線形代数ノート

桂田 祐史

2013年8月29日, 2021年7月27日

連立1次方程式や固有値問題については、数値計算がらみの文書を作ったが、それに入らない話題 (将来的に数値計算の話題になるかもしれない事項を含んではいるが) をこの文書に集める。

Jordan 標準形，多重線型代数などなど。

昔のノート (かなりの時間を費やして作った) の電子化をして、そこからこちらに移していくと良いのかな。

(2021/7/27 追記) 線形代数の授業を担当しているわけでもなく、COVID19 騒ぎで数値線形代数のことを考える余裕もなかったので、この文書を WWW に置いてあること自体をすっかり忘れていたのだけれど、ある方からお便りをもらって思い出して、ひさしぶりにのぞいてみたら参考文献表が壊れていたので組版し直しました。

目 次

1 記号、用語

$$U(n) := \{A \in M(n; \mathbf{C}); A^*A = A^*A = I\}.$$

$$SU(n) := \{A \in U(n); \det A = 1\}$$

A と B が相似 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists P \in GL(n)$ s.t. $P^{-1}AP = B$.

2 つの n 次対称行列 A と B が同値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\exists P \in GL(n)$ s.t. $P^TAP = B$.

相似も同値も同値関係である。

n 次対称群 (symmetric group) は S_n, $\mathfrak{S}_n$ (LaTeX では `\mathfrak{S}_n` とする), $\mathrm{Sym}(n)$ などで表される。

2 Jordan 標準形と私

2.1 単因子論と私

Jordan 標準形の存在と一意性を証明するため、以下の 3 つの方法がポピュラーである。

(i) 一般固有空間への分解を経由して冪零変換の解析に帰着する方法 (しばしば「幾何学的な方法」と呼ばれる)

(ii) 単因子論による方法 (しばしば「代数的な方法」と呼ばれる)

(iii) 行列の有理標準形を経由する方法

個人的には、自分が受けた大学 1 年次の講義科目「代数と幾何」の教科書 (佐武 [1]) や、自習した本 (杉浦 [2]) が採用していたということ、手短で要領の良い説明 (齋藤 [3]) を知ったことから、(i) の方法に慣れている (親しみがある？)。多分、今 Jordan 標準形について授業をせよ、と要求されたら、 (i) の方法で行うであろう。

単因子論による扱いについては、齋藤 ([4]) にあることはそれとなく耳にしていたが、実際に学んだのは、大学 2 年次の代数の講義においてであった。ちなみに、知人の T 君によると、その講義で学んだような調子で勉強するには、堀田 [5] が良いという話である (この本は、その授業よりずっと後になって出版されたものである)。

正直に白状すると、最初に学んだときは、基本変形で単因子を求める計算 (アルゴリズム) を完全には理解出来ていなかった。後になって、勉強し直した時に気がついたのであるが、実は私が当時持っていた本の中に、単因子の (基本変形による) 計算アルゴリズムが書いてある本はなかった。例えば [4] は連立 1 次方程式を解くための掃き出し法については、詳しく書いてあるのだが、単因子については、初心者には一見そうは見えないのだが、実は「超越的」である (存在証明はしてあるが、計算手順の説明にはなっていない)。何でもアルゴリズムを書かなくてはいけない、というわけではないと思うが、線型代数を学んでいるときは、連立 1 次方程式については、一応はアルゴリズムを説明される (身につけることを要求される) し、テストともなれば、「次の行列の Jordan 標準形を求めよ」と要求されるわけで、(その本 or その講義で) アルゴリズムを説明するつもりがないのならば、それを明言して欲しいものである。それで少し探してみたところ、韓・伊理 [6] に書いてあることを発見して (杉浦 [2] も書いてあることになるのか？整理不十分のような気がするが、こちらが誤読している？)、伊理先生さすがと思ったが、つい先日、それは古屋 [7] が元ネタであったらしいことに気がついた。かなり古い古屋先生の本 (実際、私が所有している線型代数関係の和書では、最も出版が早い) にちゃんと書いてあるのに、その後の多くの本が劣化コピーになっている (とあえて言わせてもらう) のは、どうしてなんでしょうね (そういえば伊理先生は [7] については「その新鮮な感覚と内容とにより、当時多くの人に衝撃を与えたのではなかろうか」と書いている)。なんとなく、アルゴリズムを軽視する風潮が影響したような気がしている。

さて、それで単因子論による Jordan 標準形の扱いを、今私がどう感じているかと言うと、とても面白く、美しさまで感じるが、代数の素養にとぼしい低学年の学生向けの授業に持ち出すのはどうかなあ、と言ったところか。

3　Jordan標準形の存在と一意性 (1)

Jordan 標準形の存在と一意性の証明には、色々な方法があるが、ここでは一般固有空間への直和分解に基づく、「幾何学的な」証明を採録する。

以下の説明は、齋藤 [3] の第 5 章 §4 による。この証明は齋藤先生のオリジナルらしい (齋藤 [8])。以下、いわゆる「行間を埋める」作業をしてあるが、その結果誤りを混入していたら、それはもちろん私 (桂田) の責任である。是非オリジナルにあたることをお勧めする。命題 3.2 と命題 3.3 が本質的であるので、お急ぎの方はそこだけ読むと良い。

なお、これは初学者にアドバイスしておくと、Jordan 標準形の存在と一意性の証明を読んでも、「次の行列の Jordan 標準形を求めよ」という問題を解くことに、直接には役に立たない。その手の問題が解けるようになるには (アルゴリズムを習得するには)、別種の解説を読むことと練習が必要である。(この手のことは、数学村に長く住むと当り前のこととして理解するが、線形代数を学ぶ大学 1 年,2 年の頃には分からないで苦しむことが多いでしょうね。)

3.1　Jordan 行列の定義

$J_n(a)$ で固有値 a の n 次 **Jordan 細胞**を表す。

$$J_1(a)=(a),\quad J_2(a)=\begin{pmatrix} a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix},\quad J_3(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix},\cdots$$

Jordan 細胞の直和になっている行列、つまり

$$J_{m_1}(a_1)\oplus J_{m_2}(a_2)\oplus\cdots\oplus J_{m_r}(a_r)=\begin{bmatrix} J_{m_1}(a_1) & & & \\ & J_{m_2}(a_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_r}(a_r)\end{bmatrix} \tag{1}$$

の形をしている行列を **Jordan 行列**と呼ぶ。

例 3.1 対角行列は Jordan 行列である。つまり Jordan 細胞のサイズがすべて 1, 例えば (1) で $m_1=m_2=\cdots=m_r=1$ ということである。■

3.2　冪零変換の Jordan 標準形の存在

命題 3.2 (冪零変換の Jordan 標準形の存在) $K=\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$ とする。V は K 上の n 次元線型空間で、$T\colon V\to V$ は線形写像で、冪零 (i.e. $T^n=O$) とする。このとき、V の基底 $\mathcal{E}$ で、T の $\mathcal{E}$ に関する行列が Jordan 行列であるものが存在する。

証明　$T=O$ ならば、V の任意の基底に対して T の表現行列は零行列であり、Jordan 行列である。以下では $T\neq O$ の場合を考える。

次元 n に関する帰納法を用いる。$n=1$ のとき、V の任意の基底に関する T の表現行列は、1 次正方行列であるから、明らかに Jordan 行列である。以下、$n\geq 2$ として、この命題の主張が、$n-1$ 以下で成立する (任意の冪零変換は、適当な基底に関して Jordan 行列を表現行列に持つ) と仮定する。

$T\neq O$, $T^n=O$ より、$\exists k\in\{2,3,\dots,n\}$ s.t. $T^{k-1}\neq O$ かつ $T^k=O$.

$T^{k-1}e \neq 0$ となる $e \in V$ を一つ固定する。$T^{k-1}e, T^{k-2}e, \ldots, T^2e, Te, e$ は 1 次独立である。実際

$$c_1T^{k-1}e + c_2T^{k-2}e + \cdots + c_{k-1}Te + c_ke = 0, \quad (c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k \in K)$$

に $T^{k-1}, T^{k-2}, \ldots, T$ をかけることで、$c_k = c_{k-1} = \cdots = c_2 = 0$, そして $c_1 = 0$ が得られる。

$W := \mathrm{span}\langle T^{k-1}e, \ldots, Te, e\rangle$ とおくと、W は T の不変部分空間になる。そして

$$\begin{aligned}
T(T^{k-1}e\ T^{k-2}e\ \ldots\ Te\ e) &= (T^ke\ T^{k-1}e\ \ldots\ T^2e\ Te) = (0\ T^{k-1}e\ \ldots\ T^2e\ Te) \\
&= (T^{k-1}e\ T^{k-2}e\ \ldots\ Te\ e)\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \text{\huge 0} \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & & 0 \end{pmatrix} \\
&= (T^{k-1}e\ T^{k-2}e\ \ldots\ Te\ e)J_k(0).
\end{aligned}$$

すなわち、T の制限 $T|_W\colon W \to W$ の、W の基底 $\langle T^{k-1}e, \ldots, Te, e\rangle$ に関する表現行列は、$J_k(0)$ である。ゆえに、もし $k = n$ ならば $W = V$ で、この命題の主張は成立している。以下では $k < n$ と仮定する。

V の T 不変部分空間 U で、$U \cap W = \{0\}$ となるもののうち (これは必ず存在する、例えば $U = \{0\}$)、次元が最大のものを取る (やはり U で表す)。

実は $V = U + W$ が成り立つ。

$V = U + W$ の証明

背理法による。$V \supsetneqq U + W$ と仮定する。$a \in V \setminus (U + W)$ を取る。

この a を用いて、T 不変な部分空間 U' で、$\dim U' = \dim U + 1$, $U' \cap W = \{0\}$ となるものが存在することを示し、矛盾 (U の取り方に反する) を導くというシナリオである。

$a \notin U + W$, また $T^k = O$ より $T^ka = 0 \in U + W$ であるから、$\exists \ell \in \{1, 2, \ldots, k\}$ s.t. $T^{\ell-1}a \notin U + W$ かつ $T^\ell a \in U + W$. 後者から $\exists u \in U, \exists c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in K$ s.t.

$$T^\ell a = u + \sum_{i=0}^{k-1} c_iT^ie.$$

この等式の両辺に T^{k-1} をかけると、($T^k = O$ に注意して)

$$0 = T^{\ell-1}(T^ka) = T^{\ell+k-1}a = T^{k-1}u + c_0T^{k-1}e.$$

移項して

$$-T^{k-1}u = c_0T^{k-1}e.$$

$u \in U$ で、U は T 不変と仮定してあるから、$-T^{k-1}u \in U$. また $c_0T^{k-1}e \in W$. $U \cap W = \{0\}$ と仮定してあるから、この等式の値は 0 である。ゆえに $c_0 = 0$.

これから、

$$b := T^{\ell-1}a - \sum_{i=1}^{k-1} c_iT^{i-1}e$$

とおくと、

$$Tb = T^\ell a - \sum_{i=1}^{k-1} c_iT^ie = T^\ell a - \sum_{i=0}^{k-1} c_iT^ie = u$$

であるが、$b \notin U+W$ (もしも $b \in U+W$ ならば、$T^{\ell-1}a = b + \sum_{i=1}^{k-1} c_i T^{i-1}e$ も $U+W$ に属することになり、ℓ の選び方に反する)。

さて、U と b の張る部分空間を U' とする。$\dim U' = \dim U + 1$ で、U' は T 不変である (実際、U の取り方より $TU \subset U$, また $Tb = u \in U$ なので、$TU' \subset U \subset U'$)。

$w \in U' \cap W$ とすると、$w \in U'$ であることから、$\exists v \in U$, $\exists t \in K$ s.t. $w = v + tb$. $tb = -v + w \in U + W$. $b \notin U + W$ だから $t = 0$. ゆえに $w = v \in U \cap W = \{0\}$. ゆえに $U' \cap W = \{0\}$. これは U が次元最大という仮定に反する。

$U \cap W = \{0\}$ であるから、$V = U \oplus W$. 帰納法の仮定により、$T|_U \colon U \to U$ は、表現行列が Jordan 行列 J であるような基底 $\mathcal{E}'$ を持つ。W の基底 $\langle T^{k-1}e, \ldots, Te, e\rangle$ と、この $\mathcal{E}'$ を合わせて作った V の基底について、T の表現行列は $J_k(0) \oplus J$ となり、これは Jordan 行列である。 ■

3.3 冪零変換の Jordan 標準形の一意性

次の命題に進む前に、少し準備をする。

- 直和となっている行列の冪について、

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r \quad \Longrightarrow \quad A^k = {A_1}^k \oplus {A_2}^k \oplus \cdots \oplus {A_r}^k$$

　が成り立つ。

- n 次 Jordan 行列

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \text{\huge 0} \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \text{\huge 0} & & & & 0 \end{pmatrix} \in M(n; \mathbf{R})$$

　に対して、

$$J_n(0)^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (1, k+1) \text{ 成分が } 1 \\ \\ \\ \leftarrow (n-k) \text{ 行目} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

　である。ゆえに

$$\operatorname{rank} J_n(0)^k = J_n(0)^k \text{ の成分中の } 1 \text{ の個数} = n - k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$J_n(0)^{n-1} \neq O, \quad J_n(0)^n = O.$$

命題 3.3 (冪零変換の Jordan 標準形の一意性) $K = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$ とする。V は K 上の n 次元線型空間で、$T\colon V \to V$ は線形写像で、冪零 (i.e. $T^n = O$) とする。このとき、T の表現行列である Jordan 行列は、Jordan 細胞の並べ方を除けば一意的である。

証明 $T = O$ ならば主張が成立することは明らかであるから、以下 $T \neq O$ とする。$T^k = O$, $T^{k-1} \neq O$ とする ($2 \leq k \leq n$ である)。

J を、Jordan 行列で、(V の適当な基底に関する) T の表現行列であるものとする。$J^k = O$, $J^{k-1} \neq O$ であるから、J の中の Jordan 細胞の最大次数は k である。$1 \leq j \leq k$ なる j に対して、J の j 次 Jordan 細胞の個数を m_j とする ($m_j = 0$ ということもある)。$\{m_j\}_{j=1}^k$ が T で定まることを示せば良い。

$$r_i := \operatorname{rank} T^i \quad (0 \leq i \leq k-1)$$

とおく。これは基底の取り方によらずに定まるが、一方で、表現行列を用いて計算することも出来る:

$$r_i = \operatorname{rank} J^i = \sum_{j=0}^{k} m_j \times \operatorname{rank} J_j(0)^i = \sum_{j=i+1}^{k} m_j (j - i).$$

これを i が大きい方から書き下すと

$$\begin{aligned}
r_{k-1} &= m_k, \\
r_{k-2} &= m_{k-1} + 2m_k, \\
r_{k-3} &= m_{k-2} + 2m_{k-1} + 3m_k, \\
\vdots\ &\ \vdots \\
r_{k-j} &= m_{k-j+1} + 2m_{k-j+2} + \cdots + (j-1)m_{k-1} + jm_k, \\
\vdots\ &\ \vdots \\
r_1 &= m_2 + 2m_3 + \cdots + (k-1)m_k, \\
r_0 &= m_1 + 2m_2 + \cdots + (k-1)m_{k-1} + km_k.
\end{aligned}$$

上の方から、順に解いて、$m_k, m_{k-1}, \ldots, m_1$ を求める (r_i を用いて表す) ことが出来る。特に $\{m_j\}_{j=1}^k$ は、基底の取り方によらずに定まる。 ■

3.4 一般の線形変換の Jordan 標準形

次の命題は良く知られている (が、念のために証明をつける)。

補題 3.4 (一般固有空間への直和分解) $K = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$ とする。V は K 上の n 次元線型空間で、$T\colon V \to V$ は線形写像とする。T の特性多項式 $\Phi(\lambda) = \det(\lambda I - T)$ の相異なる根全体を $\beta_1, \ldots, \beta_r$, それらの重複度をそれぞれ $m_1, \ldots, m_r$ とするとき、

$$f_j(\lambda) := (\lambda - \beta_j)^{m_j}, \quad V_j := \ker f_j(T) = \{u \in V; (T - \beta_j I)^{m_j} u = 0\} \quad (j = 1, \ldots, r)$$

とおくと、V_j は T 不変で、

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

証明

- 各 V_j が T 不変であること。$u \in V_j$ とするとき、

$$(T-\beta_j I)^{mj}(Tu) = T\left[(T-\beta_j I)^{m_j}u\right] = T0 = 0$$

であるから、$Tu \in V_j$.

- $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_r$ であること。$j \in \{1, \ldots, r\}$ に対して、

$$g_j(\lambda) := \frac{\Phi(\lambda)}{f_j(\lambda)} = \prod_{i \neq j}(\lambda - \beta_i)^{m_i}$$

とおくと、$g_1(\lambda)$, ..., $g_r(\lambda)$ の最大公約多項式は 1 であるから、$\exists h_1(\lambda), \ldots, h_r(\lambda) \in K[\lambda]$ s.t.

$$g_1(\lambda)h_1(\lambda) + \cdots + g_r(\lambda)h_r(\lambda) = 1. \tag{2}$$

$\forall u \in V$ に対して、

$$u_i := g_i(T)h_i(T)u$$

とおくと、(2) から、

$$u_1 + \cdots + u_r = u.$$

実は $u_i \in V_i$ $(i \in \{1, \ldots, r\})$ である。実際、Cayley-Hamiltion の定理 $\Phi(T) = O$ により

$$f_i(T)u_i = f_i(T)g_i(T)h_i(T)u = \Phi(T)h_i(T)u = 0.$$

- $i \neq j$ ならば $V_i \cap V_j = \{0\}$ であること。$f_i(\lambda)$ と $f_j(\lambda)$ は互いに素であるから、

$$\exists \varphi_i(\lambda), \varphi_j(\lambda) \in K[\lambda] \quad \text{s.t.} \quad \varphi_i(\lambda)f_i(\lambda) + \varphi_j(\lambda)f_j(\lambda) = 1.$$

ゆえに、任意の $u \in V$ に対して、

$$\varphi_i(T)f_i(T)u + \varphi_j(T)f_j(T)u = u$$

が成り立つが、$u \in V_i \cap V_j$ の場合は、$f_i(T)u = f_j(T)u = 0$ であるから、$u = 0$. すなわち $V_i \cap V_j = \{0\}$. ■

定理 3.5 (任意の線形変換の Jordan 標準形の存在) $n \in \mathbf{N}$ とする。V は $\mathbf{C}$ 上の n 次元線型空間で、$T\colon V \to V$ は線形写像とする。このとき、V の基底 $\mathcal{E}$ で、T の $\mathcal{E}$ に関する行列が Jordan 行列であるものが存在する。

証明　T の特性多項式の相異なる根全体を β_1, ..., β_r とし、それらの重複度を m_1, ..., m_r とする。補題より、$V_i := \ker(\beta_i I - T)^{m_i}$ とおくと、V_i は T 不変で、

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

$T - \beta_i I$ の V_i への制限 $N_i := (T - \beta_i I)|_{V_i}$ は冪零であるから、V_i の基底 $\mathcal{E}_i$ で、N_i の $\mathcal{E}_i$ に関する表現行列が Jordan 行列であるものが存在する。その Jordan 行列を J_i とおくと、$T|_{V_i}$ の表現行列は $J_i - \beta_i I_{m_i}$ である (I_{m_i} は m_i 次の単位行列を表す)。

$\mathcal{E}_1$, ..., $\mathcal{E}_r$ を合わせると、V の基底になる。それを $\mathcal{E}$ と書くと、$\mathcal{E}$ に関する T の表現行列は、

$$(J_1 - \beta_1 I_{m_1}) \oplus \cdots \oplus (J_r - \beta_r I_{m_r})$$

となるが、これは Jordan 行列である。■

3.5 一意性

(難しいことではないが、書くとそれなりに長くなる。講義だったらさぼっても良いような気もする。)

命題 3.6 (1 つの固有値しか持たない線形変換の Jordan 標準形の存在と一意性) $K = \mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$ とする。V は K 上の n 次元線型空間で、$T\colon V \to V$ は線形写像で、固有値はすべて $\alpha \in K$ (n 重根) とする。このとき、V の基底 $\mathcal{E}$ で、T の $\mathcal{E}$ に関する行列が Jordan 行列であるものが存在する。また、このような Jordan 行列は、Jordan 細胞の並べ方を除いて一意的である。

証明 (存在) $S := T - \alpha I$ は冪零である。実際、T の固有多項式が $\Phi_T(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$ であることから、S の固有多項式は $\Phi_S(\lambda) = \lambda^n$ であり、Hamilton-Cayley の定理から、$S^n = \Phi_S(S) = O$.

命題 3.2 から V の基底 $\mathcal{E}$ で、S の $\mathcal{E}$ に関する表現行列は、固有値 0 の Jordan 細胞を並べた Jordan 行列、つまり

$$J_{d_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{d_r}(0)$$

の形をした行列となるものが存在することが分かる。このとき、$T = S + \alpha I$ の $\mathcal{E}$ に関する表現行列は、

$$J_{d_1}(\alpha) \oplus \cdots \oplus J_{d_r}(\alpha)$$

であり、これは Jordan 行列である。

(一意性) V の 2 つの基底 $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ に関する T の表現行列が、それぞれ Jordan 行列 J, J' であったとする。このとき、$J - \alpha I_n$, $J' - \alpha I_n$ は、それぞれ $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ に関する $T - \alpha I$ の表現行列であり、ともに Jordan 行列である。$T - \alpha I$ は冪零であるから、$J - \alpha I_n$, $J' - \alpha I_n$ の固有値 (対角成分) はすべて 0 である。つまり、$\exists k, \ell \in \mathbf{N}$, $\exists t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_\ell \geq 0$ s.t.

$$J - \alpha I_n = J_{t_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{t_k}(0), \quad J' - \alpha I_n = J_{s_1}(0) \oplus \cdots \oplus J_{s_\ell}(0).$$

ゆえに

$$J = J_{t_1}(\alpha) \oplus \cdots \oplus J_{t_k}(\alpha), \quad J' = J_{s_1}(\alpha) \oplus \cdots \oplus J_{s_\ell}(\alpha).$$

命題 3.3 より、次数 j の細胞の個数 m_j は、二つの行列で共通であるから、$k = \ell$ で、$t_1, \ldots, t_k$ を並べ変えたものが $s_1, \ldots, s_k$ となっている。■

定理 3.7 $n \in \mathbf{N}$ とする。V は $\mathbf{C}$ 上の n 次元線型空間で、$T\colon V \to V$ は線形写像とする。このとき、T の表現行列である Jordan 行列は、Jordan 細胞の並べ方を除けば一意的である。

証明 V のある基底 $\mathcal{E}$ に関する T の表現行列が、Jordan 行列 J になったとする。J の対角成分は重複度も込めて T の固有値に等しい (もともと線形変換の固有値とは、表現行列の固有値のことであり、また、上三角行列の固有値は対角成分に等しい)。T の相異なる固有値全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, それらの重複度を $m_1, \ldots, m_r$ とおく。また、固有値 α_i に属する T の広義固有空間 $\ker(\alpha_i I - T)^{m_i}$ を W_i とおく。

J の中の、固有値 α_i の Jordan 細胞に対応する $\mathcal{E}$ のベクトルを (順番を保って) 抜き出す:

$$e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,m_i} \quad (\text{もちろん } m_i \text{ 個}).$$

このとき $W_i = \operatorname{span}\langle e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,m_i}\rangle$ が成り立つ。実際、$W_i \supset \operatorname{span}\langle e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,m_i}\rangle$ は容易に証明でき[1]、両者の次元はともに m_i で等しい。

[1](念のため) J の 1 つの細胞 $J_k(\alpha_i)$ に対応する $\mathcal{E}$ のベクトル $e_\ell, \ldots, e_{\ell+k-1}$ について、$Te_\ell = \alpha_i e_\ell$, $Te_{\ell+1} = e_\ell + \alpha_i e_{\ell+1}$, $\cdots$, $Te_{\ell+k-1} = e_{\ell+k-2} + \alpha_i e_{\ell+k-1}$. これから $e_\ell, \ldots, e_{\ell+k-1} \in W_i$ は明らか。

W_i は T 不変で、$\mathcal{E}_i := \langle e_{i,1}, e_{i,2}, \ldots, e_{i,m_i} \rangle$ は W_i の基底になり、$T|_{W_i}$ の $\mathcal{E}_i$ に関する表現行列 J_i は、もともと J にあった (固有値 α_i の) Jordan 細胞を抜きだして直和を取ったもので、次のような形をしている:

$$J_i = J_{k_1}(\alpha_i) \oplus J_{k_2}(\alpha_i) \oplus \cdots \oplus J_{k_{n_i}}(\alpha_i).$$

命題 3.6 により、J_i の中に、任意の次数 k の細胞がいくつあるかは、基底 $\mathcal{E}$ の取り方にはよらず、T と α_i だけで定まる。■

4 Jordan 標準形の存在と一意性 (2) 単因子による方法

(この節は工事中)

4.1 x 行列

変数 x の多項式を成分とする行列 (簡単のため x 行列と呼ぶ) を考える。例えば

$$A(x) = \begin{pmatrix} x^2+3x-1 & 2x \\ x^{2009}-75x^3 & 34x^{56} \end{pmatrix}$$

のようなもののことである。

$K = \mathbf{R}$ または $K = \mathbf{C}$ とし、$K[x]$ の元を成分とする m 行 n 列の行列全体を $M(m,n;K[x])$ で表す。$m = n$ の場合、簡単のため $M(n;K[x])$ と表す。

もちろん $K \subset K[x]$ であるから、$M(m,n;K) \subset M(m,n;K[x])$ である。

$A(x) \in M(m,n;K[x])$ の成分であるすべての多項式の次数の最大値を、$A(x)$ の**次数**と呼ぶ。例えば、上の行列の総次数は 2009 である。零行列の次数は $-\infty$ と約束する。$A(x)$ の次数を $\deg A(x)$ で表す。

K の元を成分とする「普通の」行列と同様に和、積、スカラー倍、行列式などが定義できる。

x 行列は、行列を係数とする x の多項式とみなすこともできる ($M(m,n;K[x]) \simeq M(m,n;K)[x]$)。例えば

$$\begin{pmatrix} x^2+2x+3 & 4x+5 \\ 6x^2+7x-8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$n \in \mathbf{N}$ とする。$A(x) \in M(n;K[x])$ に対して、

$$A(x)B(x) = B(x)A(x) = I \tag{3}$$

を満たす $B(x) \in M(n;K[x])$ が存在するとき (I は n 次の単位行列)、$A(x)$ は**可逆**であるという。$A(x)$ が可逆であるとき、(3) を満たす $B(x)$ は一意的に定まる。これを $A(x)$ の**逆行列**と呼び、$A(x)^{-1}$ で表す。

$A(x)$ が可逆であるためには、$\det A(x) \in K^*$, すなわち

$$\det A(x) \in K, \quad \det A(x) \neq 0$$

であることが必要十分である。このとき、「普通の」行列の場合と同じように、$A(x)$ の余因子行列を $A(x)$ の行列式で割ったものが逆行列 $A(x)^{-1}$ となる。

命題 4.1 $K = \mathbf{R}$ または $K = \mathbf{C}$ とする。$n \in \mathbf{N}$ で、$A(x),\ B(x) \in M(n; K[x])$ が

$$A(x) = A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_{k-1}x + A_k, \quad A_0 \neq O,$$
$$B(x) = B_0 x^\ell + B_1 x^{\ell-1} + \cdots + B_{\ell-1}x + B_\ell, \quad B_0 \in GL(n; K)$$

と表されるとき、

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x), \quad \deg R(x) < \deg B(x)$$

を満たす x 行列 $Q(x)$ と $R(x)$ が一意的に存在する。(順序を変えた $A(x) = Q(x)B(x) + R(x)$ を満たす $Q(x),\ R(x)$ も一意的に存在する。)

(何か変だな。$A(x) = O$ だって良いはずだ。$B(x)$ の最高次の係数 $B_0 \in GL(n; K)$ であれば割れるだろう。)

4.2 x 行列の対等と基本変形

次のようなことを学んでいるはず。

行列の階数と基本変形による計算

$m, n \in \mathbf{N}$ とするとき、$A,\ B \in M(m, n; K)$ について、

$$A \sim B \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \exists Q \in GL(m; K), \exists P \in GL(n; K) \quad \text{s.t.} \quad A = QBP$$

によって $M(m, n; K)$ 上の同値関係 $\sim$ を導入し、その同値類の代表元として、

$$E_r = \operatorname{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0) \quad (\text{対角線に } 1 \text{ が } 0 \text{ 個並ぶ})$$

の形の行列が取れる。$A \sim E_r$ であるとき、$\operatorname{rank} A = r$ と言う。A が与えられたとき、基本変形によって、E_r に変形できる。A と B が対等であることと、基本変形で移り合うこと (A が B に変形できる、B が A に変形できる) は同値である。

この話の x 行列バージョンをする、ということ。

定義 4.2 $K = \mathbf{R}$ または $K = \mathbf{C}$, $m, n \in \mathbf{N}$ とする。$A(x),\ B(x) \in M(m, n; K[x])$ に対し、$A(x)$ と $B(x)$ が**対等**であるとは、

$$A(x) = Q(x)B(x)P(x)$$

を満たす可逆行列 $Q(x) \in M(m; K[x]),\ P(x) \in M(n; K[x])$ が存在することをいう。

$A(x)$ と $B(x)$ が対等であることを $A(x) \sim B(x)$ と書くことにする。この 2 項関係 $\sim$ は、$M(m, n; K[x])$ 上の同値関係である。

定義 4.3 (基本行列) n 次の**基本行列** (elementary matrix) とは、次の 3 種類の行列の総称である。

1) (**互換行列** (interchange matrix)) $i \neq j$ とするとき、

$$P_n(i,j) := \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & \cdots & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \cdots & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ & \cdots & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \cdots & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(単位行列の第 i 行と第 j 行を入れ替えたもの。)

2) $c \in K^*$ (i.e., $c \in K$, $c \neq 0$) とするとき、

$$Q_n(i;c) := \operatorname{diag}(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad \overset{\substack{i \\ \downarrow}}{c} \quad 1 \quad \cdots \quad 1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(単位行列の (i,i) 成分を c にしたもの。)

3) $i \neq j$, $c(x) \in K[x]$ とするとき、

$$R_n(i,j;c(x)) := I + c(x)E_{ij} \quad (\text{ここで } E_{ij} \text{ は行列単位})$$

(単位行列の (i,j) 成分を $c(x)$ にしたもの。)

命題 4.4 (基本行列の行列単位による表現) (一部定義中の式と重複するが)

$$\begin{aligned} &P_n(i,j) = E_{ij} + E_{ji} + \sum_{k \neq i,j} E_{kk} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} \quad (i \neq j), \\ &Q_n(i;c) = I + (c-1)E_{ii}, \\ &R_n(i,j;c(x)) = I + c(x)E_{ij} \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

(I は n 次の単位行列を表す。)

証明　明らか。■

命題 4.5 (基本行列の掛け算) $A(x) \in M(m,n;K[x])$ とする。

(1) $A(x)$ に左から $P_m(i,j)$ をかけると、$A(x)$ の第 i 行と第 j 行が交換される。

(2) $A(x)$ に右から $P_n(i,j)$ をかけると、$A(x)$ の第 i 列と第 j 列が交換される。

(3) $A(x)$ に左から $Q_m(i;c)$ をかけると、$A(x)$ の第 i 行が c 倍される。

(4) $A(x)$ に右から $Q_n(i;c)$ をかけると、$A(x)$ の第 i 列が c 倍される。

(5) $A(x)$ に左から $R_m(i,j;c(x))$ をかけると、$A(x)$ の第 i 行に第 j 行の $c(x)$ 倍が加わる。

(6) $A(x)$ に右から $R_n(i,j;c(x))$ をかけると、$A(x)$ の第 i 列に第 j 列の $c(x)$ 倍が加わる。

証明　数行列のときと同じ。■

定義 4.6 (行列の基本変形) 命題 4.5 にある変形を**基本変形** (elementary transformation) と総称する。そのうち左から掛け算するものを**行に関する基本変形** (基本行演算, elementary row operation)、右から掛け算するものを**列に関する基本変形** (基本列演算, elementary column operation) と呼ぶ。

命題 4.7 (基本行列の逆行列) 基本行列は可逆行列である。

$$\begin{aligned}
&P_n(i,j)^{-1} = P_n(i,j) \quad (i \neq j),\\
&Q_n(i;c)^{-1} = Q_n(i;c^{-1}) \quad (c \neq 0),\\
&R_n(i,j;c(x))^{-1} = R_n(i,j;-c(x)) \quad (i \neq j).
\end{aligned}$$

証明　明らか。■

系 4.8 基本変形は「可逆」である。すなわち、ある行列 $A(x)$ に基本変形を施して行列 $B(x)$ が得られた場合、$B(x)$ に基本変形を施して $A(x)$ に戻すことができる。

証明　明らか。■

命題 4.9 $A(x)$ に有限回の基本変形を施して $B(x)$ が得られたとき、$A(x) \sim B(x)$ である。

証明　基本行列の積は可逆行列であるから、明らか。■

実はこの命題の逆が成り立つが、その証明は少し後に回す。

定義 4.10 (行列式因子) $n \in \mathbf{N}$, $A(x) \in M(n;K[x])$ とする。$k \in \{1,\ldots,n\}$ とするとき、$A(x)$ のすべての k 次小行列式の最大公約数 (最高次係数は 1 とする) を、$A(x)$ の k 次**行列式因子**と呼び、$d_k(x)$ で表す。ただし、k 次小行列式がすべて 0 のときは、$d_k(x) = 0$ とする。

命題 4.11 行列の基本変形で行列式因子は変わらない。

証明　$A(x)$ の k 次行列式因子を $d_k(x)$ と書く。

(1) $i \neq j$ とするとき、$A(x)$ に $P_n(i,j)$ をかけても、k 次小行列式は、何も変わらないか、せ

いぜい符号が変わるだけである。ゆえに $d_k(x)$ は変わらない。

(2) $c \neq 0$ とするとき、$A(x)$ に $Q_n(i;c)$ をかけても、k 次小行列式は、何も変わらないか、せいぜい c 倍されるだけである。ゆえに $d_k(x)$ は変わらない。

(3) $i \neq j$, $c(x) \in K[x]$ とする。$A(x)$ に $R_n(i,j;c(x))$ を左からかけると、$A(x)$ の第 i 行に、第 j 行の $c(x)$ をかけたものが加えられる。その結果を $\widetilde{A}(x)$ とする。また $\widetilde{A}(x)$ の k 次行列式因子を $\widetilde{d}_k(x)$ と書く。

(a) $A(x)$ の k 次小行列が、もとの行列の第 i 行を含まなければ、対応する $\widetilde{A}(x)$ の小行列も同じであるから、行列式は等しい。

(b) $A(x)$ の k 次小行列が、もとの行列の第 i 行と第 j 行をともに含むならば、その行列式と、対応する $\widetilde{A}(x)$ の小行列式は等しい (行列式のある行の何倍かを別の行に加えても行列式の値は変わらない)。

(c) $A(x)$ の k 次小行列が、もとの行列の第 i 行を含み、第 j 行を含まないとする。対応する $\widetilde{A}(x)$ の小行列の行列式は、

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i(x) + c(x)\boldsymbol{a}_j(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i(x) \\ \vdots \end{pmatrix} + c(x) \det \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_j(x) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

右辺第 1 項、第 2 項に現れる det は、$A(x)$ の k 次の小行列式であるので、ともに $d_k(x)$ で割り切れる。ゆえに左辺も $d_k(x)$ で割り切れる。 (a), (b), (c) から $d_k(x)|\widetilde{d}_k(x)$. 基本変形の可逆性より $\widetilde{d}_k(x)|d_k(x)$ も言えるので、$d_k(x) = \widetilde{d}_k(x)$.

■

4.3 単因子

定理 4.12 (x **行列の単因子の存在と一意性**) $K=\mathbf{R}$ または $K=\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$ とする。$A(x)\in M(n;K[x])$ ならば、$\exists r\in\{0,1,\cdots,n\}$, $\exists e_1(x),\dots,e_r(x)\in K[x]$ s.t. $\forall j\in\{1,\dots,r\}$ に対して、$e_j(x)$ の最高次の係数は 1 で、

$$e_j(x)|e_{j+1}(x) \quad (j=1,2,\dots,r-1)$$

を満たし、$A(x)$ は基本変形によって

$$\begin{pmatrix} e_1(x) & & & & & & \\ & e_2(x) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & e_r(x) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(e_1(x),e_2(x),\dots,e_r(x),0,\dots,0) \tag{4}$$

に変形出来る。この r, $e_1(x)$, ..., $e_r(x)$ は、$A(x)$ から一意的に定まる。また、

$$d_k(x) := A(x) \text{ のすべての } k \text{ 次小行列式の最大公約式のうち最高次係数が 1 のもの}$$

とおくとき、

$$e_1(x)=d_1(x), \quad e_j(x)=\frac{d_j(x)}{d_{j-1}(x)} \quad (j=2,\dots,r) \tag{5}$$

が成り立つ。

r を $A(x)$ の階数、$e_1(x)$, ..., $e_r(x)$ を $A(x)$ の**単因子** (elementary divisor) と呼ぶ。(4) を $A(x)$ の**スミス標準形**あるいは**単因子標準形**と呼ぶ。

証明 (一意性) (4) が成り立ったとする。

$$\begin{aligned} &d_1(x)=e_1(x), \quad d_2(x)=e_1(x)e_2(x), \quad d_r(x)=e_1(x)e_2(x)\cdots e_r(x), \\ &d_{r+1}(x)=\cdots=d_n(x)=0. \end{aligned}$$

これから (5) が得られる。ゆえに r, $e_1(x)$, ..., $e_r(x)$ は $A(x)$ から一意的に定まる。

(変形できること) n に関する帰納法で証明する。$n=1$ ならば (確かめるべきことはたくさんあるが、どれも) 明らかである。$n>1$ として、$n-1$ 次の x 行列は、必ず基本変形によって上の形に変形できると仮定する。$A(x)\in M(n;K[x])$ とする。$A(x)=O$ ならば (4) の形をしているので、$A(x)\neq O$ とする。$A(x)$ と基本変形で互いに移りあう行列のうち、$(1,1)$ 成分が 0 でなく、次数が最小のものを取る (無限にたくさんあるものの中から最小のものを取り出すというのは、何かやり方を見付けないと実行不可能であるが、そういうものがあることは認められるであろう)。その第 1 行を $(1,1)$ 成分の最高次係数で割ったものを

$$B(x)=\begin{pmatrix} e_1(x) & b_{12}(x) & \cdots & b_{1n}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & \cdots & b_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \cdots & b_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

とおく。$B(x)$ は $A(x)$ と基本変形で互いに移り合う。$B(x)$ の第 1 行, 第 1 列の成分はすべて $e_1(x)$ で割り切れる。そうでなければ、次数の最小性に反するから。そこで、$e_1(x)$ で掃き出しをすると、

$$\widetilde{B}(x) = \begin{pmatrix} e_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \widetilde{b}_{22}(x) & \cdots & \widetilde{b}_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \widetilde{b}_{n2}(x) & \cdots & \widetilde{b}_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

このとき $e_1(x)|\widetilde{b}_{ij}(x)$ である (そうでなければ、次数の最小性に反する)。帰納法の仮定から、

$$\widehat{B}(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_{22}(x) & \cdots & \widetilde{b}_{2n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \widetilde{b}_{n2}(x) & \cdots & \widetilde{b}_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

は基本変形で

$$\begin{pmatrix} e_2(x) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e_r(x) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

に変形できる。ここで $e_j(x)$ $(j = 2, \ldots, r)$ は、最高次係数が 1 の多項式で、$e_2(x)|e_3(x)|\ldots|e_r(x)$ を満たす。$e_2(x)$ は、$\widehat{B}(x)$ の 1 次の行列式因子であるから、$e_1(x)|e_2(x)$ を満たす。$A(x)$ は基本変形で

$$\begin{pmatrix} e_1(x) & & & & & & \\ & e_2(x) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & e_r(x) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

に変形できる。■

系 4.13 (可逆行列の特徴づけ) $K = \mathbf{R}$ または $K = \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, $A(x) \in M(n; K[x])$ とする。

(1) $A(x)$ が可逆であるためには、基本変形で単位行列 I に変形できること (単因子標準形が単位行列であること) が必要十分である。

(2) $A(x)$ が可逆であるためには、$A(x)$ が基本行列の積として書けることが必要十分である。

(3) $A(x)$ が可逆であれば、$A(x)$ は左基本変形のみで単位行列に変形できる (右基本変形のみでも単位行列に変形できる)。

証明

(1) 次の二つのことに注意する。

- $A(x)$ が可逆であるためには、$\det A(x)$ が 0 でない定数であることが必要十分である。
- 基本変形によって、行列式の値は、0 でない定数倍しか違わない。

$A(x)$ が基本変形によって単位行列 I に変形できるならば、$\det A(x)$ は $\det I = 1$ と 0 でない定数倍しか違わない。すなわち $\exists c \in K^*$ s.t. $\det A(x) = c$. ゆえに $A(x)$ は可逆である。逆に $A(x)$ が可逆行列とすると、$\exists c \in K^*$ s.t. $\det A(x) = c$. ゆえに $A(x)$ を基本変形によって単因子標準形に変形したとき、その行列式も 0 でない K の要素となる。そうなるためには、階数が n に等しく、$e_1(x) = e_2(x) = \cdots = e_n(x) = 1$ となるしかない。すなわち、$A(x)$ の単因子標準形は単位行列である。

(2) $A(x)$ が可逆行列であるためには、(1) より、基本行列 $P_1(x), \ldots, P_k(x)$, $Q_1(x), \ldots, Q_\ell(x)$ が存在して

$$Q_1(x) \cdots Q_\ell(x) A(x) P_1(x) \cdots P_k(x) = I$$

が成り立つことが必要十分である。この式は

$$A(x) = Q_\ell(x)^{-1} \cdots Q_1(x)^{-1} P_k(x)^{-1} \cdots P_1(x)^{-1}$$

と書き直されるが、基本行列の逆行列は基本行列であることから、$A(x)$ が基本行列の積で書けることと同値であることが分かる。

(3) $A(x)$ が可逆行列ならば、(2) で示したことから、

$$A(x) P_1(x) \cdots P_k(x) Q_1(x) \cdots Q_\ell(x) = I, \quad P_1(x) \cdots P_k(x) Q_1(x) \cdots Q_\ell(x) A(x) = I.$$

それぞれ、右基本変形のみ、左基本変形のみで、$A(x)$ を I に変形している。■

系 4.14 $K = \mathbf{R}$ または $K = \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$ とする。$A(x)$, $B(x) \in M(n; K[x])$ について、次の 3 条件は互いに同値である。

(i) $A(x)$ と $B(x)$ は対等、すなわち可逆な行列 $P(x), Q(x) \in M(n; K[x])$ が存在して $B(x) = Q(x)A(x)P(x)$ が成り立つ。

(ii) $A(x)$ と $B(x)$ は基本変形で互いに移り合う。

(iii) $A(x)$ と $B(x)$ の単因子が一致する (同じ単因子標準形を持つ)。

証明 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 可逆な行列は、基本行列の積で表されることから明らかである。

(ii) $\Longrightarrow$ (i) 基本行列の積は可逆行列であるから、明らかである。

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) $A(x)$ と $B(x)$ が同じ単因子標準形を持つならば (基本変形で同じ行列に変形できるならば)、それを経由点にして、基本変形で一方をもう一方に変形することが出来る。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は単因子の一意性による。■

定理 4.15 (相似 ⇔ 特性行列が対等) $K = \mathbf{R}$ または $K = \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$ とする。A, $B \in M(n; K)$ が相似、すなわち、

$$\exists P \in GL(n; \mathbf{C}) \quad \text{s.t.} \quad B = P^{-1}AP$$

となるためには、$xI - A$ と $xI - B$ が対等であることが必要十分である。

証明 (必要性) $B = P^{-1}AP$ ならば、$xI - B = xI - P^{-1}AP = P^{-1}(xI - A)P$. P は可逆行列であるから、$xI - A$ と $xI - B$ は対等である。

(十分性) $xI-A$ と $xI-B$ が対等であるとする。このとき、可逆な行列 $P(x)$ と $Q(x)$ が存在して、

$$(xI-A)P(x) = Q(x)(xI-B).$$

割算をして、$\exists P_1(x), Q_1(x), P, Q$ s.t.

$$P(x) = P_1(x)(xI-B) + P, \quad Q(x) = (xI-A)Q_1(x) + Q.$$

代入して

$$(xI-A)(P_1(x)(xI-B)+P) = ((xI-A)Q_1(x)+Q)(xI-B).$$

移項して整理すると

$$(xI-A)(P_1(x)-Q_1(x))(xI-B) = x(Q-P) + AP - QB.$$

次数と係数を比較して、

$$P_1(x) = Q_1(x), \quad P = Q, \quad AP = QB.$$

命題 4.16 $A \in M(n; \mathbf{C})$ に対して、$xI-A$ の単因子を $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ とするとき、$e_n(x)$ は A の最小多項式に等しく、積 $e_1(x) \cdot \cdots \cdot e_n(x)$ は A の固有多項式 $\det(xI-A)$ に等しい。

4.4 単因子の求め方

4.4.1 つれづれに

「まず計算することを覚える。次に計算をしないことを覚える。最後に、時々計算することを覚える。[2]」

単因子を求めるアルゴリズムが書かれていない本が多すぎる。「次数最小」というよくある議論は、ある意味で清清しい (アルゴリズムを述べることはしないと宣言しているに等しい)。それらしいことが書いてあるが、良く読むと書き切っていない本があって、そういうのが困る。基本変形で求まる、なんて書く資格はない。連立 1 次方程式を解くアルゴリズムは詳しく書いてあるのに、なんともバランスが悪い。最大公約数について、ユークリッドの互除法を説明しないこともあるが、あれは原理的に (素) 因数分解出来ることが分かっていて、規模の (とっても) 小さい問題については、それで何とかなるから、まあ、良いのかと。単因子についても、問題の規模が小さければ、行列式因子を求めてしまうというのが現実的かも。テストに結構大きな行列の問題を出すのは反則だな、きっと。

21 世紀の数学テキストの必須要素は、「定義と定理とアルゴリズム」だ。常にアルゴリズムについて言及する (効率的なアルゴリズムは知られていない、というのも可) という姿勢は、大事であろう。

中間値の定理を、区間縮小法で証明して、二分法のプログラムを掲示する。実数値連続関数の最大値の存在については、「うまい方法がない」と正直に言う、かな。

[2] コントラクト・ブリッジの格言のもじり。

4.4.2 例

最初に、サイズの小さい Jordan 行列 A に対して、その特性行列 $xI-A$ の単因子を、基本変形や、行列式因子を用いて求めてみよう。(実は、ここで計算で得た結果は、後で得られる命題によって「不要」となる— Jordan 標準形が分かっていれば、単純単因子がすぐ分かるので、単因子も求まるから)。あくまでも計算練習です。

$xI-A$ に基本変形を有限回施して、条件

(i) $e_1(x)|e_2(x)|\cdots|e_n(x)$

(ii) $e_j(x)$ の最高次の係数は 1 $(j=1,\ldots,n)$

を満す $e_1(x)$, ..., $e_n(x)$ を対角成分とする対角行列に変形できれば、それが $xI-A$ のスミス標準形であるから、$e_1(x)$, ..., $e_n(x)$ は、$xI-A$ の単因子と分かる。

あるいは、以下の例では、行列式因子 $d_k(x)$ $(k=1,\ldots,n)$ も比較的簡単に (目で眺めて) 分かるので (特に $d_n(x)=\det(xI-A)$ に注意)、それからも単因子を求めるのは簡単である。

(1) $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ の場合、$e_1(x)=x-\alpha$, $e_2(x)=x-\alpha$ である。実際、

$$xI-A=\begin{pmatrix}x-\alpha & 0\\ 0 & x-\alpha\end{pmatrix}$$

自身がスミス分解の条件を満すので ($\because$ $(x-\alpha)|(x-\alpha)$)、対角成分が単因子である。あるいは、$d_1(x)=x-\alpha$, $d_2(x)=(x-\alpha)^2$ からも分かる。

(2) $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ (ただし $\alpha\neq\beta$) の場合、$e_1(x)=1$, $e_2(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$. 実際、

$$xI-A=\begin{pmatrix}x-\alpha & 0\\ 0 & x-\beta.\end{pmatrix}$$

を眺めて、$\mathrm{GCD}(x-\alpha,x-\beta)=1$ であるから、基本変形で定数が得られるはずであることに注意して、

$$\begin{pmatrix}x-\alpha & 0\\ 0 & x-\beta\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x-\alpha & x-\beta\\ 0 & x-\beta\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\beta-\alpha & x-\beta\\ \beta-x & x-\beta\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & x-\beta\\ \dfrac{\beta-x}{\beta-\alpha} & x-\beta\end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{\beta-x}{\beta-\alpha} & x-\beta-(x-\beta)\dfrac{\beta-x}{\beta-\alpha}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{\beta-x}{\beta-\alpha} & \dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{\beta-\alpha}\end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{\beta-\alpha}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (x-\alpha)(x-\beta)\end{pmatrix}.$$

この最後の行列は、明らかにスミス分解の条件を満す ($\because$ $1|(x-\alpha)(x-\beta)$)。あるいは、$d_1(x)=\mathrm{GCD}(x-\alpha,x-\beta)=1$, $d_2(x)=\det(xI-A)=(x-\alpha)(x-\beta)$ からも分かる。

(3) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の場合、$e_1(x) = 1,\, e_2(x) = (x-\alpha)^2$ である。実際、

$$xI - A = \begin{pmatrix} x-\alpha & -1 \\ 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & x-\alpha \\ x-\alpha & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-\alpha \\ -(x-\alpha) & 0 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(x-\alpha) & (x-\alpha)^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x-\alpha)^2 \end{pmatrix}$$

とスミス分解が得られるし、眺めて得られる $d_1(x) = 1,\, d_2(x) = (x-\alpha)^2$ からも分かる。

(4) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の場合、$e_1(x) = x-\alpha,\, e_2(x) = x-\alpha,\, e_3(x) = x-\alpha$ である。実際、

$$xI - A = \begin{pmatrix} x-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix}$$

は明らかにスミス分解である ($\because (x-\alpha)|(x-\alpha)|(x-\alpha)$)。また、$d_1(x) = x-\alpha,\, d_2(x) = (x-\alpha)^2,\, d_3(x) = \det(xI-A) = (x-\alpha)^3$ からも分かる。

(5) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の場合、 $e_1(x) = 1,\, e_2(x) = x-\alpha,\, e_3(x) = (x-\alpha)^2$. 実際、

$$xI - A = \begin{pmatrix} x-\alpha & -1 & 0 \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & x-\alpha & 0 \\ x-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-\alpha & 0 \\ \alpha-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-\alpha & 0 \\ \alpha-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha-x & (x-\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x-\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-\alpha \\ 0 & (x-\alpha)^2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & (x-\alpha)^2 \end{pmatrix}$$

というスミス分解が得られる $(1|(x-\alpha)|(x-\alpha)^2)$。一方、$d_1(x) = 1,\, d_3(x) = \det(xI-A) = (x-\alpha)^3$ は明らかで、また

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x-\alpha \end{vmatrix} = -(x-\alpha)$$

という 2 次の小行列式があることを確認すれば、$d_2(x) = x-\alpha$ も分かるので、

$$e_1(x) = d_1(x) = 1, \quad e_2(x) = \frac{d_2(x)}{d_1(x)} = \frac{x-\alpha}{1} = x-\alpha, \quad e_e(x) = \frac{d_3(x)}{d_2(x)} = \frac{(x-\alpha)^3}{x-\alpha} = (x-\alpha)^2$$

としても良い。

(6) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の場合、 $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = 1$, $e_3(x) = (x-\alpha)^3$. 実際、

$$
\begin{aligned}
xI - A &= \begin{pmatrix} x-\alpha & -1 & 0 \\ 0 & x-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & x-\alpha & 0 \\ x-\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-\alpha & 0 \\ \alpha-x & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-\alpha & 0 \\ \alpha-x & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha-x & (x-\alpha)^2 & -1 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x-\alpha)^2 & -1 \\ 0 & 0 & x-\alpha \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (x-\alpha)^2 \\ 0 & x-\alpha & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (x-\alpha)^2 \\ 0 & \alpha-x & 0 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (x-\alpha)^2 & -(\alpha-x)(x-\alpha)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (x-\alpha)^2 & (x-\alpha)^3 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-\alpha)^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

というスミス分解が得られる $(1|1|(x-\alpha)^3$ を確認)。また、$d_1(x) = 1$, $d_3(x) = \det(xI-A) = (x-\alpha)^3$ は明らかで、2 次の小行列式に

$$
\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x-\alpha & -1 \end{vmatrix} = 1
$$

があることに気付けば、$d_2(x) = 1$ も分かる。ゆえに

$$
e_1(x) = d_1(x) = 1, \quad e_2(x) = \frac{d_2(x)}{d_1(x)} = \frac{1}{1} = 1, \quad e_3(x) = \frac{d_3(x)}{d_2(x)} = \frac{(x-\alpha)^3}{1} = (x-\alpha)^3.
$$

(7) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ の場合 (ただし $\alpha \neq \beta$)、$e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x-\alpha$, $e_3(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$.

実際、

$$
xI-A=\begin{pmatrix} x-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & x-\beta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x-\alpha & 0 & x-\beta \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & x-\beta \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} \beta-\alpha & 0 & x-\beta \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ -(x-\beta) & 0 & x-\beta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x-\beta \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ -\dfrac{x-\beta}{\beta-\alpha} & 0 & x-\beta \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x-\beta \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ -\dfrac{x-\beta}{\beta-\alpha} & 0 & x-\beta+(x-\beta)\dfrac{x-\beta}{\beta-\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ -\dfrac{x-\beta}{\beta-\alpha} & 0 & \dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{\beta-\alpha} \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{\beta-\alpha} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & (x-\alpha)(x-\beta) \end{pmatrix}
$$

というスミス分解が得られる。一方、$\mathrm{GCD}(x-\alpha, x-\beta)=1$ であるから $d_1(x)=1$, また $d_3(x)=\det(xI-A)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$. 0 でない 2 次の小行列式は、$(x-\alpha)^2$ と $(x-\alpha)(x-\beta)$ だけであるから、$d_2(x)=x-\alpha$. これから

$$
e_1(x)=d_1(x)=1, \quad e_2(x)=\frac{d_2(x)}{d_1(x)}=x-\alpha, \quad e_3(x)=\frac{d_3(x)}{d_2(x)}=\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)}{x-\alpha}=(x-\alpha)(x-\beta).
$$

(8) $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ の場合 (ただし $\alpha \neq \beta$)、$e_1(x)=1$, $e_2(x)=1$, $e_3(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$.

実際、

$$
xI-A=\begin{pmatrix} x-\alpha & -1 & 0 \\ 0 & x-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & x-\beta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & x-\alpha & 0 \\ x-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-\beta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-\alpha & 0 \\ \alpha-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-\beta \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha-x & -(x-\alpha)(\alpha-x) & 0 \\ 0 & 0 & x-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha-x & (x-\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & x-\beta \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x-\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & x-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x-\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & x-\beta \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-\beta \\ 0 & (x-\alpha)^2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-\beta & 0 \\ 0 & 0 & (x-\alpha)^2 \end{pmatrix}
$$

ここで

$$
(\beta-\alpha)^2 = \left[-x+(2\alpha-\beta)\right](x-\beta)+(x-\alpha)^2
$$

であるから、第 2 行の $-x+(2\alpha-\beta)$ 倍を第 3 行に加えてから、第 3 列を第 2 列に加えると

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-\beta & 0 \\ 0 & (\beta-\alpha)^2 & (x-\alpha)^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta-\alpha)^2 & (x-\alpha)^2 \\ 0 & x-\beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta-\alpha)^2 & (x-\alpha)^2 - \dfrac{(x-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2}(\beta-\alpha)^2 \\ 0 & x-\beta & 0 - \dfrac{(x-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2}(x-\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta-\alpha)^2 & 0 \\ 0 & x-\beta & -\dfrac{(x-\beta)(x-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\beta-\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{(x-\beta)(x-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-\alpha)^2(x-\beta) \end{pmatrix}.$$

このスミス分解の計算が大変だったが、行列式因子の方は、$d_1(x)=1$, $d_3(x)=\det(xI-A)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ はすぐ分かり、0 でない 2 次小行列式

$$(x-\alpha)^2, \quad (x-\alpha)(x-\beta), \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x-\beta \end{vmatrix} = -(x-\beta)$$

を眺めて $d_2(x)=1$ が得られるので、

$$e_1(x)=d_1(x)=1, \quad e_2(x)=\frac{d_2(x)}{d_1(x)}=\frac{1}{1}=1, \quad e_3(x)=\frac{d_3(x)}{d_2(x)}=\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)}{1}=(x-\alpha)^2(x-\beta).$$

(9) $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ の場合 (ただし $\alpha\neq\beta$, $\beta\neq\gamma$, $\gamma\neq\alpha$)、$e_1(x)=1$, $e_2(x)=1$, $e_3(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. 実際、

$$xI-A=\begin{pmatrix} x-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & x-\beta & 0 \\ 0 & 0 & x-\gamma \end{pmatrix}$$

行列式因子は

$$\begin{aligned} d_1(x) &= \mathrm{GCD}(x-\alpha, x-\beta, x-\gamma)=1, \\ d_2(x) &= \mathrm{GCD}((x-\alpha)(x-\beta), (x-\beta)(x-\gamma), (x-\gamma)(x-\alpha))=1, \\ d_3(x) &= \det(xI-A)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} e_1(x) &= d_1(x)=1, \\ e_2(x) &= \frac{d_2(x)}{d_1(x)}=\frac{1}{1}=1, \\ e_3(x) &= \frac{d_3(x)}{d_2(x)}=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}{1}=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma). \end{aligned}$$

4.4.3 例

一松 [9] による。

$A(x) = (a_{ij}(x))$ を、変数 x の複素係数多項式成分の n 次正方行列、すなわち、$M(n; R)$ (ただし $R := \mathbf{C}[x]$) の要素とする。

(1) $a_{ij}(x)$ のうちで 0 でない最低次の成分を見つけ出し、行と列の交換で、それを $a_{11}(x)$ に移す。

(2) 列方向に掃き出しをする。$j = 2, 3, \ldots, n$ に対して、$a_{1j}(x)$ を $a_{11}(x)$ で割る:

$$a_{1j}(x) = q_{1j}(x)a_{11}(x) + r_{1j}(x), \quad \det r_{1j}(x) < \deg a_{11}(x).$$

第 1 列に $-q_{1j}(x)$ をかけたものを、第 j 列に加える。

(3) もし $a_{1j}(x)$ $(j = 2, \cdots, n)$ のうちに 0 でないものが残っているならば、そのうちで最低次のものを選んで、列の交換によって、$a_{11}(x)$ に移す。そして、(2) に戻る。次数が単調減少することにより、いつかは、$a_{1j}(x) = 0$ $(j = 2, \ldots, n)$ となる。

(4) 今度は行方向に掃き出しをする。最後には、$a_{1j}(x) = a_{j1}(x) = 0$ $(j = 2, \ldots, n)$ となる:

$$\text{書き直した } A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'(x) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

ここで新しい $a_{11}(x)$ は、もとの行列のすべての成分の最大公約多項式である。

最初の $a_{ij}(x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ の最大公約多項式が $a_{11}(x)$ となるわけか。

定義 4.17 $n \in \mathbf{N}$, $A(x) \in M(n; \mathbf{C}[x])$ とする。$A(x)$ が**可逆**であるとは、

$$\det A(x) \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$$

であることをいう。このとき、

$$A(x)B(x) = B(x)A(x) = I_n$$

をみたす $B(x) \in M(n; \mathbf{C}[x]])$ が一意的に存在する。

単因子 (elementary divisor)

4.5 計算例

例とする問題の多くは、色々な本から拝借。計算は独自。

例 4.18 (対馬 p. の問題) $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -3 & 1 & 3\\ -3 & -2 & 6\end{pmatrix}$ とするとき、$xI-A$ の単因子を求めよ。

$$
\begin{aligned}
xI-A &= \begin{pmatrix}x & 2 & -3\\ 3 & x-1 & -3\\ 3 & 2 & x-6\end{pmatrix} \overset{C_2\leftrightarrow C_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}2 & x & -3\\ x-1 & 3 & -3\\ 2 & 3 & x-6\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & x & -3\\ \dfrac{x-1}{2} & 3 & -3\\ 1 & 3 & x-6\end{pmatrix}\\
&\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \dfrac{x-1}{2} & 3-x\dfrac{x-1}{2} & -3+3\cdot\dfrac{x-1}{2}\\ 1 & 3-x\cdot 1 & x-6+3\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \dfrac{x-1}{2} & -\dfrac{(x-1)(x+2)}{2} & \dfrac{3(x-3)}{2}\\ 1 & 3-x & x-3\end{pmatrix}\\
&\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{(x-1)(x+2)}{2} & \dfrac{3(x-3)}{2}\\ 0 & 3-x & x-3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3-x & x-3\\ 0 & -\dfrac{(x-3)(x+2)}{2} & \dfrac{3(x-3)}{2}\end{pmatrix}\\
&\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3-x & 0\\ 0 & -\dfrac{(x-3)(x+2)}{2} & \dfrac{3(x-3)}{2}-\dfrac{(x-3)(x+2)}{2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3-x & 0\\ 0 & -\dfrac{(x-3)(x+2)}{2} & -\dfrac{(x-1)(x-3)}{2}\end{pmatrix}\\
&\longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3-x & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{(x-1)(x-3)}{2}\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x-3 & 0\\ 0 & 0 & (x-1)(x-3)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ゆえに $e_1(x)=1,\ e_2(x)=x-3,\ e_3(x)=(x-1)(x-3)$. ■

5 Jordan 標準形の求め方概観

杉浦 [2], 銀林 [10], 伊理・韓 [6], Strang [11], Moscow University Vestnik 26 巻、Filippov のアルゴリズム, 西岡 [12]

(最後の [12] は、日本数学会の季刊誌である数学に載ったノートである。)

後、応用数理学会論文誌に載っていた論文…探さないと。

A 線形代数とその周辺の本

A.1 古い本

次項で述べる斎藤&佐武よりも古い本というと、ほとんど持っていない。

古屋 [7] くらいか。銀林 [10] の序文に書いてあったが、戦前は、代数、解析幾何、微分積分の 3 本立て、戦後は、代数学と幾何学、解析学の 2 本立て、…というのが参考になった。佐武 [1] がとても新鮮な印象を持って迎えられたわけが分かる。遠山啓『行列論』, 藤原松三郎『行列および行列式』なども見てみたい。

A.2 Halmos "Finite Dimensional Vector Spaces" (1947)

Halmos [13]

A.3 佐武一郎『線型代数学』(1958)、齋藤正彦『線型代数入門』(1966)

私が大学に入学した 1978 年当時、線形代数の教科書は、佐武 [1] と齋藤 [4] が双璧だった。

私が受講した講義で教科書として指定されたのは [1] だった。今から見ると格調の高さが分かり、また例にしばしば渋いものがあり (自分の研究に役立ったようなものまである)、良い本だと思うが、当時の自分には猫に小判気味であった (著者が同じテーマで書いたやさしい教科書 [14] が別にあるという事実が、うーん、という感じ)。テンソル代数の章があるのも珍しく、特徴と言える。一方、この本の証明は、(院試の準備をしていた頃) 人に質問しなくても何とか自力で理解できたという記憶がある ([4] の方はとっつきやすいように見えて、自力では行間が埋められない部分があちこちにあった)。佐武先生ご自身は、自習書になるように書いたつもりらしく、もしかすると、そのあたりが効いているのかもしれない (あるいは、この辺は自分にとって教科書であったか、なかったかの違いかもしれない、今となっては良く分からない)。

[4] は、行列の基本変形を単なる計算術にとどめずに、理論の展開の道具 (証明手段) に格上げしているのが大きな特徴と言える。行列の数値計算をするグループとの交流があり、それをヒントにしたそうだが、先見の明というべきだろう。もう一歩進めて、Gauss の消去法や LDU 分解までやってあれば、数値計算の現場との隔たりがかなり小さくできた[3]と考えるが、(数学書に対して) それは欲張りだろうか？

[4] は、[1] と比べると、幾何学的な記述も多い。例えば平面と (3 次元) 空間の幾何ベクトルの話、2 次曲線・2 次曲面の分類 (簡単ではあるが図がついている)、3 次元の回転のオイラー角など。そういえば、私が学生だった頃は、授業の名称が「代数と幾何」だったかもしれない[4]。

時々、この本の、Jordan 標準形の存在の、単因子論による証明が分かりづらいとして、批判するような言葉を目にすることもあるが、齋藤先生が [4] を執筆した当時、一般固有空間への分解を使うにしても、単因子論を使うにしても、簡単な証明を載せている本はなかったようで、批判するのは筋違いであると思われる。むしろ、ずっと後に出した齋藤 [3] で、簡明な証明を与えたことを評価すべきである。[3] の序文には、

> 『入門』では単因子論によってジョルダン標準形を扱ったのを反省し，本書では単因子論を除いて幾何学的な証明をつけた．私の知るかぎりもっとも分かりやすく，かつ初等的な証明だと思う．

と書かれている。

[1], [4] が書かれた経緯については、佐武先生、齋藤先生自身の解説を [15], [8] で読むことができる。

残念ながら、[3] はあまりポピュラーでないようだ (検索しても [4] が先に出て来る)。野次馬としては、ジョルダン標準形の部分は大したページ数でもないので、[4] に収録する (つまり [4] を改訂する) のが良いと考える…と思っていたら、齋藤 [16] が出版された。

結局、佐武先生も齋藤先生も新しく書き起こしたわけだ。

[3] その後、そういう思想で本を書いた人が (筆者の知るかぎりで 2 人) いるが、失礼ながら、教科書としてはあまり成功していない。齋藤先生が書いたら、あるいは成功したのでは？、と筆者は夢想している。

[4] 微積分の授業が「解析学」である。『代数と幾何』というネーミングの方が適当であると主張する気はないが、「『線形代数』は、その名が示す通り、代数である」と間違って決めつけてしまう恐れがないのは、一つの利点であると思う。

A.4 入江昭二『線形数学 I,II』(1966, 1969)

入江 [17], [18]

A.5 銀林浩『線型代数学序説』(1971)

銀林 [10] は、「ベクトルから固有値問題へ」という副題がついている。商線型空間、双対空間、ジョルダン標準形などを、くどくどしくなく、駆け足でなく、しっかりと分かりやすく説明してある (実は最近になるまで中を読んだことがなかった本だけれど、良い本だと思います)。

A.6 杉浦光夫『Jordan 標準形と単因子論』(1976,1977)

私が大学に入学した頃、岩波講座基礎数学の第一期の配本が行われているところだった。杉浦 [2] は、そのシリーズに属している。通常大事ではあっても駆け足で説明される (あるいは、時間がない、難しいという理由でカットされる) Jordan 標準形について、ゆったりと解説されている良書である。実例も多いので、Jordan 標準形の計算法が知りたい、と焦っている学生にも役に立つのではないか？と思う。

最後のところで、関数論的取り扱いが入っているのも、貴重である。

A.7 梶原壌二『新修線形代数学』(1980)

梶原 [19] は、主に大学院の入試問題を集めて作った線形代数の演習書である。これだけで、線形代数で重要な定理とその証明を学ぶことが出来る。しばしば、定理が自分で証明できるようになろう、と言われ、それを実行するのは学生のうちはなかなか難しいものだが、線形代数に限ると、この本を使うことでそれほど困難なく達成できる。

梶原先生は、関数論について、同じ趣旨の [20] を書いている (一見地味に見えるが、素晴らしい本だと思う)。

数学系の大学院の入試問題では、専門を除くと、線形代数、関数論がかなり大きなウェイトを占める。だからこそ (つまり使える問題が質量ともに豊富)、こういう本を作ることが出来たのであろうが、一方でこういう本を使ってでも、しっかり勉強することが望ましい、ということなのだろう。

A.8 韓太舜・伊理正夫『ジョルダン標準形』(1982)

韓・伊理 [6] は、Jordan 標準形の構造安定性 (行列 A を、$A+\varepsilon F$ (F は任意の定数行列、$\varepsilon\in\mathbf{R}$) と摂動したときに、その Jordan 標準形がどう変化するかを考える) を論じているのが、この著者らしいところで、特色と言える。

参考にしたものに、Kato [21] をあげている。その本から行列関係の解説を抜き出した、加藤 [22] が出版されたのは記憶にとどめておくべきであろう。

単因子を基本変形で求めるアルゴリズムがしっかりと書かれている (これが珍しいのだから世の中変ですね)。

A.9 シャトラン『行列の固有値問題』(1988, 邦訳 1993)

筆者は、数値解析を研究することになって、好むと好まざるにかかわらず、線形計算 (連立 1 次方程式や固有値問題を解くこと) を学ぶ羽目になった。最初のうちは、自分が身につけている線形代数や関数解析の知識で、事が足りていたのだが、このシャトラン [23] を読んで、自分の知らない世界があったことに心底驚いた。

この本は、題名通り、行列の固有値問題に関する本で、特にそれをどうやって解くかについての数理を解説してある。正直言って、知らなかったことが満載であった。

数値計算をやる人が、必要にかられてこの本を読む場合を除き、この本を読むことを他人に勧める気はまったくないが、こういう世界もあるのだということを知るために、ぱらぱらめくって見ることは有意義だと思う。

脱線気味に　線形計算というと、有限次元の問題に限れば、代数的に問題を記述することができるが、それでは代数の世界にとどまる話かと言うと、決してそういうことはない。

一応四則演算だけで問題が解ける連立 1 次方程式にしても、実際に使われている解法は、代数的なものであるとは限らない。例えば、共役勾配法 (CG 法) は、連立 1 次方程式を最小問題に翻訳し (最小原理！)、直交系による展開を用いて解くという面を見れば、幾何学的とも言えるし、誤差評価手法はまったくの解析学である。

固有値問題については、線形代数の本では、固有値は特性多項式 (固有多項式) の根であり[5]、それは代数学の基本定理で存在が保証されているし、その気になればいくらでも高精度に計算できるはずだとして、完全な根が得られているという前提で議論が進められる。こういうやり方には確かに一理ある。例えば $\sqrt{2}$ の 10 進小数展開のうまい求め方を知らなくても、$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, $\sqrt{2} > 0$ とそれから簡単に導くことを使うだけで、大抵の議論は出来てしまう。

でも…それだけでは、大工さんが家を建てることすら出来ません ($\sqrt{2}$ の潜む曲尺を持っているって、知っているかなあ、今の学生達)。

さて、それで固有値を実際に数値計算することを考えると、特別な場合を除き、反復計算をすることになる (これは明らかなのだが、分かるだろうか…)。そして、特性多項式の根として固有値を求める方法は、実は大抵の場合に非常にマズイやり方である。ではどうすれば良いかについて、膨大な研究成果があり、この本はそれについての概観を与える目的で書かれたわけである。

A.10 一松信『代数学入門第二課』(1992)

一松 [9] (特に第二課)

A.11 伊理正夫『一般線形代数』(1993,1994), 『線形代数汎論』 (2009)

伊理 [24] は、岩波講座応用数学の「線形代数」を単行本化したものである。記述がアルゴリズミックであること、応用上必要になりそうなことを幅広く拾ってあることが特徴である。

伊理 [25] は、[24] の改訂版ととらえるべきだろうか？

[5] 余談であるが、最近大学入試の受験参考書をぱらぱらめくっていたら、固有値は固有多項式の根として定義される、として、そのことを絶対のように主張している記述に遭遇した。めくじらを立ててもしようがないが、とんでもないことである。大体、数学で何かを特徴づけるやり方には、同値なものがいくつもあるのが普通で、どれを選ぶかは説明する人の裁量に任されている。そもそも実際に、大学で使われている線形代数の本を何冊か取り上げて、固有値の定義を調べてみれば、むしろ固有多項式の根として定義してあることの方が少ないはずである。特に解析屋である自分にとっては、有限次元問題にしか適用できない、特性多項式を用いた定義は将来への発展性がないとして、真っ先に棄却する定義ですな。

A.12　森正武・杉原正顯・室田一雄『線形計算』(1994)

森・杉原・室田 [26]

A.13　Trefethen and Bau『Numerical Linear Algebra』(1997)

いわゆる数値線形代数は、線形計算の数値計算アルゴリズムを論じるものであるが、Trefethen and Bau[27] はすっきりとした記述で、理論的に理解したいという人に勧められる。

A.14　川久保勝夫『線形代数学』(1999)

川久保 [28] は、やさしく始まり、Jordan 標準形まできちんと到達している。線形代数の独習書としてこの本をあげる人が多い。

A.15　木村英紀『線形代数 数理科学の基礎』(2003)

木村 [29]

A.16　平岡・堀『プログラミングのための線形代数』(2004)

平岡・堀 [30]

A.17　ハーヴィル『統計のための行列代数』(2007)

ハーヴィル [31]

A.18　斎藤毅『線形代数の世界: 抽象数学の入り口』(2007)

斎藤毅 [32] は、ユニークな本である。「はじめに」から引用すると、様子が分かると思われる。

> この本では，線形代数の普通の入門書とは異なり，ベクトルや行列，行列式といった，基本的対象にはある程度慣れている読者を対象に，ジョルダン標準形などの進んだ話題や，双対空間，商空間，テンソル積などの抽象的な構成に重点をおいて解説する．より具体的には，数学を専攻して勉強しはじめた学生を，主な読者として想定している．

私自身の主な興味からは外れているが、確かにこういう本は有意義であろう。

A.19　池辺八州彦・池辺淑子・浅井信吉・宮崎佳典『現代線形代数』(2009)

池辺・池辺・浅井・宮崎 [33] は、いわゆる線形計算に詳しい人達がまとめた著作である。「分解定理を中心にして」という副題が内容を良く表している。

著者達は適当に内容を取捨選択して、教科書として使っているらしいが、なかなか真似できそうにない。

少し苦言を述べると、いくつかの「命題」が、数学屋である私にとっては、命題に見えない (何を主張しているのか、一応こういうつもりであろうと、確信に近い想像は出来るけれど)。

Version 2 を (強く) 期待します。

A.20　数値計算がらみの本

戸川 [34] は、BASIC 言語で簡単な線形計算のプログラミングをやさしく解説したものである。硬い線形代数と、ばりばりの実用数値計算の中庸であって、アリゴリズム入門として良いかもしれない。

戸川 [35] は、大規模な線形計算をするときに必要になる事項を分かりやすく解説した本である。初めて読んだ時に非常に鮮烈な印象を持った。実用書としては、“古く書かれた本” であるが、内容は現在でも重要なものが多い (この本に書かれていない重要なことも増えているが、この本に書かれていることの重要性は変わらず、解説はいまでも適切である)。数値解析を研究する人はぜひ目を通そう。

戸川 [36]

名取 [37] は、数値計算の専門家が書いた本だが、極端な実用性に走ることなく、線形計算の数学を平易に説いた本で (よい意味でとても教科書的な、教育的配慮のある親切な本である)、ユニークな印象がある。ちなみにこの本の産婆役は齋藤正彦先生だそうである。

一松先生は、数値計算について色々な本を書いているが、線形計算については、生き証人的な話を綴った一松 [38] が面白いだけでなく、重要であると信じる。

Trefethen and Bau[27] は理論的によく整理されていて、一読を勧めたい。

多くのアルゴリズムを説明してあるという意味で、Golub-Loan [39] は実用性が高い定番書であるが、筆者はあまり読んだことがない。

Higham [40] は知っておくべきである。精度保証付き数値計算を研究するには必須である。

B　流儀の研究

B.1　単位行列は E か I か

E 派の本は、古屋 [7], 齋藤 [4], [3], 佐武 [1],[14], 川久保 [28], 斎藤毅 [32], 入江 [17], [18], 長谷川 [41], 長岡 [42]

解析色が強い本は I が多いが、志賀 [43] のような例外もある (恒等作用素は I と書くが、単位行列は E)。

I 派の本は、杉浦 [2], シャトラン [23], 森・杉原・室田 [26], 銀林 [10], 池辺・池辺・浅井・宮崎 [33], ハーヴィル [31], シャトラン [23], 韓・伊理 [6], Strang [11], 平岡・堀 [30], 伊理 [24], 有木 [44], 一松 [9]

C　佐武先生特集

佐武 [1] からいくつか拾ってみる (言いたくてたまらないので)。

C.1 Schur 分解

佐武 [1] の IV§3 に、対称行列の対角化を説明した後に、さらっと重要なことがいくつか書かれている。

次の定理は、対称行列が対角化可能であるという定理の証明とほぼ同様の議論で証明できる。

定理 C.1 (Schur 分解) 任意の $A \in M(n; \mathbf{C})$ に対して、適当な $U \in S(n)$ が存在して、

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\text{上三角行列}).$$

(注: 佐武 [1] に "Schur 分解" という名前が書いてあるわけではない。)

証明　n に関する帰納法による。λ_1 を A の 1 つの固有値、u を λ_1 に対する固有ベクトルとして，$u_1 := \dfrac{1}{\|u\|} u$ とおき、それを延長して正規直交基底 $u_1, \cdots, u_n$ を作り，$Q := (u_1 \ \cdots \ u_n)$ とおくと、$\exists \mathbf{v} \in \mathbf{C}^{n-1}$, $\exists A' \in M(n-1; \mathbf{C})$ s.t.

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{v}^* \\ \mathbf{0} & A' \end{pmatrix}.$$

帰納法の仮定により $\exists Q' \in O(n-1)$ s.t.

$$Q'^* A' Q' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$U := Q \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q' \end{pmatrix}$ とおくと、$U \in O(n)$ で

$$\begin{aligned} U^* A U &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q' \end{pmatrix}^* Q^* A Q \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q'^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{v}^* \\ \mathbf{0} & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{v}^* \\ \mathbf{0} & Q'^* A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{v}^* Q' \\ \mathbf{0} & Q'^* A' Q' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \blacksquare \end{aligned}$$

この証明は素直であるが、個人的には少し驚いたところがある。実対称行列や Hermite 行列が、実直交行列あるいはユニタリ行列で対角化出来るという定理の証明では、A の対称性から $W^\perp$ が A 不変 ($W := \mathrm{Span}\langle u_1 \rangle$) であることが導かれた。それで次元が 1 小さい空間の固有値問題に帰着出来た。対称性を仮定しないと、「帰着出来る」わけではないが (実際 $\mathbf{v}^*$ が $\mathbf{v}^* Q'$ と変形を受ける)、上三角行列になるという弱い主張を証明するには差し支えないわけである。

系 C.2 $A \in M(n; \mathbf{R})$ の固有値がすべて実数ならば、実直交行列で上三角行列に変換できる。すなわち $\exists Q \in O(n)$ s.t. $Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

証明　上の定理の証明をなぞって証明できる。■

系 C.3 (正規行列がユニタリ行列で対角化可能であること) A が n 次正規行列 $(AA^* = A^*A)$ であれば $\exists U \in O(n), \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ s.t. $U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

証明　定理から、$\exists U \in O(n)$ s.t.

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

右辺の行列を $C = (c_{ij})$ とおくと、$A = UCU^*$ であるから、$A^*A = AA^*$ から、$UC^*CU^* = UCC^*U^*$ であるから、$C^*C = CC^*$.

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \quad \sum_{i \le k \le n} \overline{c_{ki}} c_{ki} = \sum_{1 \le k \le i} c_{ik} \overline{c_{ik}}.$$

$|c_{ii}|^2$ を消去して

$$\sum_{i<k\le n} |c_{ik}|^2 = \sum_{1 \le k < i} |c_{ki}|^2.$$

$i = 1$ とすると、$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} |c_{1k}|^2 = 0.$ ゆえに $c_{12} = c_{13} = \cdots = c_{1n} = 0.$

$i = 2$ とすると、$\displaystyle\sum_{k=3}^{n} |c_{2k}|^2 = |c_{12}|^2 = 0.$ ゆえに $c_{23} = c_{24} = \cdots = c_{2n} = 0.$

$i = 3$ とすると、$\displaystyle\sum_{k=4}^{n} |c_{3k}|^2 = |c_{13}|^2 + |c_{23}|^2 = 0.$ ゆえに $c_{34} = c_{35} = \cdots = c_{3n} = 0.$

以下同様にして、C の対角線より上にある成分はすべて 0 であることが分かる。

すなわち C は対角行列である。■

C.2　特異値分解

こんなことまで書いてあるのか…

定理 C.4 (特異値分解) $A \in M(m, n; \mathbf{C})$ に対して、$r := \mathrm{rank}(A^*A)$, A^*A の 0 でない固有値を $r_1^2, \cdots, r_r^2$ $(r_i > 0)$ とおくと、$\exists U_1 \in U(m), \exists U_2 \in U(n)$ s.t.

$$U_1 A U_2 = \begin{pmatrix} r_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & r_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

証明　$m = n$ の場合に証明する。

$B := A^*A$ は Hermite (実際 $B^* = (A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A = B$) かつ半正値 (実際 $(Bx, x) = (A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \ge 0$) であるから、$\exists U \in U(n)$ s.t.

$$U^*BU = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}, \quad \beta_i \ge 0.$$

B が半正値であるから $\beta_i \geq 0$ であるが、必要ならば U の列ベクトルの順番を入れ替えて

$$\beta_1 = \cdots = \beta_r > 0, \quad \beta_{r+1} = \cdots = \beta_n = 0 \quad (0 \leq r \leq n)$$

として良い。AU を $(\mathbf{t}_1 \ \cdots \ \mathbf{t}_n)$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^* \end{pmatrix} (\mathbf{t}_1 \ \cdots \ \mathbf{t}_n) = (AU)^*(AU) = U^*A^*AU = U^*BU = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} \beta_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \beta_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right).$$

ゆえに

$$(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j) = \beta_i \delta_{ij} \quad (1 \leq i \leq n, \, 1 \leq j \leq n).$$

これから $\dfrac{1}{r_1}\mathbf{t}_1, \cdots, \dfrac{1}{r_r}\mathbf{t}_r$ は正規直交系で、$\mathbf{t}_i = \mathbf{0}$ $(r+1 \leq i \leq n)$ であることが分かる。

$\mathbf{u}_1 := \dfrac{1}{r_1}\mathbf{t}_1, \cdots, \mathbf{u}_r := \dfrac{1}{r_r}\mathbf{t}_r$ とおき、それを延長して $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ が $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底であるようにする。$\mathbf{u}_i$ $(r+1 \leq i \leq n)$ は $\mathbf{t}_j$ $(1 \leq j \leq r)$ と直交していることに注意すると、

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r^* \\ \hline \mathbf{u}_{r+1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^* \end{array}\right) (\mathbf{t}_1 \ \cdots \ \mathbf{t}_n) = \left(\begin{array}{ccc|c} r_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & r_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right).$$

(右辺の右側の 2 つのブロックが 0 であることは $\mathbf{t}_i = \mathbf{0}$ $(r+1 \leq i \leq n)$ から分かる。左下のブロックが 0 であることは、$(\mathbf{u}_i, \mathbf{t}_j) = 0$ $(r+1 \leq i \leq n, \, 1 \leq j \leq r)$ から分かる。)

$$T_2 := (\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_n), \quad T_1 := U$$

とおくと、

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r^* \\ \hline \mathbf{u}_{r+1}^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^* \end{array}\right) (\mathbf{t}_1 \ \cdots \ \mathbf{t}_n) = T_2^*AU = T_2^*AT_1$$

であるから証明できた。 ■

$T_2^*AT_1 = \Sigma$ とおくと、$A = T_2 \Sigma T_1^*$. これを A の**特異値分解** (**singular value decomposition**, SVD) と呼ぶ。

C.3 まだまだあります

佐武 [1] には、この他にも、III 章 §3 の Schmidt の直交化法の後 (p. 101) に QR 分解が書いてあったり (「任意の正則行列が直交行列と (正則な) 三角行列の積として表されることを示している」)、IV 章 §4 の二次形式のところで (p. 162) Cholesky 分解が書いてあったり、実に

内容豊富である。ほとんど網羅的な感じがする (特異値, QR, Cholesky, Schur, …この種の分解の重要性を強く意識して、「収集した」のだと思う)。しかし各分解の名前がまったく書かれていない (不思議な感じがする、これでは記憶しづらい)。

一方 LU 分解は書いていない。連立 1 次方程式に関しては首尾一貫して行列式を用いて議論している (そもそも基本変形すらないのである)。不思議な感じがするが、線型代数の教科書で基本変形が大きな位置を占めるようになったのは「新しい」流れであるらしい。そこが齋藤 [4] の特徴、ということである。

D　テンソル代数

D.1　双対空間

V を体 K 上の有限次元線形空間とする。V 上の線形形式全体を V^* で表す。

$$V^* := \{f; f\colon V \to K \quad \text{線形}\}.$$

$f, g \in V^*$, $\alpha \in K$ に対して、$f+g$, αf を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

で定める。

$(e_1, \cdots, e_n)$ が V の基底であるとき、任意の i に対して $f_i\colon V \to K$ を

$$f_i\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j\right) = c_i$$

で定めると、$f_i \in V^*$ であり、$(f_1, \cdots, f_n)$ は V^* の基底となる。これを $(e_1, \cdots, e_n)$ の**双対基底**と呼ぶ。

定理 D.1 V を体 K 上の n 次元線形空間とするとき、V^* は K 上の n 次元線形空間である。

V を V^* の双対空間という。

$(V^*)^*$ を V^{**} と書く。

$a \in V$ に対して、

$$\phi_a\colon V^* \to K, \quad \phi_a(f) = f(a) \quad f \in V^*$$

で ϕ_a を定めると、$\phi_a \in (V^*)^*$.

定理 D.2 V を体 K 上の n 次元線形空間とするとき、$V \ni \alpha \mapsto \phi_a \in V^{**}$ は同型写像である。

D.2　テンソル積

D.2.1　線形空間のテンソル積の定義

二つの有限次元線形空間 V と W のテンソル積を定義する。

手っ取り早くやるならば、V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ と W の基底 $f_1, \ldots, f_m$ を取って、

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} e_i \otimes f_j$$

の全体 (ただし $e_i \otimes f_j$ は何か分らない 1 次独立なもの) を $V \otimes W$ とすれば良い。

このやり方は基底の取り方に依存しているようで何だかなあ、なので普通はもっと畏まった定義をする。

定理 D.3 V と W を体 K 上の有限次元線形空間とする。

(1) 次の条件 (T1), (T1'), (T2) を満たす線形空間 T と、双線型写像 $\Phi\colon V \times W \to T$ が存在する。

(T1) $x_1, \cdots, x_r \in V$ が 1 次独立ならば、$\forall y_1, \cdots, y_r \in W$ に対して、

$$\sum_{r=1}^{r} \Phi(x_i, y_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_i = 0 \quad (1 \le i \le r).$$

(T1') $y_1, \cdots, y_r \in W$ が 1 次独立ならば、$\forall x_1, \cdots, x_r \in V$ に対して、

$$\sum_{r=1}^{r} \Phi(x_i, y_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \quad (1 \le i \le r).$$

(T2) T は $\Phi(x,y)$ $(x \in V,\ w \in W)$ で生成される。

(2) 任意の線形空間 T' と、任意の双線型写像 $\Phi'\colon V \times W \to T'$ に対して、

$$\Phi'(x,y) = \rho(\Phi(x,y)) \quad (x \in V,\ y \in W)$$

を満たす線型写像 $\phi\colon T \to T'$ が一意的に存在する。

(6)
$$T = V \otimes W, \quad \Phi(x,y) = x \otimes y.$$

D.2.2　線型写像の空間とテンソル積

(7)
$$\mathscr{L}(V,W) \simeq W \otimes V^*.$$

この事実を逆手にとって、テンソル積の定義をする流儀が存在する。

D.3　対称テンソルと交代テンソル

D.3.1　テンソル空間

一つの有限次元線形空間 V から始めて双対空間を作ること、テンソル積を作ること、という 2 つの操作を有限回続けて得られる線形空間 T を**テンソル空間**と呼ぶ。

$$T = V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, \quad V_i = V \text{ または } V^*.$$

r を T の**階数**と呼び、T の要素を r **階のテンソル**という。

$V_i = V$ となる i が p 個、$V_i = V^*$ となる i が q 個であるとき、T を p 階反変、q 階共変テンソル空間と呼ぶ。

r **階反変テンソル空間**とは、すべての i について $V_i = V$ となる T のこと、つまり

$$\overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{r}$$

のことをいう。

r **階共変テンソル空間**とは、すべての i について $V_i = V^*$ となる T のこと、つまり

$$\overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{r}$$

のことをいう。

$\dim V = n, T$ が r 階のテンソル空間とするとき、

$$\dim T = n^r.$$

D.3.2　対称化作用素と交代化作用素

$r \in \mathbf{N}$ に対して、S_r をいわゆる r 次対称群、r 次の置換全体のなす群とする。

$$T^r = T^r(V) := \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{r}.$$

$\sigma \in S_n$ に対して、線型写像 $P_\sigma \colon T^r \to T^r$ を

$$P_\sigma(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}) = e_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(i_r)} \quad (i_1, \cdots, i_r \in \{1, \cdots, n\})$$

で定める。

このとき $\forall x_1, \cdots, x_r \in V$ に対して、

$$P_\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(r)}$$

が成り立つ。ゆえに P_σ は V の基底の取り方によらず定まる。

$$P_\sigma P_\tau = P_{\tau\sigma}$$

が成り立つ。ただし $\tau\sigma := \tau \circ \sigma$.

r 階反変テンソル t は、$\forall \sigma \in S_r$ に対して、$P_\sigma(t) = t$ を満たすとき、**対称テンソル**であるという。

r 階反変テンソル t は、$\forall \sigma \in S_r$ に対して、$P_\sigma(t) = \operatorname{sign} \sigma \cdot t$ を満たすとき、**歪対称テンソル**または**交代テンソル**であるという。

$$\mathscr{S} := \sum_{\sigma \in S_r} P_\sigma,$$
$$\mathscr{A} := \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sign} \sigma \cdot P_\sigma.$$

参考文献

[1] 佐武一郎：線型代数学, 裳華房 (1958, 1974), もともと『行列と行列式』という書名であったのを、テンソル代数の章を加筆した機会に改題した。

[2] 杉浦光夫, 横沼健雄：Jordan 標準形・テンソル代数, 岩波書店 (1990), この前半は、杉浦光夫, Jordan 標準形と単因子論 I, II, 岩波講座 基礎数学 (1976,1977) が元になっている。

[3] 齋藤正彦：線型代数演習, 東京大学出版会 (1985).

[4] 齋藤正彦(さいとうまさひこ)：線型代数入門, 東京大学出版会 (1966).

[5] 堀田良之：代数入門 — 群と加群, 裳華房 (1987).

[6] 韓太舜(かんたいしゅん), 伊理正夫：ジョルダン標準形, 東京大学出版会 (1982).

[7] 古屋茂：行列と行列式, 培風館 (1957).

[8] 齋藤正彦：線型代数教育の変遷, 数学セミナー, pp. 12–13 (2000 年 6 月号), これ以外に、数のコスモロジー, ちくま学芸文庫, 筑摩書房 (2007) に収録されている「自著を語る — 『線型代数入門』」 (これは東京大学出版会の UP に 2000 年 11 月に掲載されたもの) も参照せよ。

[9] 一松信：代数学入門第一〜三課, 近代科学社 (1992, 1992, 1994).

[10] 銀林浩(こう)：線型代数学序説, 現代数学社 (1971, 2002).

[11] Strang, G. S.: *Linear algebra and its applications*, Academic Press (1976).

[12] 西岡久美子：Jordan 標準形のわかり易い求め方, 数学, 第 **55** 巻 第 4 号 2003 年 10 月秋季号, pp. 424–429 (2003), https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku1947/55/4/55_4_424/_article/-char/ja/ から入手可能.

[13] Halmos, P. R.: *Finite Dimensional Vector Spaces*, Princeton University Press (1947).

[14] 佐武一郎：線形代数, 共立出版 (1997).

[15] 佐武一郎：『行列と行列式』を書いた頃, 数学セミナー 2000 年 6 月号, pp. 10–11 (2000).

[16] 齋藤正彦：線型代数学, 東京図書 (2014/4).

[17] 入江昭二：線形数学 I, 共立出版 (1966).

[18] 入江昭二：線形数学 II, 共立出版 (1969).

[19] 梶原壌二：新修線形代数学, 現代数学社 (1980).

[20] 梶原壌二：関数論入門 — 複素変数の微分積分学 —, 森北出版 (1980).

[21] Kato, T.: *Perturbation Theory for Linear Oprators*, Springer Verlag (1966).

[22] 加藤敏夫：行列の摂動, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1999).

[23] Chatelin, F.: *Valeurs propres de matrices*, Masson, Paris (1988), (邦訳) F. シャトラン著, 伊理 正夫, 伊理由美 訳, 行列の固有値問題, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1993).

[24] 伊理正夫：一般線形代数, 岩波書店 (2003), 伊理正夫, 線形代数 I, II, 岩波講座応用数学, 岩波書店 (1993, 1994) の単行本化.

[25] 伊理正夫：線形代数汎論, 朝倉書店 (2009), 「一般線形代数」のリニューアル.

[26] 森正武, 杉原正顯, 室田一雄：線形計算, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1994).

[27] Trefethen, L. N. and Bau III, D.: *Numerical Linear Algebra*, SIAM (1997).

[28] 川久保勝夫：線形代数学, 日本評論社 (1999).

[29] 木村英紀：線形代数　数理科学の基礎, 東京大学出版会 (2003).

[30] 平岡和幸, 堀玄：プログラミングのための線形代数, オーム社 (2004).

[31] David A. ハーヴィル：統計のための行列代数 上, 下, 丸善出版 (2012/4/5 (原著は 1997)), 伊理正夫 監訳, 井上玄定 訳. もとはシュプリンガー・ジャパンから 1997 年に出版された.

[32] 斎藤 毅 ：線形代数の世界: 抽象数学の入り口, 東京大学出版会 (2007).

[33] 池辺八州彦, 池辺淑子, 浅井信吉, 宮崎佳典：現代線形代数 — 分解定理を中心として —, 共立出版 (2009).

[34] 戸川隼人：BASIC による線形代数, 共立出版 (1985).

[35] 戸川隼人：マトリクスの数値計算, オーム社 (1971).

[36] 戸川隼人：共役勾配法, 教育出版 (1977).

[37] 名取亮：線形計算, 朝倉書店 (1993).

[38] 一松信：数学とコンピュータ, 共立出版 (1995).

[39] Golub, G. H. and Loan, van C. F.: *Matrix Computations, 4th ed.*, Johns Hopkins University Press (2012/12/27), 初版はいつ出版されたのだろう。第 2 版は 1989 だった。

[40] Higham, N. J.: *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, SIAM (1996, 2002).

[41] 長谷川浩司：線型代数, 日本評論社 (2002).

[42] 長岡亮介：＜新版＞ 線型代数学 — 入門と展望 —, ブレーン出版 (1992).

[43] 志賀浩二：固有値問題 30 講, 朝倉書店 (1991).

[44] 有木進：工学のための線形代数, 日本評論社 (2000).