微分方程式 第２章 補足問題

桂田 祐史

2013 年 10 月 28 日

Fourier 級数については、「実解析 1」で学んだはずであるが、「微分方程式 2」で使うため、少し復習しよう。かなりの部分、自分で実際に計算することで納得できるので、学習しやすいはずである。

1. 次の定積分の値を求めよ。ただし i は虚数単位で、$n \in \mathbf{Z}$ とする。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dx.$$

2. 以下の等式を証明せよ。

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right),\\
\sin a \sin b &= -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right),\\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right).
\end{aligned}$$

(右辺から左辺を導くのは簡単だが、必要に応じて左辺から右辺を導けるようにしておくこと。)

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\\
\sin A - \sin B &= 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2},\\
\cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\\
\cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}.
\end{aligned}$$

3.

(1) $X := C\left([a,b];\mathbf{R}\right)$ に対して、

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)\, dx \quad (f,g \in X)$$

は内積の公理[1]を満たすことを示せ。

(2) $Y := C\left([a,b];\mathbf{C}\right)$ に対して、

$$(f,g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx \quad (f,g \in Y)$$

は内積の公理[2]を満たすことを示せ。ただし $\overline{g(x)}$ は $g(x)$ の共役複素数を表すとする。

[1] (i) $(f,f) \geq 0$, 等号 $\Leftrightarrow f = 0$, (ii) $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \lambda_1(f_1,g) + \lambda_2(f_2,g)$, (iii) $(g,f) = (f,g)$.

[2] (1) と同様だが、(iii) だけ (iii) $(g,f) = \overline{(f,g)}$ に置き換える。

4. 線型空間 X とその上で定義された内積 $(\cdot,\cdot)$ があるとき、Schwarz の不等式

$$(\heartsuit) \qquad \forall f,g\in X \quad |(f,g)|^2 \le (f,f)\,(g,g)$$

が成り立つことを示せ。(ノルム $\|\cdot\|$ を $\|f\| := \sqrt{(f,f)}$ で定義すると、$(\heartsuit)$ は $|(f,g)| \le \|f\|\,\|g\|$ と書き直せる。こちらの形の方に慣れている人が多いかもしれない。)

5. 内積

$$(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

について、関数系

$$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

が直交系[3]であることを示し、正規化せよ。

(おまけ) 区間の幅を半分にして

$$\langle f,g\rangle := \int_{0}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

という内積で考えた場合はどうか。

6. 内積

$$(f,g) := \int_{0}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

について、次の二つの関数系が直交系であることを示し、正規化せよ。

(1) $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ (2) $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$

7. 内積

$$(f,g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

について、 関数系

$$\left\{e^{inx}; n\in\mathbf{Z}\right\}$$

が直交系であることを示し、正規化せよ。ただし i は虚数単位である。

8. $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ とする。X は $\mathbb{K}$ 上の線型空間で、内積 $(\cdot,\cdot)$ を持つとする。$f = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j$ $(c_j\in\mathbb{K},\ \varphi_j\in X)$ が成り立っていると仮定する。

(1) $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}$ が正規直交系であるとき、$c_j = (f,\varphi_j)$ であることを示せ。

(2) $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}$ が直交系であるとき、c_j を f と φ_j を用いて表せ。

9. 関数系 $\{1,x,x^2,x^3\}$ からグラム・シュミットの直交化法により、内積 $(f,g) := \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ に関する正規直交系を作れ。(計算が面倒だと思ったらやらなくて良いです。こんなことも出来るんだ、という例を示したいだけなので。)

10. Fourier 級数の定義を述べよ。(周期は 2π として良い。)

[3] $\mathcal{F}$ が直交系であるとは、$\forall f,g\in\mathcal{F}$ に対して $f\ne g \Longrightarrow (f,g)=0$ が成り立つことをいう。

11.　周期 2π の関数 $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{C}$ の Fourier 級数が、$\forall x\in\mathbf{R}$ で収束して $f(x)$ に等しくなるための十分条件を少なくとも一つ述べよ。(授業で 2,3 個習ったのでは？と思います。)

12.　以下の関数 f を区間 $[-\pi,\pi]$ で Fourier 級数展開せよ (必要ならば $[-\pi,\pi]$ の外で適当に拡張して、周期 2π の関数と考えて Fourier 級数展開せよ)。

(1) $f(x)=x\ (-\pi\le x\le\pi)$.

(2) $f(x)=x^2\ (-\pi\le x\le\pi)$. (一般に x^k はどうか？)

(3) $f(x)=|x|\ (-\pi\le x\le\pi)$.

(4) $f(x)=\operatorname{sign} x=\begin{cases}1 & (0<x<\pi)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (-\pi<x<0)\end{cases}$

(5) $f(x)=\cos^2 x$.

(6) $f(x)=\sin^3 x$.

13.　(1) $\cos^6\theta$ を周期 2π の周期関数として Fourier 級数展開せよ。(2) $\cos 6\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の多項式として表せ (答は一通りではない、一つ見つければ十分)。

計算を簡単に済ませるためのヒント　$\cos^n\theta$ を $\cos k\theta$, $\sin k\theta$ で表すには、

$$\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$$

を展開するのが便利である。
　$\cos k\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ の多項式で表すには、

$$\cos k\theta=\operatorname{Re}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^k\right]$$

を使うのが便利である。

14.　(2π 以外の周期の場合) $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ が周期 $2L$ の関数で、適度の滑らかさ (例えば C^1 級) を持っているとする。

$$F(X)=f(x),\quad x=\frac{LX}{\pi}\quad (X\in\mathbf{R})$$

とおくと、F が周期 2π の関数になることを利用して、次の式が成り立つことを示せ。

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

ただし

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,\quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)<\infty$ を満たす $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t\right)\sin n\pi x \quad (x\in[0,1],\ t\ge 0)$$

とおくとき、

$$E_{\mathrm{k}}(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 u_t(x,t)^2\,dx,\quad E_{\mathrm{p}}(t) := \frac{1}{2}\int_0^1 u_x(x,t)^2\,dx,\quad \mathcal{E}(t) := E_{\mathrm{k}}(t)+E_{\mathrm{p}}(t)$$

を a_n と b_n を用いてなるべく簡単な式で表し、$\mathcal{E}$ が定数関数であることを示せ。

16. $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を周期 2π の連続関数として、次のようにおく。

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,\dots),\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\dots)$$

(1) f が偶関数ならば $b_n=0$, $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ となることを示せ。(2) f が奇関数ならば $a_n=0$, $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ となることを示せ。

17. 関数

$$f(x)=1 \quad (0\le x\le\pi)$$

を **Fourier 正弦級数**で表せ。

18. 関数

$$f(x)=x \quad (0\le x\le\pi)$$

を **Fourier 余弦級数**で表せ (実はこれより前の問題に「答」がある)。

19.

(1) $f\colon [0,L]\to\mathbf{C}$ が連続かつ区分的に C^1 級ならば、

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} \quad (x\in[0,L]),\quad a_n := \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (n=0,1,\dots)$$

が成り立つことを示せ。

(2) $f\colon [0,L]\to\mathbf{C}$ が連続かつ区分的に C^1 級で、$f(0)=f(L)=0$ を満たすならば、

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L} \quad (x\in[0,L]) \quad b_n := \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (n\in\mathbf{N})$$

が成り立つことを示せ。

(実は (1), (2) ともに一様収束する。)

20. (1) 周期 2π の連続関数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ の Fourier 係数 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 自然数 k について、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty$$

が成り立てば、f は C^k 級であることを示せ。

(2) 周期 2π の連続関数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が自然数 k に対して C^k 級であれば、f の Fourier 係数 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について、

$$\lim_{n\to\infty} n^k |a_n| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n^k |b_n| = 0$$

であることを示せ ($k = 0$ の場合は有名な **Riemann-Lebesgue の定理**になる — これは既知として良い)。

21. f, g は周期 2π の関数で、$(-\pi, \pi]$ の範囲では

$$f(x) = |x| \quad (-\pi < x \le \pi), \quad g(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ -1 & (-\pi < x < 0)) \\ 0 & (x = 0, \pi) \end{cases}$$

で与えられているとするとき、以下の (1), (2) に答えよ。

(1) f, g を Fourier 級数展開せよ。(2) f, g の Fourier 級数はもとの関数に収束するか (各点収束、一様収束、二乗平均収束、それぞれについて)、理由をつけて答えよ。

ただし、関数列 $\{h_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が h に二乗平均収束するとは、次の等式が成り立つことをいう:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |h_n(x) - h(x)|^2 \, dx = 0.$$

(**余談** 超関数論を用いると、g は f の導関数であり、さらに g の導関数 h も考えることが出来る。それはデルタ超関数 δ を用いて、$h(x) = 2 \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(x - n\pi)$ と表せる。超関数の世界では、一般に導関数の Fourier 級数は、もとの関数の Fourier 級数を項別に微分したものになっている。f, g, h の Fourier 級数の部分和のグラフをコンピューターを用いて描いてみるのは面白い。f の Fourier 級数は一様収束することが見て分かる (一様に絶対収束する)。g の Fourier 級数は各点収束するが、不連続点の近傍では Gibbs の現象が現われる。h の Fourier 級数は普通の意味では収束しないが、その部分和は ($x = 0$ の近傍では) δ 関数に収束することが見て取れる。)

22. 内積 $(,)$ を持つ「内積空間」 X において、$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が正規直交系である (i.e. $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$) とするとき、以下の問に答えよ。

(1) $x \in X$, $N \in \mathbf{N}$ に対して $e_N := x - \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (x, \varphi_i)\varphi_i$ とおくとき、

$$\|e_N\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N} |(x, \varphi_i)|^2$$

が成り立つ。ただし $y \in X$ に対して $\|y\| := \sqrt{(y, y)}$ と定義する (一見難しいようだけれど、ただの式の計算による証明なので、実は簡単)。

これからすぐに、**Bessel の不等式**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, \varphi_n)|^2 \le \|x\|^2$$

が証明できる。

(2) (これは省略しても良い。) X が完備ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x,\varphi_n)\varphi$ は収束することを示せ。

(3) 特に $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{C}$ が周期 2π の連続関数であるとき、

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}|c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx$$

が成り立つことを示せ。ただし $c_n := \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx}\,dx$ とする。

23. 次の (1), (2), (3) に答えよ。

(1) 内積 $(\cdot,\cdot)$ を持つ Hilbert 空間 X の正規直交系 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ があるとき、$\forall f\in X$ に対して

$$\|f\|^2 = \left\|f-\sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i\right\|^2 + \sum_{i=1}^{n}|(f,\varphi_i)|^2, \quad \text{ただし } \|y\| = \sqrt{(y,y)}$$

が成り立つことを示せ。これから $\left\|f-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i\right\|\to 0$ が成り立つとき[4]、**Parseval の等式** $\|f\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\varphi_n)|^2$ が成り立つ。

(2) $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は周期 2π の連続関数で、$f(x)=x^2\ \ (-\pi<x<\pi)$ を満たすものとする。このとき、f の Fourier 級数を求め、$\mathbf{R}$ の各点 x で、その Fourier 級数が収束するか、またその和は $f(x)$ に等しいか、理由をつけて答えよ。

(3) (2) の結果を用いて、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の値を求めよ。また Parseval の等式を用いて、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ の値を求めよ。

24. 周期 2π の関数 f と数列 $\{a_n\}_{n\ge 0}$, $\{b_n\}_{n\ge 1}$ に対して

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \quad (x\in[-\pi,\pi])$$

が成り立つならば、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,\dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\dots)$$

と結論して良いか？(**注**: Fourier 係数は一意的か (あるいは Fourier 級数展開は一意的か、と言ってもよい) という意味で大事なことである。これがあると「係数の比較」ができる。)

25. f, $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{C}$ は十分滑らかな関数で、

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{inx}, \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} b_n e^{inx}$$

をその Fourier 級数展開とする。

[4] これが任意の f について成り立つとき、$\{\varphi_n\}$ は完全正規直交系であるという。Parseval の等式は、通常完全正規直交系に関する命題として提示される。

(1) (積の Fourier 係数は、Fourier 係数の畳み込み) $f(x)g(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$ を fg の Fourier 級数展開とするとき、次の式を示せ。

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \quad (n \in \mathbf{Z})$$

(2) (畳み込みの Fourier 係数は、Fourier 係数の積)

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)\,dy$$

とおく。

$$f * g(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{inx}$$

を $f * g$ の Fourier 級数展開とするとき、次の式を示せ。

$$c_n = a_n b_n \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

(この問題で述べた事実は、Fourier 変換では有名だが、Fourier 級数については省略されることが多い。)

26. $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ を周期 2π の連続関数として、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, \dots), \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad (n \in \mathbf{Z})$$

とおくとき、

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(a_n - ib_n) & (n > 0) \\ \dfrac{1}{2}a_0 & (n = 0) \\ \dfrac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & (n < 0) \end{cases}$$

であることを確かめよ。