2024 年度 数理リテラシー 中間試験問題

2024 年 6 月 19 日 4 限施行 (15:25〜17:00 の予定), 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.　(1)〜(5) の各文を 1 つの式で表せ。ただし、p と q は命題、π は円周率、A と B は集合, $P(x)$ は変数 x についての述語とする。
(1) -1 は自然数ではないが整数である。また $\sqrt{5}$ は有理数ではないが実数である。　(2) 「p ならば q」の否定は、「p であるのに、q ではない」である。　(3) $z^2=-\pi$ を満たす虚数 z が存在する。
(4) A と B の差集合は、A の要素のうち B には属さないもの全体の集合に等しい。　(5) 「$P(x)$ を満たす x が存在する」の否定は、「すべての x に対して、$P(x)$ は成り立たない」である。

2.　(1) 任意の命題 p, q に対して $\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p)\vee(\neg q)$ が成り立つことを、真理値表を用いて示せ。　(2) すべての自然数 n に対して命題 p_n が与えられているとする。このとき、すべての自然数 n に対して

$$(\heartsuit_n)\qquad \neg(p_1\wedge\cdots\wedge p_n)\equiv(\neg p_1)\vee(\neg p_2)\vee\cdots\vee(\neg p_n)$$

が成り立つことを示せ (ヒント: 数学的帰納法)。

p_2 を書いたのはまずかった ($n=1$ のときナンセンスな式になる)。

$$(\heartsuit_n)\qquad \neg(p_1\wedge\cdots\wedge p_n)\equiv(\neg p_1)\vee\cdots\vee(\neg p_n)$$

とすべきだった (反省)。

3.　以下の命題 (1),(2) の真偽を述べ、真ならば証明し、偽ならばその否定命題を論理式で書いて証明せよ。

(1) ある実数 x が存在して、すべての実数 y に対して、$x\le y$ が成り立つ。

(2) ある実数 L が存在して、すべての実数 x に対して、$x^2-2x\ge L$ が成り立つ。

4.　(1) 部分集合の定義を書け。　(2) 2 つの集合の和集合、積集合、差集合、直積集合の定義を述べよ。　(3) A を集合とするとき、$A^{\complement}$, 2^A の定義と呼び方を述べよ。　(4) $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\le 1\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}\mid x\le 3\}$ とするとき、$A\times B$ と 2^A を要素を書き並べる方法 (外延的記法) で表せ。

5.　A, B が全体集合 X の部分集合とするとき、以下の命題を示せ。
(1) A が B の部分集合ならば、$2^A\subset 2^B$ が成り立つ。　(2) $(A\cup B)^{\complement}=\left(A^{\complement}\right)\cap\left(B^{\complement}\right)$.
(3) $A\cap B=\emptyset\Leftrightarrow A\subset B^{\complement}$

6.

(1) $A=\{0\}$ のとき、$B=2^A$, $C=2^B$ を求めよ。

(2) 5 つの命題 $\emptyset=\{\emptyset\}$, $\emptyset\in\{\emptyset\}$, $\{\emptyset\}\in\{\emptyset\}$, $\{\emptyset\}\subset\{\emptyset\}$, $\emptyset\subset\{\emptyset\}$ の真偽を述べ、その根拠 (簡単で構わない) も書け。

(3) p と q を実数、$A=\{p,q\}$, $B=\{q\}$ とするとき、$A\setminus B=\{p\}$ が成り立つかどうか答えよ。

(4) 実数 x が、条件 $(\forall\varepsilon>0)\ |x|<\varepsilon$ を満たすならば、$x=0$ であることを示せ。

注意事項

この面を表にして配ります。試験開始まで裏返さないこと。

- 学生証 (机に写真の載っている面を表にしておく)、筆記用具、時計、飲み物以外はカバンにしまって下さい。(他に机の上に置いておきたいものがあれば相談して下さい。)
- 15:25 に試験を始め、17:00 に終了する予定です。もし始まりが遅れたら、その分終わりの時間もずらします。
- 「解答用紙に自分の学年・組・番号・氏名を書いて下さい」と言われてから、筆記用具を取って解答用紙に記入し、記入し終わったら筆記用具を置いて下さい。
- 「はじめて下さい」の声を聞いてから、この紙を裏返して解答を始めて下さい。
- 問題は好きな順に解答して構いません。ただし一つの大問の解答は一ヶ所にまとめること。
- 解答用紙は裏面も使用して構いません。なるべく解答用紙 1 枚で済ませること。足りなくなった場合は試験監督 (桂田) に申し出ること。
- 2 枚目の解答用紙を受け取ったら、すぐに自分の学年・組・番号・氏名を記入すること。解答用紙を回収するときは必ず 2 枚 (2 枚目の上に 1 枚目を重ねて) 提出すること。
- 遅刻は開始してから 30 分まで認めます。開始してから 40 分後から試験終了 10 分前までは途中退室を認めます (手をあげて試験監督に知らせ、解答用紙を渡し、静かに荷物をまとめて退室して下さい)。

5 番は 30 点。合計 130 点。

1 解答例と解説

(1) $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \wedge \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ あるいは $-1 \notin \mathbb{N} \wedge -1 \in \mathbb{Z} \wedge \sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \wedge \sqrt{5} \in \mathbb{R}$

(2) $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

(3) $(\exists z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) z^2 = -\pi$ とか $\exists z (z \in \mathbb{C} \wedge z \notin \mathbb{R} \wedge z^2 = -\pi)$ とか。

(4) $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ あるいは $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

(5) $\neg (\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$

- (1) のような問題への解答の仕方: $\mathbb{N}$ (自然数全体の集合), $\mathbb{Z}$ (整数全体の集合), $\mathbb{Q}$ (有理数全体の集合), $\mathbb{R}$ (実数全体の集合), $\mathbb{C}$ (複素数全体の集合) に含まれるか ($\in$)、含まれないか ($\notin$) を書いて、「かつ」($\wedge$) でつなげば良い。差集合の記号を利用すると少し簡単にできる。無理数全体の集合は $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 虚数全体の集合は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ と書ける。

- (1) の「また」を「または」と誤解した人が結構いて驚いた。「また」は、ほかに、べつに、とかいう意味で「または」ではない。事実を追加して述べている。結局 2 つの事実を主張しているので、記号にする場合は $\wedge$ を使う。

- (2) 命題に関する式は色々ありえるが、公式を出題することが多い。(もちろん間違った内容の式を書かせるという問題もありえなくはないけれど、変な式は書かせたくない気がするので、正しい式 (あるいは正しくなりえる式) しか出題したことはない。$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ は重要なので頻出。

- (2) 「p であるのに q でない」はいわゆる逆接というものだけど、講義で説明したように、順接でも逆接でも、とにかく両方の事実を主張しているならば、$\wedge$ でつなぐ。

  今回はここに $\Rightarrow$ が紛れ込んでいる謎答案が少しあった。

  $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ を間違えた人が多い。確かに簡単でないと思うが、重要な定理であるのは間違いない (「ならば」を正確に理解しないで数学はできない)。そのため、この式は色々な機会に何度も見せている。大事なのだと受け取ってマスターしてほしい。

- (3) 量称記号を用いる論理式は、ずっと使っているので、出来て欲しい。ずっと使っているので、ここだけ見れば十分、という資料が示しにくい。出来るかどうかは実力かな。

- 今回は出題しなかったけれど、必要十分条件とかよく出題する。条件 $\Leftrightarrow$ 条件という式になる。一方で集合の等式や包含関係、つまり 集合 $=$ 集合とか、集合 $\subset$ 集合という式を出題する。君達の答案を見ると、集合と条件 (命題) を混同してしているようなミス (文法的間違いとでもいうべきか) があちこちでおこっている。出題している方としては、ちょっと意外なのだけど、勉強したては混同しやすいのかな。

  おおざっぱにいって、集合とはものの集まりで、条件 (命題) とまったく違うもので、両者を $=$ や $\Leftrightarrow$ の左右に並べられるはずがない。

  フィードバックの際は指摘してあるので、そうされた人は、しばらく自分が書いたものがそうなっていないか自己チェックして下さい。

- (1) で、$\neg(\sqrt{5} \in \mathbb{Q})$ や $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ や $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}^{\complement}$ (この 2 つは正しい) と勘違いしたのか、$\sqrt{5} \in \neg\mathbb{Q}$ (意味不明のありえない式) と書いたりする間違いが時々あった。$\neg$ (否定) は命題や条件について使うものである。補集合 $^{\complement}$ と誤解しないように。

  念のため記号をまとめておくと

  1. 命題論理の記号: $p \equiv q$, $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftarrow q$, $p \Leftrightarrow q$
     これらは述語に対しても用いる。
  2. 述語論理の記号: $\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$
     この講義では、「$(\forall x\colon P(x))\ Q(x)$」,「$(\exists x\colon P(x))\ Q(x)$」という書き方もしている。それぞれ $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ ということ。$(\forall x\colon x \in A)$ を $(\forall x \in A)$ と書く、というのもあった。
  3. 集合の記号:
     (a) $a \in A$, $A \subset B$, $A \supset B$, $A = B$ (これらは命題または条件)
     (b) $\{a_1, \cdots, a_n\}$, $\emptyset$, $\{x \mid P(x)\}$, $\{x \in A \mid P(x)\}$, $\{f(x) \mid P(x)\}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A^{\complement}$, $A \setminus B$, 2^A, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (これらはいずれも集合)
     $\{\quad\}$ は集合を定義するときにしか使わない。ときどき $\{\quad\}$ と $(\quad)$ の混同をしている人がいる。

- (3) を $(\exists z \in \mathbb{C})\ z^2 = -\pi$ と書いた人が結構いて驚かされた。複素数と虚数を混同しないように (虚数とは実数でない複素数のことで、虚数全体の集合は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ である)。世の中に「複素数とは実数でない数のこと」と誤解している人が多いのは承知しているけれど、「虚数とは実数でない数 ($a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ と表せる)、実数と虚数を合わせて複素数という」というのは高校の教科書にも明記されているし、数学を使う人は間違えてはいけない。

- (4) は問 4 にも出て来るわけだけど、意外とまちがえていた。$A \setminus B = A \cap (B^{\complement})$ と書いた人がいたけれど、どういう採点をしたものか$\cdots$ (もしそれだったら、A と B の補集合との共通部分というだろうという気がする)

- (5) で不要な : が入っている答案があったが、特に減点はしていない。

2 解答例と解説

(1) 真理値表は

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

である。4 列目と 7 列目の真偽が一致するので $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.

(2) (i) $n = 1$ のとき、$(\heartsuit_n)$ の左辺と右辺はともに $\neg p_1$ であるから、$(\heartsuit_n)$ は成り立つ。

(ii) $n = k$ のとき $(\heartsuit_n)$ が成り立つ (つまり $(\heartsuit_k)$ が成り立つ) と仮定すると、

$$\begin{aligned}\neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_k \wedge p_{k+1}) &\equiv \neg((p_1 \wedge \cdots \wedge p_k) \wedge p_{k+1}) \equiv (\neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_k)) \vee (\neg p_{k+1}) \\ &\equiv ((\neg p_1) \vee (\neg p_2) \vee \cdots \vee (\neg p_k)) \vee (\neg p_{k+1}) \\ &\equiv (\neg p_1) \vee (\neg p_2) \vee \cdots \vee (\neg p_k) \vee (\neg p_{k+1}).\end{aligned}$$

ゆえに $n=k+1$ のとき $(\heartsuit_n)$ が成り立つ。

(i), (ii) から、すべての自然数 n に対して $(\heartsuit_n)$ が成り立つ。 ■

- (1) 真理値表は書ける人が多かった。ここにマルがついていない人は気をつけて。
- 数学的帰納法は、高校の段階で身につけておくべきものと考えている (色々な場合があり、この授業で時間を取って演習する余裕はない)。

  「$n=k$ のとき $\underline{(\heartsuit_k)\text{ が成り立つ}}$と仮定すると」のように書いた人が結構多かったのだけど、下線部に n がないのでおかしい (n と関係ないじゃない)。「$n=k$ のとき $(\heartsuit_n)$ が成り立つ、すなわち $\neg(p_1 \wedge \cdots \wedge p_k) \equiv (\neg p_1) \vee \cdots \vee (\neg p_k)$ が成り立つと仮定すると」と書いた人はいて、「そういうふうに書いたりするものだよな」と思ったけれど、そういう人は少数派だった。

- $p_1 \wedge \cdots \wedge p_k \wedge p_{k+1} \equiv (p_1 \wedge \cdots \wedge p_k) \wedge p_{k+1}$ とか、$((\neg p_1) \vee \cdots \vee (\neg p_k)) \vee (\neg p_{k+1}) \equiv (\neg p_1) \vee \cdots \vee (\neg p_k) \vee (\neg p_{k+1})$ を素通りする人は多かった。まあ当たり前に近いので、すっ飛ばしても 2 点減点しかしなかったけれど (それで 10 点、8 点、0 点という点が多かった)。

  「結合法則でしたっけ？」「違います。書き方のルールです。」

- 「すべての自然数」と書いたのに、$n=2$ から始めた人が結構いた。考えてみると式に p_2 というのがあるので、$n=1$ とすると変だ (入試だったら訂正文出さないといけないな)。すみません。$n=1$ の場合に成り立つことは明らかなので、$n=1$ からでも $n=2$ からでも良いことにする。

3 解答例と解説

(1) 偽である。否定命題は $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$. (証明) x を任意の実数とする。$y = x-1$ とおくと、y は実数で、$x > x-1 = y$ より $x > y$. ■

(2) 真である。(証明) $L=-1$ とおくと、L は実数であり、任意の実数 x に対して、$x^2-2x = (x-1)^2-1 \geq -1 = L$ より $x^2-2x \geq L$. ■

- さらっと出来る人と、混乱した人に分かれた。簡単に自己チェックできるので、答案で "順番がまもられているか" 確認しよう。(1) だと x の後に y, (2) だと L の後に x. 逆順とか同時はおかしい。
- 「実数」とか「$\in \mathbb{R}$」がまったくない答案もあったけれど、おかしい。
- 「真偽を述べ」と問題文に書いてあるのに、無視した人が多い。問題文をちゃんと読め。

4 解答例解説

(1) A, B を集合とする。A が B の部分集合であるとは、$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ が成り立つことをいう。

条件の部分は $(\forall x \in A)\ x \in B$ と書いても良い。

(2) A, B を集合とする。

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} && A \text{ と } B \text{ の和集合} \\ A \cap B &:= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} && A \text{ と } B \text{ の積集合} \\ A \setminus B &:= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} && A \text{ と } B \text{ の差集合} \\ A \times B &:= \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\} && A \text{ と } B \text{ の直積集合.} \end{aligned}$$

(3) X を全体集合とする。

$$A^{\mathsf{C}} := \{x \mid x \in X \land x \notin A\} \quad A \text{ の補集合と呼ぶ},$$
$$2^A := \{C \mid C \subset A\} \quad A \text{ のベキ集合と呼ぶ}.$$

(4) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ であるから

$$A \times B = \{(-1,1), (-1,2), (-1,3), (0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3)\},$$
$$2^A = \{\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{0, 1\}, \{1, -1\}, \{-1, 0, 1\}\}.$$

- 部分集合の定義が書けない人が多い。集合に関する命題の結論部分のほとんどが部分集合にかかわること (集合が集合に含まれる) なのだから、部分集合の定義は重要である (定義が分からずに証明が書けるはずがない)。

  以前は、(1), (2), (3) をまとめて出題していたのだけれど、答え方が違うので、最近は分けるようにしている。(2), (3) で現れる集合はただ 1 つに定まるもので、“集合 := 何かの式” のようにして集合が定義できるが、(1) の部分集合は (空集合でない限り) 複数あるので、そういう書き方は出来ない。「集合 A が集合 B の部分集合であるとは、〜(条件) が成り立つことをいう」のような表現が必要になる。文でなく式で書くと、例えば $A \subset B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A) x \in B$ とか。

- 例えば和集合の定義を書け、という問に対しては、何が和集合か分かるように書く必要がある。また何と何の和集合なのかということも書くべきである。つまり (集合が A と B として) 「和集合」でなくて「A と B の和集合」と書く。宿題で朱を入れているけれど、相変わらず書かない人が多い。

- 細かいことだけれど、問題文には書いてないので、(1) と (2) では集合 A, B を自分で出す必要があり、(3) では全体集合を自分で出す必要がある。

  補集合関係の議論をするには、大抵の場合に全体集合が必要になる$\cdots$ 例えば、$A^{\mathsf{C}} = \{x \mid x \notin A\}$ では不完全で、$A^{\mathsf{C}} = \{x \mid x \in X \land x \notin A\}$ とすべき。

5 解答例と解説

(1) $A \subset B$ と仮定する。C を 2^A の任意の要素とすると、$C \subset A$. $A \subset B$ であるから、$C \subset B$. ゆえに $C \in 2^B$. 従って $2^A \subset 2^B$.

(2) 任意の x に対して (あるいは、全体集合の任意の要素 x に対して)

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^{\mathsf{C}} &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \lor x \in B) \Leftrightarrow (\neg(x \in A)) \land (\neg(x \in B)) \\ &\Leftrightarrow x \in A^{\mathsf{C}} \land x \in B^{\mathsf{C}} \Leftrightarrow x \in (A^{\mathsf{C}}) \cap (B^{\mathsf{C}}) \end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに $(A \cup B)^{\mathsf{C}} = (A^{\mathsf{C}}) \cap (B^{\mathsf{C}})$.

(3) ($A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^{\mathsf{C}}$ の証明)
$A \cap B = \emptyset$ を仮定する。x を A の任意の要素とする。実は $x \notin B$ である。

(背理法を用いる。もしも $x \in B$ とすると、$x \in A \land x \in B$ であるから、$x \in A \cap B$. これは $A \cap B = \emptyset$ という仮定に矛盾する。ゆえに $x \notin B$.)

ゆえに $A \subset B^{\mathsf{C}}$.

($A \subset B^{\mathsf{C}} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ の証明)
$A \subset B^{\mathsf{C}}$ を仮定する。$A \cap B = \emptyset$ を背理法で証明する。

$A \cap B \neq \emptyset$ と仮定すると、ある $x \in A \cap B$ が存在する。$x \in A \land x \in B$. このうちの $x \in A$ と仮定 $A \subset B^{\mathsf{C}}$ から $x \in B^{\mathsf{C}}$. これは $x \in B$ と矛盾する。ゆえに $A \cap B = \emptyset$ が成り立つ。■

- 問 4 の (1) が出来ない人は、問 5 の得点は難しい。
- (1) では $2^A \subset 2^B$ を示すので、「x を 2^A の任意の要素とすると」で証明をスタートする。
- (2) で $(A \cup B)^{\mathsf{C}} \subset (A^{\mathsf{C}}) \cap (B^{\mathsf{C}})$ と $(A \cup B)^{\mathsf{C}} \supset (A^{\mathsf{C}}) \cap (B^{\mathsf{C}})$ の 2 つに分けて証明を書くこともできるが、ちょっと面倒で、毎回 $\Leftrightarrow$ を使って一気にできる、というのが上の解答例だけど、今回最初に「x を $(A \cup B)^{\mathsf{C}}$ の任意の要素とすると」と書いてしまった人が何人かいた。そうすると、$\Leftarrow$ (右から左にたどる) が出来ない。「要素」と書きたいのならば、「全体集合の任意の要素 x に対して」と書くのかな。それは明確でとても良い気がするので、来年度からは講義でそう説明することにします。
- (3) で $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \neg(\exists x\ x \in A \cap B)$ からスタートして同値関係で最後までやり切った人もいた (どこかで説明したかもしれないけれど、それが出来るのに気づいたのは、もともとはテストの答案で学生が見せてくれたからなんだ)。…がんばっている人がいるのは分かる。例年、問 5 は苦戦する人が多いけれど、できるようになると良いよね。

6 解答例と解説

(1) $A = \{0\}$ とすると、$B = 2^A = \{\emptyset, \{0\}\}$.

$$C = 2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\emptyset, \{0\}\}\}.$$

(2) $\emptyset = \{\emptyset\}$ は偽。$\{\emptyset\}$ は $\emptyset$ という要素を持つので、空集合ではない。つまり $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

$\emptyset \in \{\emptyset\}$. 真である。一般に $a \in \{a\}$ が成り立つ。$a = \emptyset$ について適用すればよい。

$\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$. 偽である。一般に $\{a\}$ の要素は a だけである。$\{\emptyset\}$ の要素は $\emptyset$ であるが、$\{\emptyset\} \neq \emptyset$ であるから、$\{\emptyset\} \notin \{\emptyset\}$.

$\{\emptyset\} \subset \{\emptyset\}$. 真である。一般に集合 A に対して $A \subset A$ が成り立つ。$A = \{\emptyset\}$ について適用すれば良い。

$\emptyset \subset \{\emptyset\}$. 真である。任意の集合 A について $\emptyset \subset A$ が成り立つ。$A = \emptyset$ に適用すればよい。

(3) $p \neq q$ ならば成り立つが、$p = q$ のときは成り立たない。例えば $p = q = 1$ とすると、$A = \{p, q\} = \{1, 1\} = \{1\}$, $B = \{q\} = \{1\}$. このとき $A \setminus B = \emptyset \neq \{1\} = \{p\}$ であるから $A \setminus B \neq \{p\}$.

(4) 実数 x が、条件 $(\forall \varepsilon > 0)\ |x| < \varepsilon$ を満たすと仮定する。$x = 0$ を証明するため、背理法を用いる。もしも $x \neq 0$ と仮定すると、$|x| > 0$. 最初の仮定から (ε として $|x|$ をとる) $|x| < |x|$. これは矛盾である。ゆえに $x = 0$. ■

- (1) 宿題に $A = \{p, q\}$ のとき $B = 2^A$, $C = 2^B$ を求めよという、(ちょっとひどいかもしれない) 問題を出したけれど、そういう問を解く時に注意すべきことはそれなりに重要で、この (1) でそれが問えるかな、と考えて出題した。さらっと解ける人、ハマっている人に分かれた。
- (2) は今回は真偽のみで採点した (根拠を描いてもらったのは、どういうふうに考えているか、こちらが知りたかったから。めちゃくちゃを書いた人もいた (全部同じ理由とか)。今後 (期末テスト) は根拠にも配点するかも。)。
- (2) について、もう少し説明を追加すると
  - $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ は授業で説明した。

– 一般に $a \in \{a\}$ と説明したことがあるが、もう少し便利な

$$a \in \{b\} \Leftrightarrow a = b$$

の形にまとめておくと良いかも (書いたことはあると思うけれど、もっとプッシュしておくべきか。$x \in \{a_1, \cdots, a_n\} \Leftrightarrow x = a_1 \vee \cdots \vee x = a_n$ と書いた覚えがある。)。

そうすると、$\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$ は、$a = \{\emptyset\}$ が $b = \emptyset$ に等しいかどうか、ということになる。$\emptyset \neq \{\emptyset\}$ なのだから、答えは No.

- (3) は意地悪な問題のようだけれど、集合の記述で重複を許すルールはあちこちで必要になるので、重要である。重複許可は、高校の教科書では明記されていないみたいだけど (重複して書いたらダメとかいう人がいそうだ)。

- (4) (に限らないのだけど) 背理法をなかなか使わない人が多い (年々増えているような気がする)。使って欲しい。その部分はスキップして、結果として証明にギャップができている、そういう答案が多い。ある程度以上一般的な命題を証明しようとすると、背理法を避けるのは難しいと思う。使い慣れましょう。