課題10解説

桂田祐史

2013年7月17日

1　課題

(1) Mathematica に、$\cos\frac{2\pi}{n}$ $(n=1,2,\ldots,20)$ を計算させなさい。(結果を見て納得が行きますか?)

(2) $\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2^k}$, $\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{2^k}$ を計算せよ (なるべくユーザー定義関数を使うこと)。また、それらの値を正確に小数に直せ (十進法では有限小数というのはすぐ分かりますね？)。

(3) 与えられた $\alpha>0$ に対して、$\sqrt{\alpha}$ の近似値を求めるために Newton 法

$$x_1 \text{ は適当に与える},$$
$$x_n = x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^2-\alpha}{2x_{n-1}}=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{\alpha}{x_{n-1}}\right)\quad (n=2,3,\cdots)$$

が利用できる[1]。実際にこれを用いて $\sqrt{3}$, $\sqrt{21}$ の近似値を求めよ。やはり計算の仕方を工夫すること。また得られた結果の精度についても検討せよ。

(4) 次のどちらか一方を解け。

(a) 図1を再現せよ。(色々な描き方があります。楕円面と平面は別々に描いてから合成出来ることを知っておくと、自由度が上がるかも。)

(b) 円錐を描け。ただし Mathematica の命令 `Cone[]` は使わないでやること。

(注意　3次元グラフィックスは、EPS 形式で出力すると、ファイル・サイズが非常に大きくなり、TEX 文書に取り込めなかったり、Oh-o! Meiji にアップロード出来なくなったりするので、一度 JPEG 形式で出力してから、jpeg2ps で EPS 形式に変換することを勧めます。)

2　解説

(1) $\cos\frac{2\pi}{n}$ を与える関数を定義しておきましょう。

```
f[n_]:=Cos[2Pi/n]
```

$n=1,2,\cdots,20$ に対して計算するには、`Table[]` が便利でしょう。

[1] Newton 法の一般式は $x_{n+1}=x_n-f'(x_n)^{-1}f(x_n)$ で、$f(x)=x^2-\alpha$ について適用すると上の式が得られる。

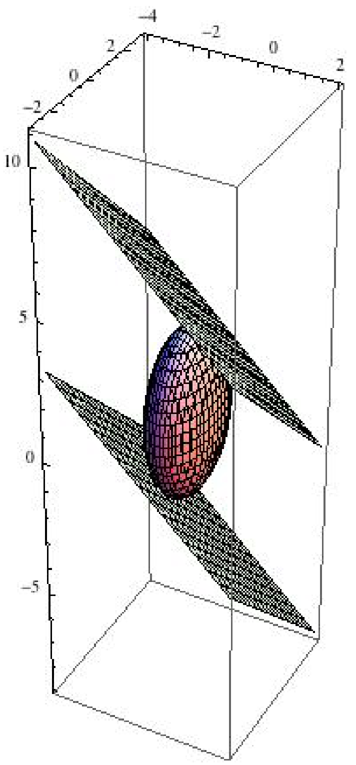


図 1: $\dfrac{(x+1)^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{(z-1)^2}{9}=1$ と接平面 $x+y+z=\pm\sqrt{14}$ (訂正しました)

Table$[f[n],\{n,1,20\}]$

$$\left\{1,-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}\right),\frac{1}{2},\mathrm{Sin}\left[\frac{3\pi}{14}\right],\frac{1}{\sqrt{2}},\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi}{9}\right],\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right),\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi}{11}\right],\frac{\sqrt{3}}{2},\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi}{13}\right],\right.$$
$$\left.\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{7}\right],\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi}{15}\right],\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{8}\right],\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi}{17}\right],\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi}{9}\right],\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi}{19}\right],\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{\sqrt{5}}{8}}\right\}$$

$p_k := 2^{2^k}+1$ $(k=0,1,2,\cdots)$ とおくとき、$n=2^m \displaystyle\prod_{p_k\ \text{素数}} p_k^{e_k}$ $(m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ e_k=0,1)$ の形をした自然数 n に対して，$\cos\dfrac{2\pi}{n}$ は定規とコンパスで作図できることは、良く知られていますが、$\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\cos\dfrac{2\pi}{17}$ は計算してくれていません。特に前者はそんなに面倒な形にならないはずですが…後者はすさまじい形になりますが、見たことありますか？

注意　横に長い式をどうやって 2 行に切るかですが、簡単に切れない理由は，`\left` と `\right` ではさんであるせいです。そこで、(1) `align*` 環境を使う，(2) `\left\{` 長い式 `\right\}` を

```
\left\{  式の前半  \right.  \\
\left.   式の後半  \right \}
```

としてみました。これは TEX の知識を使った解決策ですが，Mathematica の段階で二つに分けて表示するのも考えられます。例えば

```
Table[f[n],{n,1,5}]

Table[f[n],{n,6,10}]
```

(2) やはり $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$ を計算する関数を作ろう。

```
f[n_]:=Sum[1/2^k, {k, 1, n}]

f[{3, 5, 10, 50}]
```

$\left\{\frac{7}{8}, \frac{31}{32}, \frac{1023}{1024}, \frac{1125899906842623}{1125899906842624}\right\}$

```
N[%, 20]
```

$\{0.87500000000000000000, 0.96875000000000000000, 0.99902343750000000000, 0.99999999999999911182\}$

これから (小数表示については「多分」)

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2^k}=\frac{7}{8}=0.875,$$
$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2^k}=\frac{31}{32}=0.96875,$$
$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2^k}=\frac{1023}{1024}=0.9990234375,$$
$$\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{2^k}=\frac{1125899906842623}{1125899906842624}=0.99999999999999911182\cdots(\text{まだ途中})$$

結果を眺めていると、分母が 2^n であることに気づく (等比数列の和の公式を思い出せば、そうなることを証明も出来るでしょう)。分母が 10^n, 分子が整数の形に出来るので、小数点以下 n 桁あれば正確に小数表示できるはずです。そこで

g[n_]:=$N[f[n],n+5]$

Table[$g[n]$, $\{n,\{3,5,10,50\}\}$]

$\{0.87500000, 0.9687500000, 0.999023437500000, 0.99999999999999911182158029987476766109466552734375 0000\}$

5 桁分の余裕をみて、小数表示してみた。これから

$$\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{2^k}=\frac{1125899906842623}{1125899906842624}=0.99999999999999911182158029987476766109466552734375$$

らしいことが分ります。

大体期待通りですが、最後だけ 0 が 5 個でなく 4 個しかついていません (小数点以下 55 桁まで表示してくれるように指示したつもりですが 54 桁までしか表示していません)。この理由は分かりません (関数 `N[]` の仕様の問題？)。本当にそれ以降 0 が続くのか続かないのか、不安ならば $f[n]$ に 10^n をかけたものを計算してみれば良いでしょう。

g[n_]:=$f[n]10$^n

$g[\{3,5,10,50\}]$

$\{875, 96875, 9990234375, 99999999999999911182158029987476766109466552734375\}$

これから、既に上にあげた $n=3,5,10,50$ の場合の小数表示が正しいことが分ります。

(3) 「簡単なユーザー関数の定義の仕方と応用例 (2) 数列」[2] を参考に、漸化式を用いて数列を計算する関数 `x[]` を作ってみましょう。

まず $\sqrt{3}$ の計算です。

[2] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/syori2/mathematica/node47.html

$$\boldsymbol{a = 3}$$

3

$$\mathbf{Clear}[\boldsymbol{x}]$$

$$\boldsymbol{x[1] = 1; x[\mathrm{n\_}] := x[n] = (x[n-1] + a/x[n-1])/2}$$

$$\boldsymbol{t = \mathrm{Table}[x[n], \{n, 1, 10\}]}$$

$$\left\{1, 2, \tfrac{7}{4}, \tfrac{97}{56}, \tfrac{18817}{10864}, \tfrac{708158977}{408855776}, \tfrac{1002978273411373057}{579069776145402304}, \tfrac{2011930833870518011412817828051050497}{1161588808526051807570761628582646656}, \tfrac{80957313605578358908887795350602568324}{46740726803049617901689623601446146504}\right.$$

$$\boldsymbol{\mathrm{nt} = N[t, 100]}$$

$\{1.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000,$

また 1 行に入りきれなくて切れてしまったので，`For[]` で 1 つずつ表示してみました。

$$\boldsymbol{\mathrm{For}[i = 1, i \leq 10, i{+}{+}, \mathrm{Print}[\mathrm{nt}[[i]]]]}$$

```
1.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
2.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
1.750000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
1.732142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857
1.732050810014727540500736377025036818851251840942562592047128129602356406480117820324005891016200295
1.732050807568877295254353946072171914235106709119843766130382367399892132134144045943477144370830657
1.732050807568877293527446341505872367803695090781956670601323765974617986239595656743311872455814923
1.732050807568877293527446341505872366942805253810380628055806979451933017122746218152244676740665957
1.732050807568877293527446341505872366942805253810380628055806979451933016908800037081146186757248576
1.732050807568877293527446341505872366942805253810380628055806979451933016908800037081146186757248576

0.1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890
```

第 9 項と第 10 項が 100 桁 (小数点以下 99 位まで) 一致しています。階差数列を概算すると、

$$\boldsymbol{N[\mathrm{Table}[x[n+1] - x[n], \{n, 1, 10\}]]}$$

{1., −0.25, −0.0178571, −0.0000920471, −2.4458502452463823*^-9, −1.7269076045662993*^-18,
−8.60889836971576*^-37, −2.139461810710985*^-73, −1.321351781220397*^-146, −5.040182776696304*^-293}

大きさを対数で測って $\cdots, -9, -18, -37, -74, -146, -293, \cdots$ ($10^{\text{何とか}}$ の何とかに注目) ほぼ倍々ゲームで小さくなっていく。いわゆる 2 次の収束 (1 回進むごとに合っている桁が 2 倍になる) をしていることが見えます。

ためしに 2 乗してみると

nt2 = nt ∗ nt

{1.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000,

右に切れてしまうので、やはり一つずつ表示する。

For[i = 1, i ≤ 10, i++, Print[nt2[[i]]]]

```
1.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
4.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
3.0625000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
3.000318877551020408163265306122448979591836734693877551020408163265306122448979591836734693877551020
3.000000008472673796907433395294561655037187582015482354063955266451356820759975793909869187339086979
3.0000000000000000005982183422171789083280224723096843645478347909940608891391727028814125826072538466
3.0000000000000000000000000000000000002982209874708914802069006752611708656519068861557466113530048558
3.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000741131311400946776801037944
3.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
3.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
```

第 9 項と 10 項の 2 乗が 100 桁まで $3 = 3.000\cdots$ に一致しています。

次は $\sqrt{21}$ の計算です。上で `x[n]=` として (`x[1]`, $\cdots$, `x[100]` を) 記憶してあるので、一度メモリーを `Clear[x]` とクリアしないといけません。以下では、コマンド末尾に `;` を添えて、無駄な表示 (右に出てしまって見えない) を抑制しています。

$a = 21$

21

$\text{Clear}[x]$

$x[1] = 1; x[\text{n\_}] := x[n] = (x[n-1] + a/x[n-1])/2$

$t = \text{Table}[x[n], \{n, 1, 10\}];$

$\text{nt} = N[t, 100];$

$\text{For}[i = 1, i \leq 10, i\text{++}, \text{Print}[\text{nt}[[i]]]]$

1.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
11.00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
6.454545454545454545454545454545454545454545454545454545454545454545454545454545454545454545454545455
4.854033290653008962868117797695262483994878361075544174135723431498079385403329065300896286811779770
4.590166210085143362995652146011967828650037439572327613314234704406386039312057568788670248391381839
4.582581970972577874826058268143871741429251102114582971582791894828073716964303996563838799244701507
4.582575694960137625958906231599088438114364684017955051668860085467833758913271691467672012135961424
4.582575694955840006588049208919189847472971259415440581202188713003057071516895036553568714221301395
4.582575694955840006588047193728008488984456576768414993542095100114303776977721613160813589346870422

4.582575694955840006588047193728008488984456576767971902607242123906868425547770886604361559493445054

$\text{Table}[\text{Print}[N[x[n+1] - x[n]]], \{n, 1, 10\}];$

10.
−4.54545
−1.60051
−0.263867
−0.00758424
−6.2760124402488675*^-6
−4.297619370857023*^-12
−2.015191181358489*^-24
−4.430909348529762*^-49
−2.142131299271166*^-98

$\text{nt2} = \text{nt} * \text{nt};$

$\text{For}[i = 1, i \leq 10, i\text{++}, \text{Print}[\text{nt2}[[i]]]]$

1.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
121.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
41.66115702479338842975206611570247933884297520661157024793388429752066115702479338842975206611570248
23.56163918676767858928685604489467359388551071298001019737327468477492823311654351671664253944104623
21.06962583620740847566406310733845135253221440291207524598889548298074569989837304426792095454729051
21.00005752068291656814353073413223588167772593349056382300124611868133442455063707720557749412670432
21.00000000003938833215015854028423938764862019773707796473296569894013381637482881494380117510373261
21.00000000000000000000001846953225676551144005747342616677288423158519818242890211610801765312400808
21.00000000000000000000000000000000000000000000000406099549742502054768503261455963835819354313608293
21.00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000020

こちらも大体うまく行っているようです。$\sqrt{3}$ と比べて $\sqrt{21}$ は大きいので、初期値 1 の精度が不十分なせいか、第 10 項は、まだ 100 桁精度になっていないようです。

上では、関数の再帰的定義を用いましたが、十進 BASIC でやったように、`For[]` で計算することも可能です。というか、こちらの方が素直かもしれません。

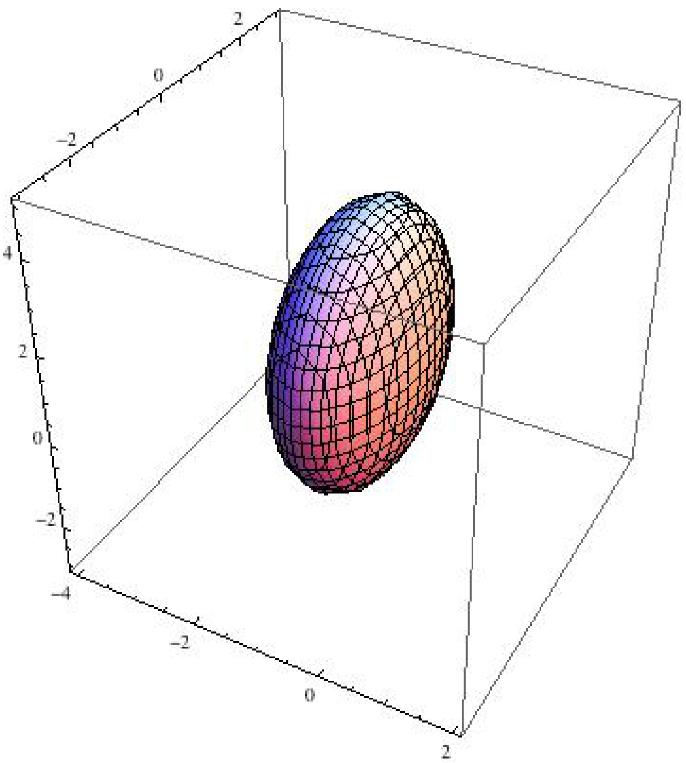
```
x[1] = 1

1

For[i = 1, i ≤ 10, i++, x[i + 1] = (x[i] + a/x[i])/2]
```

(4) $(x+1)^2/1 + y^2/4 + (z-1)^2/9 = 1$ を描くには、素直に等値面として

```
g1 = ContourPlot3D[(x + 1)^2/1 + y^2/4 + (z − 1)^2/9 == 1, {x, −4, 2}, {y, −3, 3}, {z, −3, 5}]
```

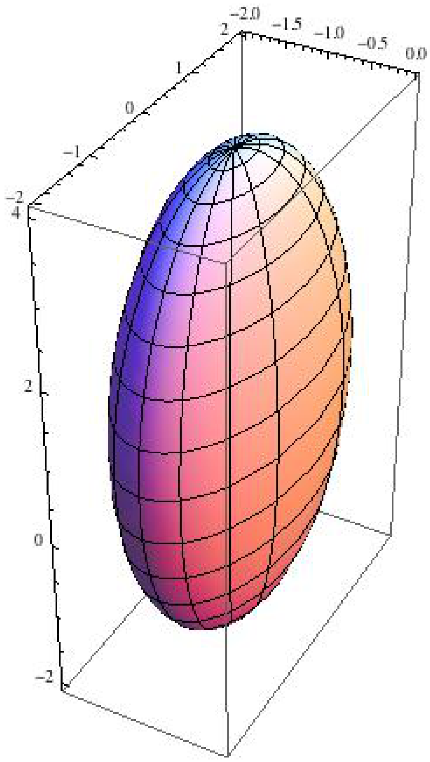


あるいは

$$\begin{cases} x+1 &= \sin\theta\cos\phi \\ y &= 2\sin\theta\sin\phi \qquad (\theta\in[0,\pi],\ \phi\in[0,2\pi]) \\ z-1 &= 3\cos\theta \end{cases}$$

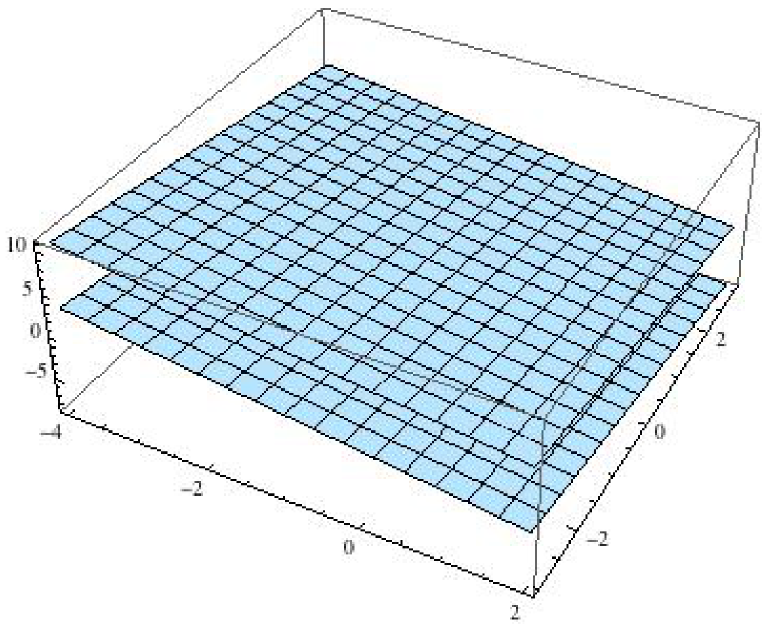
というパラメーター表示を使って、

```
g1a = ParametricPlot3D[{-1 + Sin[t]Cos[p], 2 * Sin[t]Sin[p], 1 + 3Cos[t]}, {t, 0, Pi},{p, 0, 2Pi}]
```



接平面はグラフ $z = -x - y \pm \sqrt{14}$ として描くのが簡単そうです。

```
g2 = Plot3D[{-x - y - Sqrt[14], -x - y + Sqrt[14]}, {x, -4, 2}, {y, -3, 3}]
```



```
Show[g1, g2, BoxRatios → Automatic, PlotRange → All]

Show[g1a, g2, BoxRatios → Automatic, PlotRange → All]
```

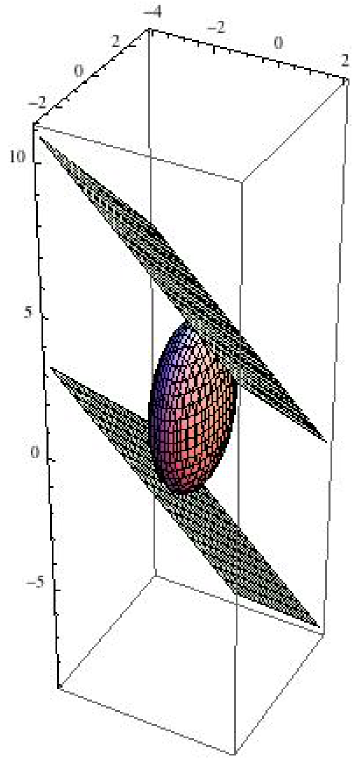


図 2: `ContourPlot3D[]` 使った方

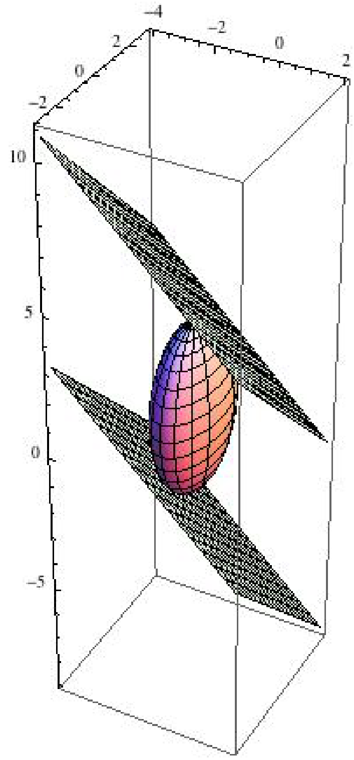
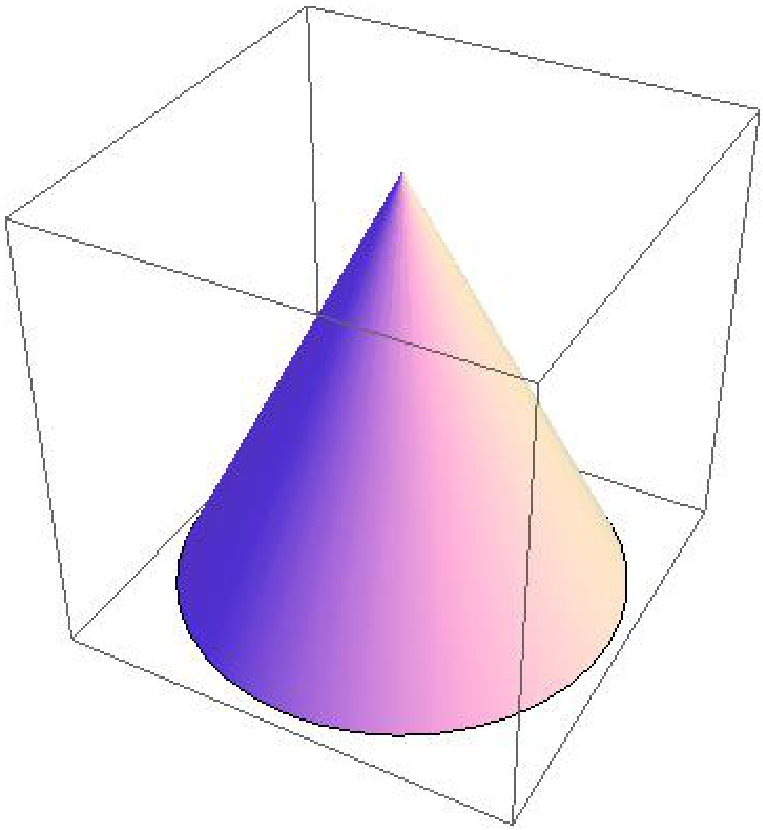


図 3: `ParametricPlot3D[]` 使った方

(5) まず、課題の指示とは違うけれど、Mathematica のグラフィックス・プリミティブ `Cone[]` を使って描いてみます。

```
Graphics3D[Cone[]]
```



Mathematica のグラフィックス・プリミティブに慣れるというのも有意義なのですが，ここは円錐を式で表現して描くという問題です。

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ で OK のはず。

```
Plot3D[Sqrt[x^2 + y^2], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}]
```

イメージと違う。いや、まあ正しいんだけど。

ひっくり返して、高くしましょう。ついでに描画範囲を円盤にすると、ミッキーの帽子風になります。

```
Plot3D[−5Sqrt[x^2 + y^2], {x, −1, 1}, {y, −1, 1},
    RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 < 1], BoxRatios → Automatic]
```

パラメーター曲面

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=-5r$$

としても表せます。

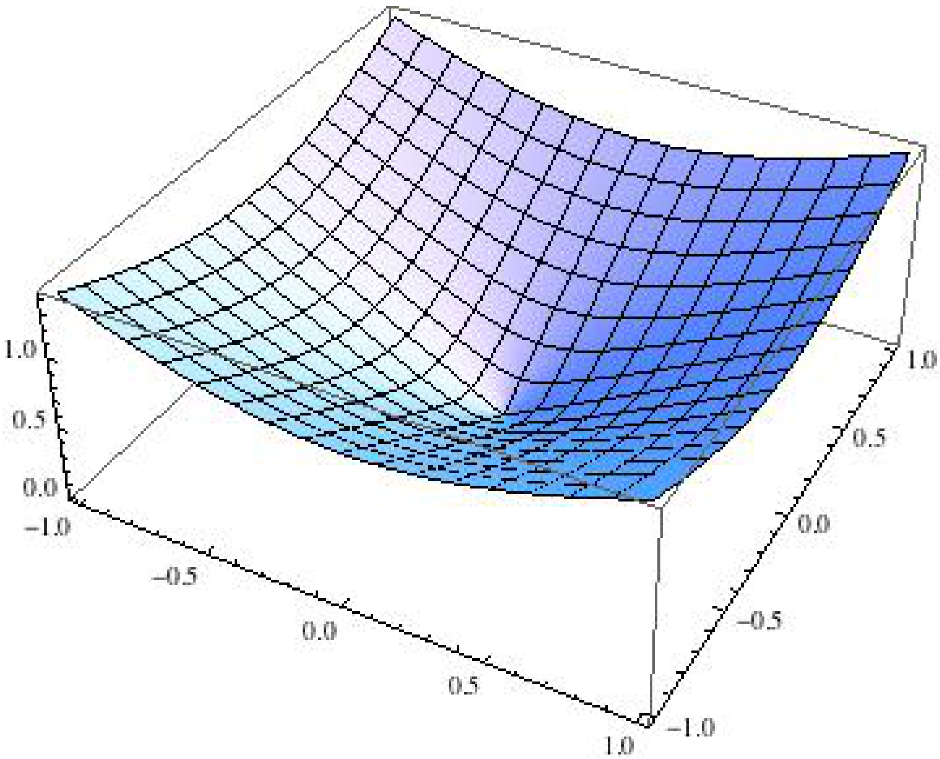


図 4: $z = \sqrt{z^2 + y^2}$

```
ParametricPlot3D[{r * Cos[t], r * Sin[t], −5 * r}, {r, 0, 2}, {t, 0, 2Pi},

BoxRatios → Automatic]
```

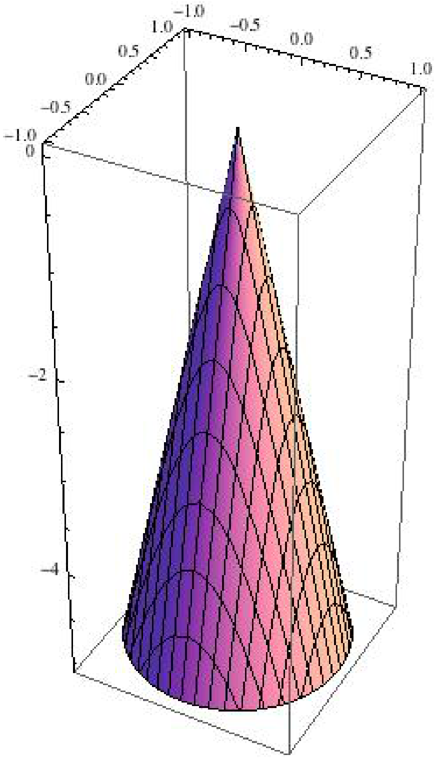


図 5: $z = -5\sqrt{z^2 + y^2}$

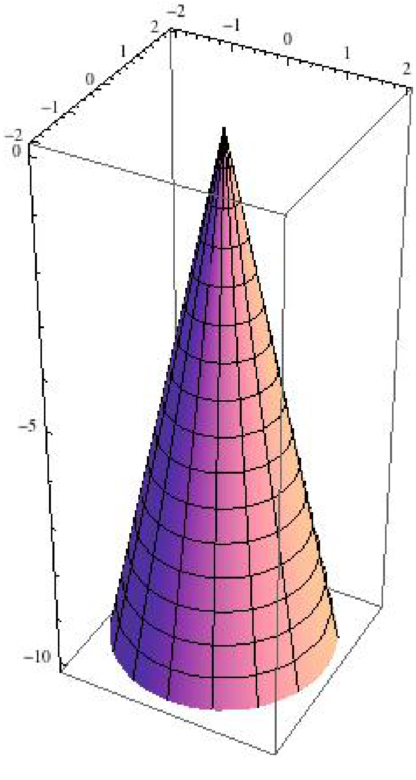


図 6: $z = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = -5r$