数理リテラシー 宿題 No. 2 (2024 年 4 月 24 日出題, 5 月 6 日 13:30 までに Oh-o! Meiji で提出)

__年__ 組____番　氏名______________　　(解答は裏面も使用可. 表裏を 1 つの PDF にして提出。)
(授業の進行状況によっては、問題の一部を次回に回す。授業中の指示に従うこと。)

(1) 一般に (つまり任意の命題 P, Q に対して) $P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$ が成り立つことを認めて、同値変形で $(\neg p) \Rightarrow (\neg q) \equiv q \Rightarrow p$ (裏は逆と同値) を証明せよ。

(2) 次の命題を記号 (論理式) で表せ。

(a) すべての整数 x に対して $x^2 \geq 0$ が成り立つ。

(b) 任意の正の数 y に対して $y + \dfrac{1}{y} \geq 2$ が成り立つ。

(c) ある有理数 z が存在して、$0 < z < 1$ が成り立つ。

(d) $w^3 = 2$ を満たすような実数 w が存在する。

(3) 次の式で書かれた命題を日本語の文で表せ (不等式、等式は式のままで構わない)。

(a) $(\forall x \in \mathbb{Q})\ x^2 \neq 2.$

(b) $(\exists N \in \mathbb{N})\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq 1000.$

2 解答

(1)

$$\begin{aligned}(\neg p) \Rightarrow (\neg q) &\equiv (\neg(\neg p)) \vee (\neg q)\\ &\equiv p \vee (\neg q)\\ &\equiv (\neg q) \vee p\\ &\equiv q \Rightarrow p\end{aligned}$$

であるから $(\neg p) \Rightarrow (\neg q) \equiv q \Rightarrow p$.

(2) (a) $(\forall x \in \mathbb{Z})\ x^2 \geq 0$.

(b) $(\forall y > 0)\ y + \dfrac{1}{y} \geq 2$.

(c) $(\exists z \in \mathbb{Q})\ 0 < z < 1$.

(d) $(\exists w \in \mathbb{R})\ w^3 = 2$.

(3) (a) 任意の有理数 x に対して、$x^2 \neq 2$.

(b) ある自然数 N が存在して $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq 1000$ (が成り立つ). ■