多変数の微分積分学1 第3回

桂田 祐史

2013年4月29日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/

1 はじめに

1.1 今日の進行計画

- 出欠。
- 問2回収。解説。
- 来週はお休みなので…

1.2 忘れないうちに言っておく

これまでベクトルは $\vec{x}$ のように矢印 $\vec{}$ をつけてきた。$\boldsymbol{x}$ のように太字で表す、という流儀もある。これからは少しサボって、単に x のように書くことにする。(ベクトルとその成分を混同して欲しくないときは、また $\vec{}$ をつけるかも知れない。)

(ここは**第2章「多変数関数」**)

2 連続性 (続き)

2.1 前回証明抜きに述べたことの証明

連続関数を組み立てたものは連続と言い、いくつか定理を述べた (それを使って問2を解いた)。それらの証明をどうするか簡単に説明しよう。

ほとんどは、1変数の場合の証明をマイナー・チェンジすれば良い。
(絶対値 $|\cdot|$ をノルム $\|\cdot\|$ に変える程度)

例えば、「f と g が a で連続であれば、$f+g$ も a で連続である。」の証明をやってみよう。$f+g$ は

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

で定まる関数であることを思い出しておく。

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$$

となるので、$f+g$ は a で連続である。
　和の極限が極限の和になるという

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$

について、前回さらっと言ったが、証明を見ておこう。

$$\lim_{x\to a}f(x)=A,\quad \lim_{x\to a}g(x)=B$$

とする。$\forall\varepsilon>0$ に対して、$\exists\delta_1>0$ s.t.

$$\forall x\in\Omega\cap B(a;\delta_1)\quad \|f(x)-A\|<\varepsilon/2.$$

同様に $\exists\delta_2>0$ s.t.

$$\forall x\in\Omega\cap B(a;\delta_2)\quad \|g(x)-B\|<\varepsilon/2.$$

$\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とおくと、$\delta>0$ であり、$\forall x\in\Omega\cap B(a;\delta)$ に対して、$x\in B(a;\delta_1)$ かつ $x\in B(a;\delta_2)$ であるので、$\|f(x)-A\|<\varepsilon/2$, $\|g(x)-B\|<\varepsilon/2$. ゆえに

$$\begin{aligned}\|f(x)+g(x)-(A+B)\|&=\|(f(x)-A)+(g(x)-B)\|\\&\le\|f(x)-A\|+\|g(x)-B\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

　多変数の多項式関数が連続というのはどう証明するのだろうか? 多項式は、“座標関数” と定数関数から (和と積で) 組み立てられることに気がつけば、次の補題に帰着される。

補題 2.1 (座標関数と定数関数の連続性) $n\in\mathbf{N}$ とする。

(1) $\forall j\in\{1,\cdots,n\}$ に対して、$\varphi_j\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ を $\varphi(x):=x_j$ $(x=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbf{R}^n)$ で定めるとき、φ_j は連続である。

(2) $\forall c\in\mathbf{R}$ に対して、$\psi\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ を $\psi(x):=c$ $(x\in\mathbf{R}^n)$ で定めるとき、ψ は連続である。

証明

(1) $\forall a\in\mathbf{R}^n$ に対して、

$$|\varphi_j(x)-\varphi_j(a)|=|x_j-a_j|\le\|x-a\|$$

であるから、$x\to a$ のとき $\varphi_j(x)\to\varphi_j(a)$.

(2) $\forall a\in\mathbf{R}^n$ に対して、

$$|\varphi_j(x)-\varphi_j(a)|=|c-c|=0$$

であるから、$x\to a$ のとき $\varphi_j(x)\to\varphi_j(a)$. ■

3　連続関数と開集合、閉集合

　1 変数関数の微積分を扱うのにも開集合、閉集合という概念を用いた。多変数関数を扱うには (さらにはこの先の数学では)、1 変数のとき以上に重要となる。それに焦点を合わせた、「集合・距離・位相 x」 $(x=1,2)$ という講義が用意されている。
　ここでは多変数関数の微積分に必要な、最低限のことを用意する。

定義 3.1 (開集合, 閉集合) $A \subset \mathbf{R}^n$ とする。

(i) A が $\mathbf{R}^n$ の開集合であるとは、

$$\forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x;\varepsilon) \subset A$$

が成り立つことをいう

(ii) A が $\mathbf{R}^n$ の閉集合であるとは、$A^c := \mathbf{R}^n \setminus A$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合であることをいう。

次の命題は既に習ったはずである (「集合・距離・位相 1」でも出て来るはず)。

命題 3.2 (開集合系の公理) 次の (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(i) $\emptyset$, $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(ii) 集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ において、$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して U_λ が $\mathbf{R}^n$ の開集合ならば、$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(iii) U_1, U_2 は $\mathbf{R}^n$ の開集合ならば、$U_1 \cap U_2$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

証明 念のため、(iii) だけでも証明しておく。$x \in U_1 \cap U_2$ とすると、$x \in U_1$ で、U_1 は開集合だから、$\exists\varepsilon_1 > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon_1) \subset U_1$. 同様に $\exists\varepsilon_2 > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon_2) \subset U_2$. $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ で、

$$B(x;\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_1) \subset U_1, \quad B(x;\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_2) \subset U_2$$

であるから、$B(x;\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$. ゆえに $U_1 \cap U_2$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。■

命題 3.3 (閉集合系の公理) (1) $\emptyset$, $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。(2) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ において、$\forall\lambda \in \Lambda$ U_λ が $\mathbf{R}^n$ の閉集合ならば、$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。(3) U_1, U_2 は $\mathbf{R}^n$ の閉集合ならば、$U_1 \cup U_2$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。

証明 命題 3.2 の系である。■

授業では時間に余裕があるように感じて、上の二つの命題の証明をていねいにやった結果、最後に時間が足りなくなった。ちょっと失敗だった。

次の命題は非常に便利である。

命題 3.4 (とても便利: 連続関数による逆像の開集合、閉集合の判定) $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が連続関数、$a, b, c \in \mathbf{R}$ とするとき、以下が成立する。

(1) $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; a < f(x) < b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(2) $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \geq a\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \leq b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; a \leq f(x) \leq b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = c\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。

証明

(1) $A := \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$ とする。$x_0 \in A$ とすると、$f(x_0) > a$. $\varepsilon := f(x_0) - a$ とおくと、

$\varepsilon > 0$. f は x_0 で連続だから、

$$\exists \delta > 0 \quad (\forall x \in \mathbf{R}^n : \|x - x_0\| < \delta) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

ゆえに $\forall x \in B(x_0; \delta)$ に対して、$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ であるから、$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$. ゆえに $f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - (f(x_0) - a) = a$. ゆえに $x \in A$. これは $B(x_0; \delta) \subset A$ を意味している。ゆえに A は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\}$ も同様に証明できる。あるいは $F(x) := b - f(x)$ とおくと、$\{x \in \mathbf{R}^n; F(x) > 0\}$ であることから上で証明したことに帰着される。

$\{x \in \mathbf{R}^n; a < f(x) < b\}$ と $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\}$ については、

$$\{x \in \mathbf{R}^n; a < f(x) < b\} = \{x \in \mathbf{R}^n; f(a) > a\} \cap \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\},$$
$$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\} = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < c\} \cup \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > c\}$$

と、命題3.2 の (iii), (ii) による。(後者は、あるいは$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\} = \{x \in \mathbf{R}^n; |f(x) - c| > 0\}$ の方が拡張性があって良いかも。)

(2) $A := \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \geq a\}$ とするとき、

$$A^c = \mathbf{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < a\}$$

は、(1) の2番目より $\mathbf{R}^n$ の開集合である。ゆえに A は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \leq b\}$ が閉集合であることも同様に証明できる。

また $\{x \in \mathbf{R}^n; a \leq f(x) \leq b\}$ については、

$$\{x \in \mathbf{R}^n; a \leq f(x) \leq b\} = \{x \in \mathbf{R}^n; f(a) \geq a\} \cap \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \leq b\}$$

と、二つの閉集合の共通部分になっているから、命題3.3 の (ii) により、閉集合である。

$B := \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = c\}$ の補集合

$$B^c = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = c\}^c = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\}$$

は、(1) より $\mathbf{R}^n$ の開集合であるから、B は閉集合である。 ■

「開球は開集合である」、「閉球は閉集合である」というのは有名で、直接的な計算に基づく証明も良く知られているが、上の命題と系を使うと、次のように見通し良く証明できる。

命題 3.5 (1) $\mathbf{R}^n$ の開球は開集合である。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉球は閉集合である。

証明

(1) $a \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$ とするとき、

$$B(a; r) = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x - a\| < r\}$$

は、$f \colon \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \|x - a\|^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2 \in \mathbf{R}$ (これは多項式関数だから連続) と $b := r^2$ を用いて、

$$B(a; r) = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\}$$

と表されるので、開球 $B(a; r)$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(2) 同様に

$$\overline{B}(a; r) = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x - a\| \leq r\} = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \leq b\}$$

であるから、閉球 $B(a; r)$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。 ■

問　$a \in \mathbf{R}^n$ とするとき、$A := \{a\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である ($\mathbf{R}^n$ のシングルトン (単元集合) は閉集合である) ことを示せ。

(ヒント: この問題をここにおいたのには、理由がある。)

授業で、この問に言及するのを忘れて演習に突入したけれど、手順前後だった。

問 3

問 3　$\mathbf{R}^2$ における次の各集合について、(a) 図示できる場合は図示せよ, (b) 開集合である場合は証明せよ, (c) 閉集合である場合は証明せよ[1]。

(1) $\emptyset$　(2) $\mathbf{R}^2$　(3) $\{(0,0)\}$　(4) $\{(0,0),(1,1)\}$　(5) $(1,2)\times(3,4)$　(6) $[1,2]\times(3,4)$
(7) $[1,2]\times[3,4]$　(8) $\{(x,y); 5 < x^2+y^2 < 6\}$　(9) $(0,\infty)\times(0,\infty)$　(10) $\{(x,y); x^3 \le y \le x^2\}$
(11) $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

[1]開集合、または閉集合である場合、本日の講義で説明したやり方を使って証明できる。そうでない場合はその証明をするため、定義に戻ったりする必要があるが、それは今回要求しない。