を求めよ。

5. $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

6. (1) 逆関数定理を書け。
(2) $f=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ を $f_1(x,y)=x^2-y^2$, $f_2(x,y)=2xy$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で f の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の近傍における f の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

7. 条件 $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2=1$ のもとでの $f(x_1,\cdots,x_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^n|x_i|^3$ の最大値と最小値を求めよ。

15.3 1994 年度 微分積分学 I· 同演習 特別試験問題

(1994 年 9 月 18 日)
以下の 5 問の中から 4 問を選んで解答せよ。

1. 多変数ベクトル値関数について、以下の問に答えよ。(i) 連続性の定義を書け。 (ii) 微分可能性の定義を書け。 (iii) 連続微分可能性の定義を書け。 (iv) 微分可能ならば連続であることを示せ。

2. $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定めるとき、以下の問に答えよ。

(i) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ。(ただし $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ とする。)

(ii) f_x, f_y はいずれも原点で不連続であることを示せ。

3. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ の極値を求めよ。

4. $f\colon \mathbf{R}^3 \ni (u,v,w) \longmapsto (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ を $x = u(1-v)$, $y = uv(1-w)$, $z = uvw$ で定める時、f のヤコビ行列式を求めよ。

5. 方程式 $f(x,y,z) = x^2 + (x - y^2 + 1)z - z^3 = 0$ は点 $(0,0,1)$ の近傍で z について解けることを示せ。また、その点における $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ の値を求めよ。

16 1993 年度

16.1 1993 年度 微分積分学 I· 同演習 試験問題

(1993 年 7 月 19 日)

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義を書け。
(2) $\mathbf{R}^N$ の開集合の実例 (全空間、空集合以外のもの) をあげよ。
(3) (2) であげた例が開集合になっていることを示せ。

2. (1) A を実数を成分とする $m \times n$ 行列として、 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を $f(x) = Ax$ で定める。この時 x における f のヤコビ行列を求めよ。
(2) A を n 次実対称行列、$b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ として、$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax,x) + (b,x) + c$ で定める。この時 $\nabla f(x)$ を求めよ。

3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。
(2) f の Hesse 行列を求めよ。
(3) f の極値を求めよ。

4. (1) 陰関数定理を書け。
(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $P = (1,1)$ とする。 $f(x,y) = 0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y = g(x)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

16.2　1993年度 微分積分学I·同演習 試験問題

(1993 年 7 月 24 日)

1.　(1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義を書け。
(2) $\mathbf{R}^N$ の開集合の実例 (全空間、空集合以外のもの) をあげよ。
(3) (2) であげた例が開集合になっていることを示せ。

2.　$a \in \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R}$ として、 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = (a, x) + b$ で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) ∇f を求めよ。
(2) 曲面 $f(x) = 0$ の点 x_0 における接超平面の方程式を求めよ。

3.　$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x, y)$ を求めよ。
(2) f の Hesse 行列を求めよ。
(3) f の極値を求めよ。

4.　(1) 陰関数定理を書け。
(2) $f(x, y) = x^2 + y + \sin xy$, $P = (0, 0)$ とする。 $f(x, y) = 0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y = g(x)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

16.3　1993年度 微分積分学I・同演習 試験問題

(1993 年 7 月 27 日)
以下の 5 問に解答せよ (**1**〜**4** までで 100 点)。途中経過もていねいに書くこと。

1.　(1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義を書け。
(2) $\mathbf{R}^N$ の開集合の実例 (全空間、空集合以外のもの) をあげよ。
(3) (2) であげた例が開集合になっていることを示せ。

2.　(1) A を実数を成分とする $m \times n$ 行列として、 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を $f(x) = Ax$ で定める。この時 x における f のヤコビ行列を求めよ。
(2) A を n 次実対称行列、$b \in \mathbf{R}^n, c \in \mathbf{R}$ として、$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c$ で定める。この時 $\nabla f(x)$ を求めよ。
第 **2** 問のかわりに次の問題を解答してもよい（つまり選択問題)。

2'.　$a \in \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R}$ として、 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) = (a, x) + b$ で定めるとき、次の問に答えよ。
(1) ∇f を求めよ。
(2) 曲面 $f(x) = 0$ の点 x_0 における接超平面の方程式を求めよ。

3.　a を 0 でない実定数とする時、$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x, y)$ を求めよ。
(2) f の Hesse 行列を求めよ。
(3) f の極値を求めよ。

4. (1) 逆関数定理を書け。

(2) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $f_1(x,y) = x^2 - y^2$, $f_2(x,y) = 2xy$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で f の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の近傍における f の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

5. 開集合でない集合の例をあげ、それが開集合でないことを示せ。

16.4 1993 年度 微分積分学 I・同演習 試験問題

(1993 年 7 月 27 日)
以下の 5 問に解答せよ (**1**〜**4** までで 100 点)。途中経過もていねいに書くこと。

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義を書け。
(2) $\mathbf{R}^N$ の開集合の実例 (全空間、空集合以外のもの) をあげよ。
(3) (2) であげた例が開集合になっていることを示せ。

2. $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $f(x,y) = 6x^2 - xy^3 + 2y^4$ のグラフ $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; z = f(x,y)\}$ 上の点 $(1,1,7)$ における接平面と法線を求めよ。

3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。
(2) f の Hesse 行列を求めよ。
(3) f の極値を求めよ。

4. (1) 逆関数定理を書け。

(2) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $f_1(x,y) = x^2 - y^2$, $f_2(x,y) = 2xy$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で f の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の近傍における f の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

5. 開集合でない集合の例をあげ、それが開集合でないことを示せ。

参考文献

[1]