2023年度 数理リテラシー 中間試験問題

2023年6月21日4限施行 (15:25〜17:00 の予定), 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.　(1)〜(5) の各文を1つの式で表せ。ただし、p と q は命題、A と B は集合, $P(x)$ は変数 x についての述語とする。
(1) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は複素数であるが実数ではなく、$\dfrac{22}{7}$ は有理数であるが整数ではない。　(2) 「p かつ q」の否定は「p でないか、または q でない」である。　(3) $x+\frac{1}{x}=1$ を満たす実数 x は存在しない。
(4) A と B の積集合が空集合であるためには、A が B の補集合に含まれることが必要十分である。
(5) 「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「$P(x)$ が成り立たないような x が存在する」である。

2.　p, q, r, s を任意の命題とするとき、以下の問に答えよ。
(1) 真理値表を用いて、$(p\lor q)\land r\equiv(p\land r)\lor(q\land r)$ を示せ。　(2) (1) の結果と同値変形によって $(p\lor q)\land(r\lor s)\equiv(p\land r)\lor(p\land s)\lor(q\land r)\lor(q\land s)$ を示せ。論理の交換法則と結合法則は用いて良い。(3) (2) を用いて連立方程式 $\begin{cases} y(3x^2+y^2-1)=0 \\ x(3y^2+x^2-1)=0 \end{cases}$ を解け。(ヒント: $ab=0\Leftrightarrow(a=0\lor b=0)$)

3.　命題 (1),(2) の真偽を述べ、真ならば証明し、偽ならばその否定命題を書いて証明せよ。
(1) $(\forall x>0)\ (\exists y>0)\ \sqrt{y}>x$.　(2) $(\forall x\in\mathbb{Q})\ (\exists y\in\mathbb{Q})\ xy=1$.

4.　(1) 部分集合の定義を書け。　(2) A と B を集合とする。次の各集合の定義と呼び方を述べよ。
(a) $A\cap B$　(b) $A\cup B$　(c) $A\setminus B$　(d) $A\times B$　(e) $A^{\complement}$　(f) 2^A
(3) $A=\{0,1,2\}$, $B=\{p,q\}$ とするとき、$A\times B$ を求めよ。
(4) $A=\emptyset$ とするとき、$B:=2^A$, $C:=2^B$, $D:=2^C$ を求めよ。
(5) 集合 A, B, C, D が $A\subset B$ かつ $C\subset D$ を満たすとき、$A\setminus D\subset B\setminus C$ が成り立つことを示せ。

5.　(1) 集合族とは何か。　(2) すべての自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。　(3) すべての自然数 n について $A_n\supset A_{n+2}$ が成り立つとき、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=A_1\cup A_2$ であることを示せ。　(4) $A_n=\left\{x \mid \frac{1}{n}<x<n\right\}$ とするとき、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ (証明不要)。

6.　$(\forall a>0)\ (\forall b>0)\ (\exists n\in\mathbb{N})\ na>b$ は正しい命題である (アルキメデスの公理と呼ばれている)。

(1) アルキメデスの公理の否定命題を書け。

(2) 以下の文章は、$(\forall x>0)\ (\exists n\in\mathbb{N})\ \dfrac{1}{n}<x$ という命題の証明である。空欄を適切に埋めよ。

> $\boxed{\text{ア}}$ を任意の $\boxed{\text{イ}}$ とする。$a=\boxed{\text{ウ}}$, $b=\boxed{\text{エ}}$ とおくと、アルキメデスの公理より、ある自然数 n が存在して、$na>b$. ゆえに $\dfrac{1}{n}<x$. ■

(3) $A_n=\left\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{1}{n}<x\right\}$ とおくとき、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=(0,\infty)$ であることを証明せよ。

注意事項

この面を表にして配ります。試験開始まで裏返さないこと。

- 筆記用具と時計以外はカバンにしまって下さい。
- 15:25 に試験を始め、17:00 に終了する予定です。もし始まりが遅れたら、その分終わりの時間もずらします。
- 「解答用紙に自分の学年・組・番号・氏名を書いて下さい」と言われてから、筆記用具を取って解答用紙に記入し、記入し終わったら筆記用具を置いて下さい。
- 「はじめて下さい」の声を聞いてから、この紙を裏返して解答を始めて下さい。
- 問題は好きな順に解答して構いません。ただし一つの大問の解答は一ヶ所にまとめること。
- 解答用紙は裏面も使用して構いません。なるべく解答用紙 1 枚で済ませること。足りなくなった場合は試験監督 (桂田) に申し出ること。
- 2 枚目の解答用紙を受け取ったら、すぐに自分の学年・組・番号・氏名を記入すること、解答用紙を回収するときは必ず 2 枚 (2 枚目の上に 1 枚目を重ねて) 提出すること。
- 遅刻は開始してから 30 分 まで認めます。開始してから 40 分後から試験終了 10 分前までは途中退室を認めます (手をあげて試験監督に知らせ、解答用紙を渡し、静かに荷物をまとめて退室して下さい)。

1 解説

(1) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \wedge \frac{22}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

(2) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

(3) $\neg(\exists x \in \mathbb{R}) x + \frac{1}{x} = 1$

(4) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^{\complement}$

(5) $\neg\left(\forall x P(x)\right) \equiv \exists x \neg P(x)$

- (2) で $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ とした人が多い。この講義では、論理の式で $=$ は使っていないので (区別したい理由がある)、減点しておいた。$\Leftrightarrow$ と書くのは構わない。
- (3) で $(\forall x \in \mathbb{R}) x + \frac{1}{x} \neq 1$ とした人が多かった。計算してしまったわけだが、正解扱いした。
- (4) で $A \cap B = \{\emptyset\} \Leftrightarrow A \subset B^{\complement}$ とした人が複数いた。$\emptyset$ と $\{\emptyset\}$ は違うものであるので間違いである。
- (5) で $\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$ のような式を書いた人が多い。この講義ではそういう場合に : は使っていない。減点した。

2 解説

(1) 真理値表は

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

である。5 列目と 8 列目の真偽が一致するので $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

(2) 交換法則と (1) を使って

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r). \tag{$\heartsuit$}$$

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge (r \vee s) &\equiv (p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s)) && \text{((1) を使った)} \\
&\equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge s)) && \text{($\heartsuit$) を使った} \\
&\equiv (((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee (q \wedge r)) \vee (q \wedge s) && \text{(結合法則)} \\
&\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s). && \text{(かっこの省略)}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s).$$

(3) 連立方程式は、方程式を同時に満たすような未知数の値をすべて求める、という問題である。

$y(3x^2+y^2-1)=0 \wedge x(3y^2+x^2-1)=0 \Leftrightarrow (y=0 \vee 3x^2+y^2-1=0) \wedge (x=0 \vee 3y^2+x^2-1=0)$

$y=0$, $3x^2+y^2-1=0$, $x=0$, $3y^2+x^2-1=0$ をそれぞれ、p, q, r, s とおくと、$(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ の形をしている。

$p \wedge r$ は

$$(x=0 \wedge y=0) \Leftrightarrow (x,y)=(0,0).$$

$p \wedge s$ は

$$y=0 \wedge 3y^2+x^2-1=0 \Leftrightarrow y=0 \wedge x^2-1=0 \Leftrightarrow (x,y)=(1,0) \vee (x,y)=(-1,0).$$

$q \wedge r$ は

$$3x^2+y^2-1=0 \wedge x=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y^2-1=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,1) \vee (x,y)=(0,-1).$$

$q \wedge s$ は

$$\begin{aligned} &3x^2+y^2-1=0 \wedge 3y^2+x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \wedge y^2=\frac{1}{4} \\ &\qquad \Leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \vee (x,y)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \vee (x,y)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \vee (x,y)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

以上から

$$(x,y)=(0,0),(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right). \blacksquare$$

- 宿題 1 そのものである。しかし、色々ひっかかった人が多い。
- 真理値表が辞書式順序でない人がかなり多かった。それは減点しないとしてあるが、採点が大変で、期末試験でどうするか考慮中。
- (1) で証明したのは $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ であって、$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ は証明していないのに、それを証明せずに (2) で用いた場合は減点した。またその場合、式の順序が異なり、順番を入れ替える必要があるが、その部分でおかしなことをしている場合は不正解とした (1 つの問に、2 つまずいことがあった場合は零点)。
- (3) は、分配法則をどのように使うか説明できていれば、計算結果を間違えていても半分の点をつけた。$x^2=1/4 \wedge y^2=1/4$ から $(x,y)=(1/2,1/2),(1/2,-1/2),(-1/2,1/2),(-1/2,-1/2)$ という 4 つの解が得られるが、$(x,y)=(\pm 1/2, \pm 1/2)$ とだけ書くのは曖昧なので減点した。「(複号任意)」のような説明を書くなど工夫してほしい (個人的には「複号任意」は古めかしくて好みではないが)。

3 解説

(1) 真。(証明) x を任意の正の数とする。$y=(x+1)^2$ とおくと、$y>0$. また $\sqrt{y}=\sqrt{(x+1)^2}=x+1>x$ であるから $\sqrt{y}>x$. $\blacksquare$

(2) 偽。否定命題は $(\exists x \in \mathbb{Q})\ (\forall y \in \mathbb{Q})\ xy \neq 1$. (証明) $x=0$ とおくと $x \in \mathbb{Q}$. また、任意の有理数 y に対して、$xy=0 \cdot y=0 \neq 1$ であるから $xy \neq 1$. $\blacksquare$

- (1) は最初に「x を任意の正の数とする」のように x を導入して、後から「任意の正の数 y」と y を導入する。いきなり「$y = x^2 + 1$ とすると」とかしない。同様に (2) では、まず x を導入して、それから「任意の有理数 y」と y を導入する。

- $y = x^4$ として $\sqrt{y} = x^2 > x$ とした人がいたが、$x = 1$ や $x = 1/2$ のとき $x^2 > x$ は成り立たないので間違いである。$y = x^2 + 1$ や $y = 2x^2$ などとする。

4 解説

(1) A, B を集合とする。A が B の部分集合であるとは、$(\forall x \in A)\ x \in B$ が成り立つことをいう。

(2)

$$
\begin{aligned}
&A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad A \text{ と } B \text{ の積集合}\\
&A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad A \text{ と } B \text{ の和集合}\\
&A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \quad A \text{ と } B \text{ の差集合}\\
&A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \quad A \text{ と } B \text{ の直積集合}\\
&A^{\complement} := \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\} \quad A \text{ の補集合, ただし全体集合を } X \text{ と表した。}\\
&2^A := \{C \mid C \subset A\} \quad A \text{ のベキ集合.}
\end{aligned}
$$

(3)

$$A \times B = \{(0, p), (0, q), (1, p), (1, q), (2, p), (2, q)\}$$

(4)

$$B = \{\emptyset\}, \quad C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad D = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

(5) $A \subset B$ かつ $C \subset D$ を仮定する。x を $A \setminus D$ の任意の要素とすると、$x \in A$ かつ $x \notin D$. $A \subset B$ であるから、$x \in A$ より $x \in B$. $C \subset D$ であるから、$x \notin D$ より $x \notin C$ (実際、もしも $x \in C$ とすると $x \in D$ となって矛盾する。). 以上より $x \in B \setminus C$. ゆえに $A \setminus D \subset B \setminus C$. ■

- (1) は (2) とは、答え方がかなり違う。(2) で現れる集合はただ 1 つに定まるもので、集合 := 定義する式 のように説明できるが、(1) の部分集合は、普通は複数あるので、「集合 A が集合 B の部分集合であるとは、〜という条件が成り立つことをいう」のような表現 (文でなく式で書くと、$A \subset B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A) x \in B$ とか) が必要になる。

- (3) でカンマを全く書かない答案「$A \times B = \{(0, p)(0, q)(1, p)(1, q)(2, p)(2, q)\}$」には点を与えなかった。

- (4) で $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ と間違えた人が多い。空集合の部分集合は空集合だけである (普通、任意の集合 A に対して、$\emptyset \subset A$ と $A \subset A$ の両方が成り立つが、空集合については両者が同じものである)。「要素数が n である集合の要素数は 2^n」というチェック法を適用すると、空集合 A の要素数は 0 ($\sharp\emptyset = 0$) であるから、$\sharp B = 2^0 = 1$, $\sharp C = 2^1 = 2$, $\sharp D = 2^2 = 4$ である。

5 解説

(1) 集合を要素とする集合を集合族という。

(2)

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}.$$

(3) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+2}$ を仮定する。

$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset A_1 \cup A_2$ **であること** x を $A_1 \cup A_2$ の任意の要素とすると、$x \in A_1 \vee x \in A_2$. $x \in A_1$ のとき、$n = 1$ とおくと、$n \in \mathbb{N}$ かつ $x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $x \in A_2$ のとき、$n = 2$ とおくと、$n \in \mathbb{N}$ かつ $x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. いずれの場合も $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が成り立つ。ゆえに $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1 \cup A_2$ **であること** x を $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の任意の要素とする。ある自然数 n が存在して $x \in A_n$.

n が奇数のとき

$$A_1 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_{n-2} \supset A_n$$

であるから $A_n \subset A_1$. ゆえに $x \in A_1$. ゆえに $x \in A_1 \cup A_2$.

n が偶数のとき

$$A_2 \supset A_4 \supset \cdots \supset A_{n-2} \supset A_n$$

であるから $A_n \subset A_2$. ゆえに $x \in A_2$. ゆえに $x \in A_1 \cup A_2$.

いずれの場合も $x \in A_1 \cup A_2$. ゆえに $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1 \cup A_2$. ■

(4)

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = \emptyset, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x\}.$$

- 「集合を要素とする集合を集合族という。」は少し曖昧だったかもしれない。要素に集合以外のものが1つでもあったらダメなので、「要素がすべて集合である集合を集合族という。」と説明すべきだったか。その辺は緩く採点しておいた。
- (2) でおかしな式を書いた人がいる。集合を式で書くやり方は確実にマスターしよう。$\{x \mid P(x)\}$ という基本的なパターンに従っていることを理解して欲しい。

6 解説

(1) $(\exists a > 0)\ (\exists b > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ na \leq b$

(2) $\boxed{\text{ア}}$ は「x」, $\boxed{\text{イ}}$ は「正の数」, $\boxed{\text{ウ}}$ は「x」, $\boxed{\text{エ}}$ は「1」

$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ は両方正しい場合に加点。$\boxed{\text{ウ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ も同様。

(3) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset (0, \infty)$ **であること** x を $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の任意の要素とすると、ある自然数 n が存在して $x \in \mathbb{R}$ かつ $\frac{1}{n} < x$. ゆえに $0 < x$. すなわち $x \in (0, \infty)$. ゆえに $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset (0, \infty)$. ■

$(0, \infty) \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ **であること** x を $(0, \infty)$ の任意の要素とすると $x > 0$. (2) より、ある自然数 n が存在して $\dfrac{1}{n} < x$. このとき $x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. よって、$(0, \infty) \subset A_n$. ■

以上より $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0, \infty)$. ■