数理リテラシー 宿題 No. 8 (2024年6月26日出題, 7月1日13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は何ページでも可. 1つのPDFにして提出)

(1) 以下の各関数 (高校数学ルールで $f(x)$ の式だけ書いてある) について、定義域 (X と書くことにする) と値域 $f(X)$ を答えよ。ただし、実数の範囲だけで考える (虚数は考えない) ことにする。

(a) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ (b) $f(x)=\log\left(\sqrt{x}-1\right)$ (c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

(2) 次の各写像について、その値域を求めよ。

(a) X, Y は集合で、$\emptyset\neq X\subset Y$ を満たすとき、$i\colon X\to Y$, $i(x)=x$ $(x\in X)$ で定めた i

(b) $X=[1,5]$, $Y=[2,4]$ (区間の記号 $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$ を用いた) とするとき、$f\colon X\times Y\to Y$ を $f(x,y)=y$ $((x,y)\in X\times Y)$ で定めた f

注意 本来は $f\left((x,y)\right)$ と書くべきかもしれないところを $f(x,y)$ と略記している。以下の (c) も同様。

(c) $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=(y,x)$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ で定めた g

(d) X を空でない集合、$A\subset X$ とするとき、$\chi_A\colon X\to\mathbb{R}$, $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\in X\setminus A)\end{cases}$ で定めた χ_A (注: 解答には場合分けが必要になります。慎重に考えて下さい。)

問8解説

(1) (a) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ とする。この式が意味を持つ $\Leftrightarrow$ 分母が 0 にならない $\Leftrightarrow$ $x\neq 0$. ゆえに $X=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}$ あるいは $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

解答の途中ですが解説します

このような微積に出て来るような関数の値域 $f(X)$ を求めるには、f の増減を調べると良い。

- グラフを描くのがおすすめ。
- もちろん微積分を使うという手もある。この関数は簡単で、相加平均と相乗平均の関係からすぐに分かる。
- 奇関数であるので、$x>0$ の範囲を調べれば、$x<0$ の範囲の増減もすぐ分かる。
- (注意) 厳密に議論するには、極限や中間値の定理を使うことになりそう。その辺は高校数学的にやることにする (大学でまだきちんと習っていない可能性が高いので)。

まず f は奇関数である (すなわち $(\forall x\in X)\ f(-x)=-f(x)$)。

$x>0$ のとき

$$f(x)=2\cdot\frac{x+1/x}{2}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2.$$

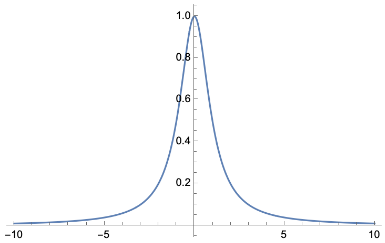
等号成立 $\Leftrightarrow$ $x=\dfrac{1}{x}$ $\Leftrightarrow$ $x=1$. また $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. これから f は $x>0$ の範囲で 2 以上のすべての値を取る[1]。ゆえに

$$f(X)=\{y\in\mathbb{R}\mid y\le -2\vee y\ge 2\}.$$

[1] $y>2$ とすると、$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\infty$ であるから、ある $x_1\in(0,1)$ が存在して、$f(x_1)>y$. 一方 $f(1)=2<y$. 中間値の定理を使って、$f(x)=y$ を満たす $x\in(x_1,1)$ が存在することが分かる。— こういう論法は慣れていないだろうから、要求しません。

(b) 式が意味を持つ ⇔ log の「引数」(真数?) $\sqrt{x}-1>0$ かつ $\sqrt{}$ の中身 $x \geq 0 \Leftrightarrow x>1$. ゆえに $X=\{x \in \mathbb{R} \mid x>1\}$. このとき関数 $y=\sqrt{x}-1$ の値域は $\{y \in \mathbb{R} \mid y>0\}$. $f(x)=\log y$ であり、log の値域は $\mathbb{R}$ であるから、$f(X)=\mathbb{R}$.

(c) 任意の実数 x に対して x^2+1 という式は定義され、値は正なので、$\dfrac{1}{x^2+1}$ は意味を持つ。ゆえに $X=\mathbb{R}$. $f(x)$ は偶関数で、$f(0)=1$, また $f(x)>0$. $x>0$ では f は単調減少で $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. ゆえに $f(X)=\{y \in \mathbb{R} \mid 0<y \leq 1\}$.



(2) $f\colon X \to Y$ のとき $f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}$ であるが、問題ごとに X, Y, f が何か読み取ることが大事。その後は $f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}$ に代入する。

(a) $i\colon X \to Y$, $i(x)=x$ のとき。

$$i(X)=\{i(x) \mid x \in X\}=\{x \mid x \in X\}=X.$$

(b) $f\colon X \times Y \to Y$, $f((x,y))=f(x,y)=y$ のとき。

$$f(X \times Y)=\{f((x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\}=\{y \mid x \in X \wedge y \in Y\}=Y=[2,4].$$

(c) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y)=(y,x)$ のとき。

$$\begin{aligned} g(\mathbb{R}^2) &= \left\{g(x,y) \,\middle|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}=\{(y,x) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}=\{(y,x) \mid y \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x',y') \mid x' \in \mathbb{R} \wedge y' \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

別解: $f(x,y)=(ax+by, cx+dy)$ で $a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=0$ の場合と気づけば、$ad-bc=0\cdot 0-1\cdot 1=-1 \neq 0$ であるから、$g(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$.

(d) $A \subset X$, $X \neq \emptyset$, $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$, $\chi_A(x)=\begin{cases} 1 & (x \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in X \setminus A \text{ のとき}) \end{cases}$ とするとき

$$\chi_A(X)=\begin{cases} \{0\} & (A=\emptyset \text{ のとき}) \\ \{1\} & (A=X \text{ のとき}) \\ \{0,1\} & (A \neq \emptyset \text{ かつ } A \neq X \text{ のとき}). \end{cases}$$

(χ_A の値は 0 または 1 なので、$\chi_A(X) \subset \{0,1\}$ はすぐ分かるが、$A=\emptyset$, $A=X$ という極端な場合が思い浮かばず $\chi_A(X)=\{0,1\}$ が成り立つと勘違いする人が多い。テストなら少し減点するところ。) ■