2013年度 微分方程式2 (担当 桂田)　期末試験問題

2014年1月27日 (月) 1,2限実施
ノート等持込み禁止。解答用紙 (2枚両面解答可) のみ提出。

1. 次の問に答えよ。

(1) 微分演算子 div, grad, $\triangle$ の定義を書き、$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \triangle$ であることを示せ。

(2) 音波の偏微分方程式を書け (授業で取り上げた主要な3つの偏微分方程式のうちの1つ)。

(3) $\exp z = i$ (i は虚数単位) を満たす複素数 z をすべて求めよ (途中経過も書くこと)。

2. $c > 0$, $I = (0,\infty)$, $\phi \in C^2(\overline{I};\mathbf{R})$, $\psi \in C^1(\overline{I};\mathbf{R})$ とするとき、初期値境界値問題

(WE) $$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in I \times (0,\infty)),$$

(NBC) $$u_x(0,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)),$$

(IC) $$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \overline{I})$$

を考える。ただし $\exists \varepsilon > 0\ \forall x \in [0,\varepsilon]\ \phi(x) = \psi(x) = 0$ とする。このとき以下の問に答えよ。

(1) $f(x) = g(x) = 0$ $(x < 0)$ を満たす $f, g \in C^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$ に対して、

$$u(x,t) := f(x-ct) + g(x+ct) + g(-(x-ct)) \quad (x \in \mathbf{R},\ t \in [0,\infty))$$

とおくとき、u は次の2つの方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in \mathbf{R} \times (0,\infty)), \qquad u_x(0,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)).$$

(2) (1) の f と g をうまく選ぶことで、初期値境界値問題 (WE), (NBC), (IC) の解を求めよ。

3. $k \in \mathbf{R}$, $L > 0$ とする。$f(0) = 0$ を満たす連続関数 $f\colon [0,L] \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、初期値境界値問題

(HE) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + ku(x,t) \quad ((x,t) \in (0,L) \times (0,\infty)),$$

(BC) $$u(0,t) = u_x(L,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)),$$

(IC) $$u(x,0) = f(x) \quad (x \in [0,L])$$

の解を Fourier の方法を用いて求めよ。また $k = 3/L^2$ のとき、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ を調べよ (初期値で場合分けが必要)。

4. 問題**3**の解 u について、$v(x,t) := e^{-kt}u(x,t)$ とおくとき、v はどのような初期値境界値問題の解であるか記せ (途中経過も書くこと)。また、その初期値境界値問題の C^2 級の解が一意であることを示せ ($\displaystyle E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L v(x,t)^2 dx$ という関数を調べよ)。

5. 滑らかな閉曲面で囲まれた $\mathbf{R}^3$ の領域 Ω における、Gauss の発散定理を書け。またそれを用いて Green の積分公式 $\displaystyle\int_\Omega u \triangle v\, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\, d\sigma - \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dx$ を導け。

($\boldsymbol{n}$, $d\sigma$ などの記号は講義で用いたものとする。また、u と v の滑らかさは適当に仮定する。)

6. $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\right\}$ とするとき、Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$-\triangle u(x,y) = 1 \quad ((x,y) \in \Omega), \quad u(x,y) = -\frac{x^2}{2} + 3x^2y^2 \quad ((x,y) \in \partial\Omega)$$

の解を求めよ。

2014 年 11 月 5 日 8 時 37 分バージョン

1.

(1) Ω を $\mathbf{R}^n$ の領域とする。$\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ は C^1 級とするとき、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ として

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}.$$

$u\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は C^1 級とするとき、

$$\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

$u\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は C^2 級とするとき、

$$\triangle u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

u が C^2 級ならば

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \triangle u.$$

(2) 3 次元空間の波動方程式である。$\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$. ここで $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ は時刻 t, 位置 (x_1, x_2, x_3) における音圧 (音のない状態の気圧からの変位)、c は音速である。

(3) $x, y \in \mathbf{R}$, また i を虚数単位とするとき $\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ となる。

(a) ($\exp z = 1$ の解が $z = 2n\pi i$ ($n \in \mathbf{Z}$) であることを使う方法) $\exp i\pi/2 = i$ であるから、$\exp z = i$ の両辺を割り算すると、$\exp(z - i\pi/2) = 1$. これから $z - i\pi/2 = 2n\pi i$ ($n \in \mathbf{Z}$). ゆえに $z = (2n + 1/2)\pi i$ ($n \in \mathbf{Z}$).

(b) (基本的なことから証明する方法) $z = x + iy$ (x, y は実数) とおくと、$\exp z = i$ は

$$(\heartsuit) \qquad e^x(\cos y + i \sin y) = i$$

と同値である。両辺の絶対値を取ると $e^x = 1$. $e^x = 1$ を $(\heartsuit)$ に代入して、$\cos y + i \sin y = i$. 逆に $e^x = 1$ かつ $\cos y + i \sin y = i$ であれば、$(\heartsuit)$ が導かれる。

$$\begin{aligned} e^x = 1 \wedge \cos y + i \sin y = i \quad &\Leftrightarrow \quad x = 0 \wedge \cos y = 0 \wedge \sin y = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \wedge \exists n \in \mathbf{Z} \quad y = (2n + 1/2)\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbf{Z} \quad z = (2n + 1/2)\pi i. \end{aligned}$$

(それにしても、複素数出来ない人が多いなあ。)

2.

(1) 一般に $\frac{d}{dx}F(a+bx)=bF'(a+bx)$ であるから、

$$\begin{aligned}
u_x(x,t) &= f'(x-ct)+g'(x+ct)+(-1)g'(-(x-ct)),\\
u_{xx}(x,t) &= f''(x-ct)+g''(x+ct)+(-1)^2g''(-(x-ct))\\
&= f''(x-ct)+g''(x+ct)+g''(-(x-ct)),\\
u_t(x,t) &= (-c)f'(x-ct)+cg'(x+ct)+cg'(-(x-ct)),\\
u_{tt}(x,t) &= (-c)^2f''(x-ct)+c^2g''(x+ct)+c^2g''(-(x-ct))\\
&= c^2\left(f''(x-ct)+g''(x+ct)+g''(-(x-ct))\right).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{1}{c^2}u_{tt}(x,t)=f''(x-ct)+g''(x+ct)+g''(-(x-ct))=u_{xx}(x,t).$$

また $t\in(0,\infty)$ とするとき、$-ct<0$ であるから、$f'(-ct)=0$ であるので、

$$u_x(0,t)=f'(-ct)+g'(ct)-g'(ct)=f'(-ct)=0.$$

(2) $x\geq 0$ とするとき

$$u(x,0)=f(x)+g(x)+g(-x)=f(x)+g(x).$$

また

$$u_t(x,0)=-cf'(x)+cg'(x)+cg'(-x)=-cf'(x)+cg'(x).$$

ゆえに

$$(\sharp)\qquad \phi(x)=f(x)+g(x),$$

$$(\flat)\qquad \psi(x)=-cf'(x)+cg'(x).$$

後者から

$$\int_0^x \psi(y)\,dy=-c\left(f(x)-f(0)\right)+c\left(g(x)-g(0)\right)=-cf(x)+cg(x).$$

ゆえに

$$-f(x)+g(x)=\frac{1}{c}\int_0^x\psi(y)\,dy.$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(\phi(x)+\frac{1}{c}\int_0^x\psi(y)\,dy\right),\quad f(x)=\frac{1}{2}\left(\phi(x)-\frac{1}{c}\int_0^x\psi(y)\,dy\right)\quad (x\geq 0).$$

$t\geq 0$ とすると、$x+ct\geq 0$ である。$x-ct\geq 0$ のとき $-(x-ct)\leq 0$ であるから $g(-(x-ct))=0$ に注意して

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f(x-ct)+g(x+ct)+g(-(x-ct))=f(x-ct)+g(x+ct)\\
&= \frac{1}{2}\left(\phi(x-ct)-\frac{1}{c}\int_0^{x-ct}\psi(y)\,dy\right)+\frac{1}{2}\left(\phi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_0^{x+ct}\psi(y)\,dy\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy.
\end{aligned}$$

一方 $x-ct<0$ のとき、$f(x-ct)=0$ に注意して

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f(x-ct)+g(x+ct)+g(-(x-ct))=g(x+ct)+g(ct-x)\\
&= \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_0^{x+ct}\psi(y)\,dy\right)+\frac{1}{2}\left(\phi(ct-x)+\frac{1}{c}\int_0^{ct-x}\psi(y)\,dy\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct)+\phi(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\psi(y)\,dy+\frac{1}{2c}\int_0^{ct-x}\psi(y)\,dy.
\end{aligned}$$

レポートでは、(こうして得られた u が確かに解であることを確認したが、ここでは省略する (f, g を求めた計算を逆向きにていねいに辿っても証明になるので)。■

3. Fourier の方法で解を求める。

(Step 1) (HE), (BC) を満たす u で、$u(x,t)=\zeta(x)\eta(t)$ の形をしていて、$u\not\equiv 0$ であるものをすべて求める。(HE) に代入して

$$\zeta(x)\eta'(t)=\zeta''(x)\eta(t)+k\zeta(x)\eta(t).$$

$$\frac{\eta'(t)}{\eta(t)}-k=\frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)}.$$

この等式の値は、左辺を見ると x によらず、右辺を見ると t によらないことが分かるので、定数である。それを λ とおくと、

$$\eta'(t)=(\lambda+k)\eta(t),$$

(ζ 1)
$$\zeta''(x)=\lambda\zeta(x)\quad (x\in(0,L)).$$

$u(x,t)=\zeta(x)\eta(t)$ を (BC) に代入すると

$$\zeta(0)\eta(t)=\zeta'(L)\eta(t)=0\quad (t\in(0,\infty)).$$

これから

(ζ 2)
$$\zeta(0)=\zeta'(L)=0.$$

実際、もしそうでないとすると、$\eta(t)=0$ $(t\in(0,\infty))$ となり、$u(x,t)\equiv 0$ が導かれ、作業方針に反する。同様の理由により

(ζ 3)
$$\zeta(x)\not\equiv 0.$$

(ζ 1) の特性根を s とおくと、$s^2=\lambda$. ゆえに $s=\pm\sqrt{\lambda}$.

(i) $\lambda=0$ のとき、$s=0$ (重根). (ζ 1) の一般解は

$$\zeta(x)=A+Bx\quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

(ζ 2) に代入すると

$$0=\zeta(0)=A,$$
$$0=\zeta'(L)=B.$$

これから $A=B=0$, $\zeta(x)\equiv 0$. これは (ζ 3) に矛盾する。ゆえに解は存在しない。

(ii) $\lambda\neq 0$ のとき、$s=\pm\sqrt{\lambda}$ は重根でないので、(ζ 1) の一般解は

$$\zeta(x)=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x}\quad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

(ζ 2) に代入すると

$$0=\zeta(0)=A+B,$$
$$0=\zeta'(L)=\sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}L}-Be^{-\sqrt{\lambda}L}).$$

前者から $B=-A$.

$$\sqrt{\lambda}A\left(e^{\sqrt{\lambda}L}+e^{-\sqrt{\lambda}L}\right)=0.$$

もし $A=0$ ならば、$B=0$, $\zeta(x)\equiv 0$ となり、 (ζ 3) に矛盾する。$A\neq 0$ とすると ($\lambda\neq 0$ に注意して)

$$e^{\sqrt{\lambda}L}+e^{-\sqrt{\lambda}L}=0.$$

$$e^{2\sqrt{\lambda}L}=-1.$$

$$\exists n \in \mathbf{Z} \quad \text{s.t.} \quad 2\sqrt{\lambda}L = (2n-1)\pi i.$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{(n-1/2)\pi i}{L}, \quad \lambda = -\frac{(n-1/2)^2\pi^2}{L^2}$$

$$\zeta(x) = Ae^{(n-1/2)\pi i x/L} - Ae^{-(n-1/2)\pi i x/L} = 2iA\sin\frac{(n-1/2)\pi x}{L}.$$

$n = \ell$ と $n = 1-\ell$ で同じ λ, ζ を与えるので (ζ は形の上では (-1) 倍になるが、A が任意定数なので実は同じものである)、$n \in \mathbf{N}$ だけ取れば十分である。

一方、η は

$$\eta(t) = Ce^{(\lambda+k)t} = Ce^{\left[k-(n-1/2)^2\pi^2/L^2\right]t}.$$

ゆえに

$$u(x,t) = \zeta(x)\eta(t) = C'e^{\left[k-(n-1/2)^2\pi^2/L^2\right]t}\sin\frac{(n-1/2)\pi x}{L} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

(Step 2) $\{c_n\}$ を任意数列として

$$(\spadesuit) \qquad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\left[k-(n-1/2)^2\pi^2/L^2\right]t}\sin\frac{(n-1/2)\pi x}{L}$$

とおく。(HE), (BC) は線形同次方程式であるから、u も (HE), (BC) を満たす (ただし項別微分可能であると仮定する)。

(Step 3) ($\spadesuit$) で定めた u が (IC) を満たすとすると、

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{L} \quad (x \in [0,L]).$$

$[0,L]$ 上の連続関数 ϕ, ψ の内積を

$$(\phi,\psi) := \int_0^L \phi(x)\overline{\psi(x)}\,dx$$

と定め、

$$\zeta_n(x) := \sin\frac{(n-1/2)\pi x}{L} \quad (n \in \mathbf{N};\ x \in [0,L])$$

とおく。

$$(\zeta_m,\zeta_n) = \frac{L}{2}\delta_{mn}$$

が成り立つ。実際

$$\zeta_m(x)\zeta_n(x) = -\frac{1}{2}\left[\cos\frac{(m+n-1)\pi x}{L} - \cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]$$

であるから、$m \neq n$ のとき、$m-n \neq 0$, $m+n-1 \neq 0$ に注意して

$$\begin{aligned}(\zeta_m,\zeta_n) &= -\frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\frac{(m+n-1)\pi x}{L} - \cos\frac{(m-n)\pi x}{L}\right]dx \\ &= -\frac{L}{2}\left[\frac{\sin(m+n-1)\pi x/L}{(m+n-1)\pi} - \frac{\sin(m-n)\pi x/L}{(m-n)\pi}\right]_0^L = 0.\end{aligned}$$

また $m = n$ のとき、

$$(\zeta_m,\zeta_n) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[1 - \cos\frac{(2m-1)\pi x}{L}\right]dx = \frac{L}{2}.$$

ゆえに $\forall m \in \mathbf{N}$ に対して

$$(f,\zeta_m) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m\zeta_m, \zeta_n\right) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(\zeta_m,\zeta_n) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m\frac{L}{2}\delta_{mn} = \frac{L}{2}c_m.$$

$$c_m = \frac{2}{L}(f, \zeta_m) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(m-1/2)\pi x}{L}dx.$$

すなわち

$$(\diamondsuit) \qquad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(n-1/2)\pi x}{L}dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

($\spadesuit$), ($\diamondsuit$) で定まる u が Fourier の方法による形式解である。
(例年のことだけれど、あまり良い出来ではない。)
$k = 3/L^2$ とするとき

$$k - (n-1/2)^2\pi^2/L^2 = \frac{3-(n-1/2)^2\pi^2}{L^2}\begin{cases} = (3-\pi^2/4)/L^2 > 0 & (n=1) \\ < (3-9\pi^2/4)/L^2 < 0 & (n \ge 2)\end{cases}$$

に注意する。$c_1 = 0$ ならば、$u(x,t) \to 0$ $(t \to \infty)$. $c_1 \ne 0$ ならば

$$u(x,t) \sim c_1 e^{(3\pi^2/4)t/L^2}\zeta_1(x) \to \begin{cases} (\mathrm{sign}\ c_1)\infty & (x \ne 0) \\ 0 & (x = 0).\blacksquare\end{cases}$$

4. $v(x,t) := e^{-kt}u(x,t)$ とおくと、$u(x,t) = e^{kt}v(x,t)$,

$$u_t = ke^{kt}v + e^{kt}v_t, \quad u_x = e^{kt}v_x, \quad u_{xx} = e^{kt}v_{xx}$$

であるから、$u_t = u_{xx} + ku$ より

$$ke^{kt}v + e^{kt}v_t = e^{kt}v_{xx} + ke^{kt}v$$

ゆえに

$$\text{(HE')} \qquad v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) \quad ((x,t) \in (0,L)\times(0,\infty)).$$

$u(0,t) = u_x(L,t) = 0$ $(t \in (0,\infty))$ より $e^{k\cdot 0}v(0,t) = e^{kt}v_x(L,t) = 0$ であるから

$$\text{(BC')} \qquad v(0,t) = v_x(L,t) = 0 \quad (t \in (0,\infty)).$$

$u(x,0) = f(x)$ $(x \in [0,L])$ より $e^{k\cdot 0}v(x,0) = f(x)$ であるから

$$\text{(IC')} \qquad v(x,0) = f(x) \quad (x \in [0,L]).$$

解の一意性を言うには、$f(x) \equiv 0$ ならば $v(x,t) \equiv 0$ を示せば良い。$\forall t > 0$ に対して

$$E'(t) = \frac{1}{2}\int_0^L 2v_t(x,t)v(x,t)\,dx = \int_0^L v_{xx}(x,t)v(x,t)\,dx = [v_x(x,t)v(x,t)]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L v_x(x,t)^2\,dx$$
$$= -\int_0^L v_x(x,t)^2\,dx \le 0$$

であるから、

$$E(t) \le E(0) = \frac{1}{2}\int_0^L v(x,0)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L f(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L 0^2\,dx = 0.$$

一方 $v(x,t)^2 \ge 0$ であるから、

$$E(t) \ge \frac{1}{2}\int_0^L 0\,dx = 0.$$

ゆえに $E(t) = 0$. $v(x,t)^2 \ge 0$ であることに注意すると $v(x,t) = 0$ $(x \in [0,L])$. ゆえに $v(x,t) \equiv 0$.
$\blacksquare$

5. $\boldsymbol{f}\colon \overline{\Omega} \to \mathbf{R}^3$ が C^1 級ならば、

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

$\boldsymbol{f} := u \operatorname{grad} v$ とおくと、

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\right) = \operatorname{grad} u\cdot \operatorname{grad} v + u \triangle v$$

となるので、

$$\int_\Omega \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v\, dx + \int_\Omega u \triangle v\, dx = \int_{\partial\Omega} u \operatorname{grad} v\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\, d\sigma.$$

移項して

$$\int_\Omega u \triangle v\, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\, d\sigma - \int_\Omega \operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v\, dx.\blacksquare$$

6. $v(x,y) = -\frac{x^2}{2}$ とおくと、$\triangle v = -1$ であるから、$w(x,y) := u(x,y) - v(x,y)$ とおくと、

$$\triangle w = \triangle u - \triangle v = -1 - (-1) = 0 \quad ((x,y)\in\Omega),$$

$$w(x,y) = -\frac{x^2}{2} + 3x^2y^2 - \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 3x^2y^2 \quad ((x,y)\in\partial\Omega).$$

$\psi(x,y) := 3x^2y^2$, $\Psi(\theta) := \psi(\cos\theta, \sin\theta)$ とすると、

$$\Psi(\theta) = 3\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{3}{4}\sin^2 2\theta = \frac{3}{8}(1-\cos 4\theta)$$

であるから、

$$w(\cos\theta,\sin\theta) = \frac{3}{8}(1 - r^4\cos 4\theta) = \frac{3}{8}(1 - x^4 + 6x^2y^2 - y^4).$$

$$u(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}(1 - x^4 + 6x^2y^2 - y^4).\blacksquare$$

(別解) $v(x,y) = -\dfrac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)$ とする。$w := u - v$ とおくとき、$\triangle w = 0$, $w(x,y) = -\frac{x^2}{2} + 3x^2y^2 + \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)$ $((x,y)\in\partial\Omega)$. これから、境界値の Fourier 級数展開は

$$\Psi(\theta) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{3}{8}\cos 4\theta$$

で、

$$w(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{3}{8} - \frac{r^2}{4}\cos 2\theta - \frac{3r^4}{8}\cos 4\theta = -\frac{3}{8}\left(x^4+y^4\right) + \frac{9}{4}x^2y^2 - \frac{1}{4}\left(x^2-y^2\right) + \frac{3}{8}.$$

もちろん u は上と一致する。 ■

やり方を間違えていても、結果は合っているということがありうるので (やはり間違えている部分に点はあげられない…)、あまり良い問題ではなかったかも。

境界値が $-\dfrac{x^2}{2} + 3xy$ の場合、

$$w(x,y) = 3xy = \frac{3}{2}\sin 2\theta \quad ((x,y)\in\partial\Omega)$$

より

$$w = \frac{3}{2}r^2\sin 2\theta = 3r^2\cos\theta\sin\theta = 3xy$$

であるから、

$$u(x,y) = -\frac{x^2}{2} + 3xy.$$