多変数の微分積分学1 第2回

桂田 祐史

2013年4月22日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/

1 今日の進行計画

- 出欠。
- 問1回収。解説。
- 今日は問2だけは宿題とすべく頑張る。

2 問1について

ざっとメモ：前回の演習

- 関係ありそうな定義、定理を思い出す。ノートを探す。思い出して書いてみる。
- この講義に限り「成分で書いてみる」というのも有効。
- 似ているものの証明を思い出す。

例えば、

$$(\bigstar) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^n \quad (\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$$

をどのように証明するか、説明を補足しておこう。

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

とおくと、

のように自分で書くことが、何でもないようでいて大事である。後は (★) の式の部分を x_j, y_j, z_j で表せば良い。

$$\vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

であるから

$$(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=\sum_{j=1}^n (x_j+y_j)z_j=\sum_{j=1}^n (x_jz_j+y_jz_j)=\sum_{j=1}^n x_jz_j+\sum_{j=1}^n y_jz_j=(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z}).$$

4　1変数ベクトル値関数の基本的性質

4.1　1変数ベクトル値関数の極限の定義 (続き)

極限を用いると、連続性、微分可能性、微分係数、導関数、k 回微分可能性、k 階微分係数 $\vec{f}^{(k)}(a)$、k 階導関数 $\vec{f}^{(k)}(x)$、C^k 級、C^∞ 級などの概念が定義できる。そのやり方は1変数の場合と (まったくと言って構わないほど) 同じである。

例年誤解する人が多いので、一つだけ書いておくと、$\vec{f}$ が I で C^k 級とは、$\vec{f}', \vec{f}'', \ldots, \vec{f}^{(k)}$ が I で存在して、$\vec{f}^{(k)}$ が I で連続なことをいう。

ベクトル値関数の極限は成分関数の極限を考えれば良い

次の定理は予告してあった。

定理 4.1 I は $\mathbf{R}$ の区間、$\vec{f}\colon I\to\mathbf{R}^m$, $a\in\overline{I}$, $\vec{A}\in\mathbf{R}^m$ とするとき、

$$\lim_{x\to a}\vec{f}(x)=\vec{A} \quad\Leftrightarrow\quad \forall i\in\{1,\ldots,m\}\quad \lim_{x\to a} f_i(x)=A_i.$$

ただし $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}:=\vec{f}$, $\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}:=\vec{A}$ とおいた。

この定理の証明には、次の補題が用いられる。

補題 4.2 任意の $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\in\mathbf{R}^m$ に対して、

$$\max_{j=1,\ldots,m}|x_j|\le\|\vec{x}\|\le\sum_{j=1}^m |x_j|.$$

特に $\forall j\in\{1,\ldots,m\}$ に対して、$|x_j|\le\|\vec{x}\|$.

証明　任意の j に対して、

$$|x_j|=\sqrt{x_j^2}\le\sqrt{x_1^2+\cdots+x_m^2}=\|\vec{x}\|.$$

ゆえに
$$\max_{j=1,\ldots,m} |x_j| \leq \|\vec{x}\|.$$
一方 $\vec{e}_j$ を第 j 成分が 1 で、他の成分は 0 であるような単位ベクトルとすると、$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_m\vec{e}_m$ であるから、
$$\begin{aligned}\|\vec{x}\| &\leq \|x_1\vec{e}_1\| + \cdots + \|x_m\vec{e}_m\| = |x_1|\,\|\vec{e}_1\| + \cdots + |x_m|\,\|\vec{e}_m\| \\ &= |x_1|\cdot 1 + \cdots + |x_m|\cdot 1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|.\blacksquare\end{aligned}$$

定理の証明 ($\Rightarrow$) 任意の $j \in \{1,\ldots,m\}$ に対して、$|f_j(x) - A_j| \leq \left\|\vec{f}(x) - \vec{A}\right\|$ であるから、$\lim_{x\to a} \vec{f}(x) = A$ であれば、$\lim_{x\to a} f_j(x) = A_j$.

($\Leftarrow$) $\forall\varepsilon > 0$ に対して、$\exists\delta_1,\ldots,\delta_m > 0$ s.t.
$$\forall j \in \{1,\cdots,m\} \quad |x-a| \leq \delta_j \quad \Longrightarrow \quad |f_j(x) - A_j| < \frac{\varepsilon}{m}.$$
$\delta := \min\{\delta_1,\ldots,\delta_m\}$ とおくと、$\delta > 0$ で、$|x-a| < \delta$ であれば、$|f_j(x) - A_j| < \dfrac{\varepsilon}{m}$ $(i = 1,\ldots,m)$ であるから、
$$\left\|\vec{f}(x) - \vec{A}\right\| \leq \sum_{j=1}^{m} |f_j(x) - A_j| < \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.\blacksquare$$

4.2 連続性

$\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$ が $a \in I$ で連続であるとは、
$$\lim_{x\to a} \vec{f}(x) = \vec{f}(a)$$
が成り立つことをいう。

$\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$ が I で連続であるとは、$\forall x \in I$ に対して、$\vec{f}$ が x で連続であることをいう。

上の定理から、以下のような系が得られる。

$\vec{f}$ が a (あるいは I) で連続であるためには、$\forall j \in \{1,\ldots,m\}$ に対して、f_j が a (あるいは I) で連続なことが必要十分である。

4.3 微分可能性

$\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$ が $a \in I$ で微分可能であるとは、
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{h}\left(\vec{f}(a+h) - \vec{f}(a)\right) = \lim_{x\to a} \begin{pmatrix} \frac{f_1(a+h)-f_1(a)}{h} \\ \vdots \\ \frac{f_m(a+h)-f_m(a)}{h} \end{pmatrix}$$
が存在することをいう。そのとき、その極限を $\vec{f}'(a)$ と表し、$\vec{f}$ の a における微分係数と呼ぶ。

$\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$ が I で微分可能であるとは、$\forall x \in I$ に対して、$\vec{f}$ が x で微分可能なことをいう。そのとき、関数 $I \ni x \mapsto \vec{f}'(x) \in \mathbf{R}^m$ を $\vec{f}$ の導関数と呼び、$\vec{f}'$ で表す。

$\vec{f}$ が a (あるいは I) で微分可能であるためには、$\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ に対して、f_i が a (あるいは I) で微分可能なことが必要十分条件である。

また $\vec{f}'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix}$.

4.4 $\mathbf{R}^m$ 内の曲線

$\mathbf{R}$ の区間 I で定義された連続関数 $\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$ があるとき、$\vec{f}$ の値域

$$\vec{f}(I) = \left\{\vec{f}(t); t \in I\right\}$$

は $\mathbf{R}^m$ の部分集合であるが、直観的には曲線であると考えられる (図を描こう)。

数学では、$\mathbf{R}^m$ 内の曲線とは、$\mathbf{R}$ のある区間 I から $\mathbf{R}^m$ への連続写像のことであると定義する (場合が多い)。

上のように定義した連続曲線の中には、「曲線」らしくないものも含まれている。

例 4.3 (Peano (ペアノ) 曲線 (Peano curve)) 連続曲線 $\vec{f}\colon I = [0,1] \to \mathbf{R}^2$ で、像が正方形である、すなわち

$$\vec{f}(I) = [0,1] \times [0,1]$$

が成り立つようなものが存在する (平面や空間を「充填する」曲線については、ザーガン [1] を見よ)。 ■

微分係数 $\vec{f}'(a)$ の意味

$\vec{f}'(a)$ が存在し、$\vec{f}'(a) \neq \vec{0}$ であれば、それは、$\vec{f}$ を曲線と考えたときの、$\vec{f}(a)$ における接線の方向を表すベクトルである。

例 4.4 $I := \mathbf{R}$, $\vec{f}(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $a = 1$ とする。$\vec{f}'(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるが、これは確かに $\vec{f}(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ における接線の方向ベクトルである。実際、この曲線は、関数 $F(x) := x^2$ のグラフ $y = F(x)$ であり、$x = 1$ における接線の傾きは $F'(1) = 2$ であり、確かに $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は接線の方向を与えるベクトルである。 ■

$\vec{f}'(a) = \vec{0}$ である場合は、たとえ $\vec{f}$ が C^1 級であっても、接線が引けない (存在しない) 場合もある。

例 4.5 $\vec{f}(t) := \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ は、$t = 0$ のところで、とがった曲線となっている (関数 $y = |x|^{2/3}$ のグラフ)。 ■

4.5 C^k 級

I は $\mathbf{R}$ の区間で、$\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$ とする。

- $k \in \mathbf{N}$ とする。$\vec{f}$ が C^k 級とは、$\vec{f}$ が k 回微分可能で、$\vec{f}^{(k)}$ が連続であることをいう。
- $\forall k \in \mathbf{N}$ に対して $\vec{f}$ が C^k 級であるとき、$\vec{f}$ は C^∞ 級であるという。
- $\vec{f}$ が連続であるとき、$\vec{f}$ は C^0 級であるという。

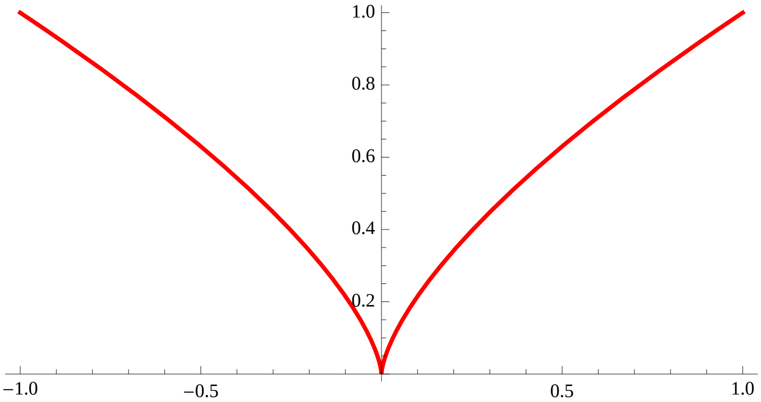

図 1: `ParametricPlot[{t^3,t^2},{t,-1,1}]`

もちろん、$\vec{f}$ が C^k 級であることは、各 f_i が C^k 級であることと同値である。

切なる願い: 間違えるな

$\vec{f}$ が C^1 級とは、$\vec{f}$ が 1 回微分可能かつ連続であることでは**ない！**

(ここから**第2章「多変数関数」**)

忘れないうちに言っておく (忘れた)　これまでベクトルは $\vec{x}$ のように矢印 $\vec{}$ をつけてきた。$\boldsymbol{x}$ のように太字で表す、という流儀もある。これからは少しサボって、単に x のように書くことにする。(ベクトルとその成分を混同して欲しくないときは、また $\vec{}$ をつけるかも知れない。)

1　多変数関数の極限

最初に記号から。$\vec{a} \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$ に対して、

$$B(\vec{a}; r) := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n; \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}.$$

これを $\vec{a}$ を中心とする半径 r の**開球**と呼ぶ。

問　$n = 1, 2, 3$ の場合にどういう集合か図を描いて説明せよ。

ついでに閉球 ($\vec{a}$ を中心とする半径 r の閉球) も定義しておく。

$$\overline{B}(\vec{a}; r) := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n; \|\vec{x} - \vec{a}\| \le r\}.$$

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ に対して、

$$\overline{\Omega} := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n; \forall \varepsilon > 0 \quad \Omega \cap B(\vec{x}; \varepsilon) \ne \emptyset\}$$

とおき、Ω の**閉包**と呼ぶ。図形的には、Ω に Ω の縁を加えたものである (後でもう少し詳しく説明する)。

例 1.1 $\Omega = (1, 2)$ のとき、$\overline{\Omega} = [1, 2]$. $\Omega = (1, 2) \times (3, 4)$ のとき、$\overline{\Omega} = [1, 2] \times [3, 4]$. $\Omega = B(\vec{a}; r)$ のとき、$\overline{\Omega} = \overline{B}(\vec{a}; r)$. ■

$\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(x) = \vec{A}$ とはどういう意味だろうか? $\vec{x} \to \vec{a}$ の意味が問題であるが、結論から先に言うと、$\vec{x}$ と $\vec{a}$ との距離 $\|\vec{x} - \vec{a}\|$ が $\to 0$ となること、と約束する。

定義 1.2 (多変数関数の極限) $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega}$, $\vec{A} \in \mathbf{R}^m$ とするとき、

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad (\forall \vec{x} \in \Omega : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta) \quad \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{A}\right\| < \varepsilon.$$

ここで図を描いて説明する。$\vec{x}$ が $\vec{a}$ に近づくというのは、1 変数の場合とは大きく様子が異なる。1 次元では、方向は 1 つしかなかったが、2 次元以上では、直線に沿った場合だけを考えても、無限に多くの方向が存在するし、曲線に沿って接近したりする場合もある。

記号の約束:　A と B の差集合 $A \setminus B := \{x \in A; x \notin B\}$.

例 1.3 (極限の存在する例) $\Omega := \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を

$$f(x, y) := \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

で定める。実は

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

である。実際、$(x,y)\in\Omega$ とするとき

$$|f(x,y)-0|=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y|\le\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\cdot|y|=|y|\le\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)-(0,0)\|\to 0.\blacksquare$$

(別解: 極座標を使うと $f(x,y)=\frac{r^2\cos^2\theta\cdot r\sin\theta}{r^2}=r\cos^2\theta\sin\theta$ なので $|f(x,y)|\le|r|\to 0$ と出来て見通しが良い。)

例 1.4 (極限の存在しない例) $\Omega:=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ を

$$f(x,y):=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

で定める。

(i) 点 (x,y) を、x 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると、

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0}0=0.$$

(ii) 点 (x,y) を、y 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると、

$$\lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

(iii) 点 (x,y) を、直線 $y=kx$ (ここで k はある実定数) に沿って $(0,0)$ に近づけると、

$$\lim_{x\to 0}f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

これは $k=0$ でない限り、0 ではない。

以上より、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ は存在しない。実際、もしも $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=A$ となる A が存在すれば、

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{x\to 0}f(x,kx)=A$$

となるはずだが、$0=0=\dfrac{k}{1+k^2}=A$ となって矛盾が生じる。 $\blacksquare$

このような不定形の極限が重要かつ難しいが、その演習は後日にまわす。

問 $\Omega:=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x>0\wedge y>0\}$, $f\colon\Omega\ni(x,y)\mapsto x^y\in\mathbf{R}$ とするとき、

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y),\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y),\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y),$$

を求めよ。

極限に関する色々な命題、多くはこれまでと同様のものが成り立ち、同様に証明出来る (証明に $\vec{\ }$ や $\|\cdot\|$ をつけるだけ、というのが多い)。

2 連続関数

$\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $\vec{f}\colon\Omega\to\mathbf{R}^m$ とする。
$\vec{f}$ が連続であるとは、

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(\vec{a})$$

が成り立つことである。

問　ε-δ 論法で書いてみよう。
(解答)

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall\vec{x}\in\Omega\quad \|\vec{x}-\vec{a}\|<\delta\quad\Longrightarrow\quad \left\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\right\|<\varepsilon.$$

あるいは

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta>0,\quad \forall\vec{x}\in\Omega\cap B(\vec{a};\delta)\quad \left\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{a})\right\|<\varepsilon.\blacksquare$$

微積分で扱う多くの関数は、定義域全体で連続である。そのことを経済的に証明する方法を学ぼう。

連続関数を組み立てたものは連続である

連続関数を “組み立てたもの” は連続関数 (実は微分可能な関数を組み立てたものは微分可能な関数、のように他での「応用」がある考え方)

- $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$, $g\colon\Omega\to\mathbf{R}$ がともに連続ならば、$f+g$, $f-g$, fg はいずれも Ω から $\mathbf{R}$ への連続関数。$g\neq 0$ (on Ω) ならば f/g も Ω から $\mathbf{R}$ への連続関数。
- 連続関数の和、差、内積、ノルム、実数値関数倍、実数値関数による商 $\vec{f}+\vec{g}$, $\vec{f}-\vec{g}$, $\left(\vec{f},\vec{g}\right)$, $\left\|\vec{f}\right\|$, $k\vec{f}$, $\dfrac{1}{k}\vec{f}$ (ただし $k\neq 0$) も連続である。
- $f=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$ について、f が連続 $\iff$ すべての $i\in\{1,\dots,m\}$ について f_i が連続。
- 連続関数の合成関数 $\vec{g}\circ\vec{f}$ は連続関数。
- n 変数実係数多項式は $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数を定める: $f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}[x_1,\dots,x_n]$ ならば、$\mathbf{R}^n\ni(x_1,\dots,x_n)\mapsto f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}$ は連続。
- 高校生以来知っている (切れていないグラフが思い浮かべられる) 指数関数 $e^x=\exp x$, a^x (ただし $a>0$, $a\neq 1$)、対数関数 $\log x$ ($x>0$)、三角関数 $\cos x$, $\sin x$、$\sqrt{x}$ ($x\geq 0$), 冪乗関数 $x\mapsto x^\alpha$ ($x>0$), n 乗根 $\sqrt[n]{x}$ ($x\in\mathbf{R}$ または $x\in[0,\infty)$) 絶対値 $|x|$ は、は、それらの定義域上で連続である。
- 大学に入ってから教わった逆三角函数 $\arctan x$, $\arcsin x$ ($x\in[-1,1]$), $\arccos x$ ($x\in[-1,1]$) もそれらの定義域上で連続である。

これらの関数の多くは C^∞ 級であることが分かり、証明も同様である (ただし $\sqrt{x}$ が C^∞ 級であるのは、$x>0$ の範囲で、$x=0$ を含めると成り立たなくなる、などの注意は必要である)。

例 2.1 $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6$ は 2 変数の多項式関数であるから、$\mathbf{R}^2$ 上の関数として連続である。

$\varphi(x,y)=\sin(x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6)$ は、$g(z)=\sin z$ とすると、$\varphi=g\circ f$. f も g も連続関数であるから、合成関数 φ は連続である。$\blacksquare$

問 2　次の各関数が $\mathbf{R}^2$ で連続であることを示せ (理由を述べよ)。
(1) $f(x,y)=x^2+\sqrt{2}xy+(\log 3)y^2+\frac{\pi}{4}x+e^5y+6$　(2) $g(x,y)=\exp(3x+2y+1)$
(3) $h(x,y)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+y^2+1}$　(4) $\varphi(x,y)=\log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)$　(5) $F(x,y)=\begin{pmatrix}x^3-3xy^2\\ 3x^2y-y^3\end{pmatrix}$

参考文献

[1] H. ザーガン著, 鎌田清一郎訳：空間充填曲線とフラクタル, シュプリンガーフェアラーク東京 (1998), H. Sagan, Space-Filling Curves, Springer (1994) の翻訳.