2013年度 多変数の微分積分学1・同演習 追試験問題

2013年8月2日(金) 10:00〜12:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2枚) のみ提出

次の **1** から **6** に解答せよ。

1. (1) $\mathbb{R}^N$ の開集合、閉集合、有界集合の定義を述べよ。

(2) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < 1\}$, $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\}$, $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2-y^2 < 1\}$ とおく。

(a) A, B, C のうち $\mathbb{R}^2$ の閉集合であるものについて，それが閉集合であることを証明せよ。ただし開集合系の公理 (位相の公理) と「$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続とするとき、$\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である」という定理は証明なしで使って良い。

(b) A, B, C のうち $\mathbb{R}^2$ の有界集合でないものについて，それが有界でないことを証明せよ。

2. $\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ について、(a) f は Ω で全微分可能, (b) f は Ω で C^1 級, (c) f は Ω で連続, (d) f は Ω で各変数につき偏微分可能, という 4 つの条件を考える。

(1) 条件 (a), (b), (c), (d) の定義を述べよ。

(2) 条件 (a), (b), (c), (d) 間の関係を述べよ (「○○ならば□□」のような正しい命題をすべて列挙せよ)。

(3) 次式で定義される $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が条件 (a), (b), (c), (d) を満たすかどうか調べよ (もちろん $\Omega = \mathbb{R}^2$ とする)。

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$$

3. C^2 級の関数 $u\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$ と正定数 c があるとき、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad v(\xi,\eta) = u(x,t), \quad \text{すなわち} \quad v(\xi,\eta) := u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right)$$

とおく。

(1) u_x, u_{xx}, u_t, u_{tt} を v の偏導関数で表せ。　(2) v_η, $v_{\eta\xi}$ を u の偏導関数で表し，$\dfrac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = -4v_{\eta\xi}$ を示せ。

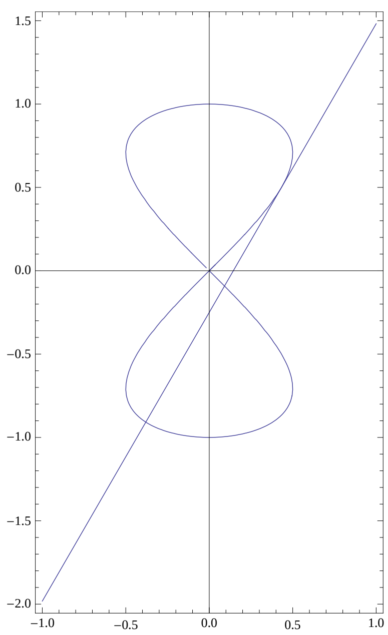
4. $f(x,y) := 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ について、以下の問に答えよ。

(1) f のヤコビ行列 $f'(x,y)$ と Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。

(2) f の極値を求めよ。

(3) f のグラフ $z = f(x,y)$ の $(x,y) = (-1,2)$ での接平面の方程式を求めよ。

5. $F(x,y) := y^2 - y^4 - x^2$, $N_F := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; F(x,y) = 0\}$ とおく。N_F 上の点 $P(\sqrt{3}/4, 1/2)$ の十分小さな近傍で、$F(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、P における接線の方程式を求めよ。また、N_F 上の点で、陰関数定理の仮定が満たされていないもの (全部で 5 個ある) をすべて求めよ。



6. 正数 a, b に対して、方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で定められる平面内の楕円を E とする。点 (x,y) が E 上を動くときの関数 $f(x,y) := x + y$ の最大値，最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ。

1. (2) B が閉集合である。

$B^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \neq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2-1 > 0\} \cup \{(x,y$

(3) C が有界でない。$R \in \mathbb{R}$ に対して，$(x,y) = (R,R)$ とおくと，$x^2-y^2 = R^2-R^2 = 0 < 1$ であるから，$(x,y) \in C$ であり，$\|(x,y)\| = \sqrt{R^2+R^2} = \sqrt{2}|R| > R.$

2. (3) この f は (a), (b), (c), (d) を満たす。まず定義にもとづき計算して、f は x と y について $(0,0)$ で偏微分可能で

$$f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0$$

であることが分る。一方 $(x,y) \neq (0,0)$ では商の微分法で

$$f_x(x,y) = \frac{y^3(y^2-x^2))}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

であることが分り、$(x,y) \to (0,0)$ のとき

$$|f_x(x,y) - f_x(0,0)| \to 0, \quad |f_y(x,y) - f_y(0,0)| \to 0$$

であることが証明できる。

4. (2) $(-5/3,0), (-1,-2), (-1,2), (0,0)$ で，順に負値, 不定符号, 不定符号, 正値なので，極大値 $f(-5/3,0) = \dfrac{125}{27}$, 極小値 $f(0,0) = 0$. (3) $f'(-1,2) = (0\ 0)$, $f(-1,2) = 3$ であるから，$z = 3$.

```
f[x_, y_] := 2 x^3 + x y^2 + 5 x^2 + y^2

sol = Solve[D[f[x, y], {{x, y}}] == {0, 0}, {x, y}]

f[x, y] /. sol

D[f[x, y], {{x, y}, 2}]

D[f[x, y], {{x, y}, 2}] /. sol

Table[Eigenvalues[D[f[x, y], {{x, y}, 2}] /. sol[[i]]], {i, Length[sol]}]
```

5. $(a,b) := (\sqrt{3}/4, 1/2)$ とおく。$F(a,b) = 0$, $F_y(a,b) = 1/2 \neq 0$ であるから陰関数定理によって，(a,b) の近傍で $y = \varphi(x)$ ととける。

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}, \quad \varphi'(a) = -\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)} = \sqrt{3}.$$

ゆえに接線は $y - 1/2 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3}/4)$ である。整理して $y = \sqrt{3}x - 1/4$.

$F(x,y) = 0$ と $F_y(x,y) = 0$ を連立して解くと，$(x,y) = (0,0), (1/2,1/2), (1/2,-1/2), (-1/2,1/2), (-1/2,-1/2)$.t

6. E は閉かつ有界 ($\|(x,y)\| \leq \max\{a,b\}$), f は E 上連続であるから最大値と最小値を持つ。E 上 $\nabla g \neq 0$ であるから，極値点 (x,y) (最大点，最小点を含む) は Lagrange の未定乗数法で求まる。つまり $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$. $g(x,y) = 0$ と連立して解いて

$$(x,y) = \pm\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

$$f\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \sqrt{a^2+b^2}, \quad f\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\sqrt{a^2+b^2}.$$

それぞれ最大値，最小値である。