多変数の微分積分学 1 第 5 回

桂田 祐史

2013 年 5 月 20 日

この授業用の WWW ページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/

宿題の解説

問 3, 問 4 の解説をしないと。結構時間取られるかなあ。
問 4 の前に、次のような定理を追加してあげないと可哀想かも。

命題 0.1 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$, $a \in \overline{\Omega}$ とする。

(1) $\forall x \in \Omega\ f(x) > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

微分についてのイントロ

多変数になると変数の増分 h がベクトルになるので、1 変数の場合の微分係数の定義

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

は (ナンセンスな式になってしまうので) そのままの形では使えない。
多変数関数については、2 つの微分がある。

(1) 全微分 $f'(a)$

(2) 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

1 変数関数の微分 $f'(a)$ と良く対応するのは、全微分の方である (だから同じ記号を使うことにしたし、最近は「全微分」と言わずに単に「微分」と呼ぶ人も増えている[1])。例えば、1 変数実数値関数 f のグラフ $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ であるが、多変数実数値関数 f のグラフ $z = f(\vec{x})$ 上の点 $(\vec{a}, f(\vec{a}))$ における接平面の方程式は $z = f'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + f(\vec{a})$ である。形式上はまったく違いがなく、覚える苦労がない。

[1] 数学の本に書かれている内容はすぐには変化せず、微分積分については、30〜40 年前に書かれた教科書が現在も十分現役として使うことが出来る。しかし、全微分を単に「微分」と呼んだり、それを $f'(a)$ という記号で表す習慣は、比較的新しいと思われる。古い本には見られない。

なお、f がベクトル値 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ である場合、$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}$ となるのは、これまでと同様である。

全微分と偏微分の関係はある意味簡単で、

$$\begin{aligned} f'(a) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right). \end{aligned}$$

つまり

全微分係数は、偏微分係数を成分とする行列である。

5　偏微分

5.1　定義

数学のテキスト、講義では定義から始めるのが普通だが、まずは実例を見せよう。

例 5.1 実定数 a, b, c, d, p, q, r に対して、

$$f(x, y) := ax^2 + bxy + cy^2 + px + qy + r \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

とおいて $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を定めるとき、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + by + p.$$

x で偏微分するときは、他の変数 (ここでは y) を定数と見なして微分する。以下、同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y} = bx + 2cy + q.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2a, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = b, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = b, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2c.$$

ちなみに f の (全) 微分 $f'(x,y)$ は

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax+by+p & bc+2cy+q \end{pmatrix}.$$

これは $\begin{pmatrix} 2ax+by+p \\ bc+2cy+q \end{pmatrix}$ ではない。これは $\nabla f(x,y)$ という記号で表される。■

定義 5.2 (1 点における偏微分係数) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \Omega$, $j \in \{1,\dots,n\}$ とする。f が点 a で変数 x_j について偏微分可能であるとは、極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+he_j) - f(a)}{h}$$

が存在することをいう。ここで e_j は、第 j 成分が 1 で、それ以外の成分がすべて 0 であるような、$\mathbf{R}^n$ のベクトルである。このとき、この極限値 ($\in \mathbf{R}^m$) を f の点 a での変数 x_j についての偏微分係数と呼び、

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f(a), \quad f_{x_j}(a)$$

などの記号で表す。

ベクトル記法を使わずに、成分を用いて表すと

$$\frac{f(a+he_j) - f(a)}{h} = \frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\dots,a_n)}{h}$$

である。

記号 ∂ は、多変数関数の 1 つの変数に関する微分 (偏微分) であることを強調するためのもので、partial ‘d’, round ‘d’, または単に ‘d’ と読まれる (Jacobi に始まるものだそうである)。

偏導関数、高階微分、C^k 級 ($0 \le k \le \infty$) について述べる。

定義 5.3 (偏導関数、高階微分、C^k 級) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ とする。

(1) $j \in \{1,\dots,n\}$ とする。f が Ω で x_j について**偏微分可能**であるとは、$\forall x \in \Omega$ に対して、f は x で変数 x_j について偏微分可能であることをいう。このとき、写像

$$\Omega \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbf{R}^m$$

を f の変数 x_j に関する**偏導関数**と呼び、

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f, \quad f_{x_j}$$

などの記号で表す。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ を f の **1 階偏導関数**と呼ぶ。

(3) $i, j \in \{1, \dots, n\}$ とする。f が Ω で変数 x_j について偏微分可能で、偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ が Ω で変数 x_i について偏微分可能であるとき、$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ を

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad f_{x_j x_i}$$

などの記号で表す。$i = j$ である場合、つまり $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ とも書く。

(4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ を f の **2 階偏導関数**と呼ぶ。

(5) 同様に任意の k $(k \in \mathbf{N},\ k \geq 3)$ に対して、f の $\boldsymbol{k}$ **階偏導関数**が定義される。

(6) $k \in \mathbf{N}$ とする。f が Ω で C^k **級**であるとは、f が Ω で k 階のすべての偏導関数を持ち、それらすべてと f 自身が Ω で連続であることをいう。

(7) f が Ω で C^∞ **級**であるとは、$\forall k \in \mathbf{N}$ に対して、f が Ω で C^k 級であることをいう。

(8) f が Ω で C^0 **級**であるとは、f が Ω で連続であることをいう。f 自身を f の 0 階偏導関数ともいう。

5/20 は上の (3) までやって、問 5 を出題して終わりました。

参考文献

[1] 高木貞治（ていじ）：解析概論 改訂第 3 版, 岩波書店 (1961).

[2] L. シュヴァルツ：シュヴァルツ解析学 2 微分法, 東京図書 (1970).