数理リテラシー 宿題 No. 6　(2024 年 6 月 5 日出題, 6 月 10 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名______________　　(解答は何ページでも可．1 つの PDF にして提出)
(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

問 6

(1) (a) A を集合とするとき、2^A の定義を書け。また、何と呼ばれるか答えよ。　(b) $A = \{1, 2, 3\}$ とするとき、2^A を求めよ (要素をすべて書き並べる方法で表せ)。　(c) $A = \{p, q\}$ のとき、$B = 2^A$, $C = 2^B$ を求めよ。(ヒント: $B = \{a, b, c, d\}$ のとき 2^B は何か。)

(2) 次の各文の内容を式で表せ。ただし A, B, X は集合とする。

- (a) A と B の共通部分は、1 以上 3 以下の実数全体の集合である。
- (b) A が B の部分集合ならば、B の補集合は A の補集合に含まれる。
- (c) x が A と B の合併集合の要素であるためには、x が A の要素であるか、または x が B の要素であることが必要十分である。
- (d) A と B が等しいためには、A が B の部分集合であり、かつ B が A の部分集合であることが必要十分である。

(3) 集合 A, B, C, D が $A \subset B$, $C \subset D$ を満たすとき、$A \setminus D \subset B \setminus C$ が成り立つことを証明せよ。

問 6 解説　カンマについて最後の注意 (今年度は意外と治っていない人が多い):

(i) カンマを書くべきところ (順序対を表すとき、集合の外延的表記をするときなど) は省略しない。

(ii) 点 (ドット？ポイント？) に見えると誤解が生じやすいので (“1.2” は 1 と 2 でなく「いってんに $=\frac{6}{5}$」という 1 つの数)、点に見えないようにする。

(iii) 読点「、」は誤解されにくいとは思うが (その意味では罪が軽い方) ⋯カンマ **,** は最後は左下向いているはず。

(1) (a) $2^A = \{B \mid B$ は A の部分集合$\}$. あるいは全部式にして $2^A = \{B \mid B \subset A\}$. 2^A は A のベキ集合とよばれる。

言葉で説明するのは意外に難しい。A の部分集合はすべて含んでいて、それ以外のものは 1 つも含んでない、ということが誤解のないように伝わるかどうか。「A の部分集合全体の集合」、「A のすべての部分集合からなる集合」は OK か。式で書く方がまぎれがない。

一方、「B を集合とする。$2^A = \{B \mid B \subset A\}$」はちょっとおかしい。「$B$ を集合とする。」と書いた瞬間に B は固定されたととらえられるのが普通である。書くならば $\{B \mid \quad\}$ の中に書くべき。$2^A = \{B \mid B$ は A の部分集合$\}$ は明快でよい。

(b) $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\}\}$.

(c)

$$B = 2^A = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p,q\}\}.$$

$\emptyset$, $\{p\}$, $\{q\}$, $\{p,q\}$ をそれぞれ a, b, c, d と書くと、$B = \{a,b,c,d\}$ であるから

$$\begin{aligned}
2^B = \{&\emptyset,\\
&\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\\
&\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\\
&\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\\
&\{a,b,c,d\}\}\\
= \{&\emptyset,\\
&\{\emptyset\},\{\{p\}\},\{\{q\}\},\{\{p,q\}\},\\
&\{\emptyset,\{p\}\},\{\emptyset,\{q\}\},\{\emptyset,\{p,q\}\},\{\{p\},\{q\}\},\{\{p\},\{p,q\}\},\{\{q\},\{p,q\}\},\\
&\{\emptyset,\{p\},\{q\}\},\{\emptyset,\{p\},\{p,q\}\},\{\emptyset,\{q\},\{p,q\}\},\{\{p\},\{q\},\{p,q\}\},\\
&\{\emptyset,\{p\},\{q\},\{p,q\}\}\}.
\end{aligned}$$

注意: $\emptyset$ と $\{\emptyset\}$ は異なる。p と $\{p\}$ も異なるので、$\{p\}$ と $\{\{p\}\}$ も異なる。空集合クイズ (次のうち正しいものはどれですか — 実は全部ただしい)。

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}, \quad \emptyset \in \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}, \quad \emptyset \subset \{\emptyset\}, \quad \emptyset \subset \emptyset.$$

根拠が書けますか？

($\emptyset$ は要素が存在しない。$\{\emptyset\}$ は $\emptyset$ という要素が存在する。

一般に $a \in \{a\}$ であるから、$a = \emptyset$ に適用して $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

$\{\emptyset\}$ の要素は $\emptyset$, $\{\{\emptyset\}\}$ の要素は $\{\emptyset\}$. これらは異なるので $\{\emptyset\} \neq \{\{\emptyset\}\}$.

任意の集合 A について $\emptyset \subset A$ が成り立つので、$A = \{\emptyset\}$ に適用すると $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.

任意の集合 A について $\emptyset \subset A$ が成り立つので、$A = \emptyset$ に適用すると、$\emptyset \subset \emptyset$.)

(2) (a) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

(b) $A \subset B \Rightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}$

(c) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

(d) $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

- $x \in A \cup B$ を $x \in (A \cup B)$ と書く人が多かった。こちらが演算子の結合の優先順位の説明をサボったせいかな。$x \in A \cup B$ で十分です。もちろんカッコつけても間違いではない。
- $\in$ と $\subset$ を混同しないように。$x \in A$ は x が要素として A に含まれる (x は A の要素 — 授業では教科書の意見を尊重して「属する」と読んでいる)、$A \subset B$ は A が集合として B に含まれる (A が B の部分集合である)。
  $1 \in \{1, 2, 3\}$, $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{\quad\}$ は集合や列を表すとき以外はなるべく使わないようにすることを勧める。
- (c), (d) は「○○であるためには●●であることが必要十分」という文で、○○ $\Leftrightarrow$ ●●と表す。

  $\Leftrightarrow$ の左右にあるのは条件または命題である。時々集合を書いてしまっている人がいるけれど、それは (内容を読む前に) おかしい。
- $\vee$ と $\cup$, $\wedge$ と $\cap$ を混同している人が結構多い。

(3) $A \subset B$, $C \subset D$ を仮定する。

x を $A \setminus D$ の任意の要素とすると、$x \in A$ かつ $x \notin D$.

仮定 $A \subset B$ より $x \in B$.

実は $x \notin C$ である。実際、もしも $x \in C$ とすると、仮定 $C \subset D$ から $x \in D$ となるが、これは $x \notin D$ に矛盾する。ゆえに $x \notin C$.

以上より $x \in B$ かつ $x \notin C$. すなわち $x \in B \setminus C$.

ゆえに $A \setminus D \subset B \setminus C$. ■