2022 年度 数理リテラシー 中間試験問題

2022 年 6 月 22 日 4 限施行 (15:25〜17:00 の予定), 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.　(1)〜(5) の各文を 1 つの式で表せ。ただし、p と q は命題、A と B は集合とする。
(1) -1 は自然数ではないが整数であり、$\sqrt{2}$ は有理数ではないが実数である。　(2)「p ならば q」の否定は、p であるのに q でない、と同値である。　(3) $z^2 < 0$ を満たす複素数 z が存在する。
(4) A と B の合併集合の補集合は、A の補集合と B の補集合の交わりである。　(5) 任意の x に対して、x が $A \cap B$ に属するためには、x が A に属しかつ x が B に属することが必要十分である。

2.　p, q, r を任意の命題とするとき、以下の問に答えよ。
(1) 真理値表を用いて、$\neg(p \land q) \equiv (\neg p) \lor (\neg q)$ を示せ。
(2) 同値変形によって、$\neg(p \land q \land r) \equiv (\neg p) \lor (\neg r) \lor (\neg q)$ を示せ (右辺の順番に注意せよ)。論理の交換法則と結合法則, (1) で証明したことは用いて良い。

3.　次の各命題の真偽を述べ、真である場合は証明し、偽である場合はその否定命題を式で書いて証明せよ。
(1) $(\exists x \in \mathbb{Z})\ (\forall y \in \mathbb{Z})\ x \le y$　　(2) $(\forall x \in \mathbb{N})\ (\exists y \in \mathbb{Q})\ xy = 1$

4.　(1) $P(x), Q(x)$ は x についての述語とする。次の 2 つの式がともに正しい式となるように、$\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$ を適当な論理記号で置き換えよ。

$$(\forall x : P(x))\ Q(x) \equiv \forall x\ (P(x) \boxed{\text{あ}} Q(x)), \quad (\exists x : P(x))\ Q(x) \equiv \exists x\ (P(x) \boxed{\text{い}} Q(x)).$$

(2) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は数列, $a \in \mathbb{R}$ とする。次の条件の否定条件を式で表し、その式を日本語の文で表せ。

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

5.　(1) A と B を集合とするとき、次の各集合の定義と呼び方を述べよ。
(a) $A \cup B$　(b) $A \setminus B$　(c) $A \cap B$　(d) $A \times B$　(e) $A^{\complement}$　(f) 2^A
(2) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ とするとき、$A \times B$, 2^A を求めよ。

6.　A, B, A_n $(n \in \mathbb{N})$ を集合とするとき、以下の命題を証明せよ。(論理の法則は、授業で学んだことを何でも証明せずに使って良い。集合については、「$A \subset B \land B \subset C \Rightarrow A \subset C$」のみ証明抜きで用いて良い。それ以外は、集合が等しいこと、部分集合、冪集合、合併集合などの定義から証明すること。)

(1) $A \subset B \Rightarrow 2^A \subset 2^B$　(2) $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^{\complement} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n^{\complement}\right)$　(3) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

7.　すべての自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、以下の (1), (2), (3), (4) に答えよ。
(1) 集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の共通部分 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, 合併集合 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。
(2) $A_{123} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset A_{456}$ を証明せよ。
(3) $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 1 - \dfrac{1}{n} < x \le 2 - \dfrac{1}{n} \right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とするとき、$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ と $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ をなるべく簡単な形で求めよ。(証明はどちらか一方だけでよい。)

注意事項

この面を表にして配ります。試験開始まで裏返さないこと。

- 筆記用具と時計以外はカバンにしまって下さい。
- 15:25 に試験を始め、17:00 に終了する予定です。もし始まりが遅れたら、その分終わりの時間もずらします。
- 「解答用紙に自分の学年・組・番号・氏名を書いて下さい」と言われてから、筆記用具を取って解答用紙に記入し、記入し終わったら筆記用具を置いて下さい。
- 「はじめて下さい」の声を聞いてから、この紙を裏返して解答を始めて下さい。
- 問題は好きな順に解答して構いません。ただし一つの大問の解答は一ヶ所にまとめること。
- 解答用紙は裏面も使用して構いません。なるべく解答用紙 1 枚で済ませること。足りなくなった場合は試験監督 (桂田) に申し出ること。
- 2 枚目の解答用紙を受け取ったら、すぐに自分の学年・組・番号・氏名を記入すること、解答用紙を回収するときは必ず 2 枚 (2 枚目の上に 1 枚目を重ねて) 提出すること。
- 遅刻は開始してから 30 分 まで認めます。開始してから 40 分後から試験終了 10 分前までは途中退室を認めます (手をあげて試験監督に知らせ、解答用紙を渡し、静かに荷物をまとめて退室して下さい)。

答案を見て、目についた間違いの説明や、講評などは採点が全部終了してから書きます。

解答

1.

(1) $-1 \notin \mathbb{N} \wedge -1 \in \mathbb{Z} \wedge \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. または $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(2) $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q)$.

(3) $(\exists z \in \mathbb{C})\ z^2 < 0$.

(4) $(A \cup B)^{\complement} = (A^{\complement}) \cap (B^{\complement})$.

(5) $\forall x (x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$.

2.

(1) 真理値表は

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

である。4 列目と 7 列目の真偽が一致するので $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.

(2)

$$
\begin{aligned}
\neg(p \wedge q \wedge r) &\equiv \neg\left((p \wedge q) \wedge r\right) \\
&\equiv (\neg(p \wedge q)) \vee (\neg r) && \text{(1) を使用} \\
&\equiv ((\neg p) \vee (\neg q)) \vee (\neg r) && \text{(1) を使用} \\
&\equiv (\neg p) \vee ((\neg q) \vee (\neg r)) && \text{結合法則} \\
&\equiv (\neg p) \vee ((\neg r) \vee (\neg q)) && \text{交換法則} \\
&\equiv ((\neg p) \vee (\neg r)) \vee (\neg q) && \text{結合法則} \\
&\equiv (\neg p) \vee (\neg r) \vee (\neg q).
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv (\neg p) \vee (\neg r) \vee (\neg q). \quad \blacksquare$$

3.

(1) 偽。否定命題は $(\forall x \in \mathbb{Z})\ (\exists y \in \mathbb{Z})\ x > y$. (否定命題の証明) x を任意の整数とする。$y = x - 1$ とおくと、$y \in \mathbb{Z}$. また $x > x - 1 = y$ であるから $x > y$. $\blacksquare$

(2) 真。(証明) x を任意の自然数とする。$y = \dfrac{1}{x}$ とおくと、$y \in \mathbb{Z}$. また $xy = x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$ であるから $xy = 1$. $\blacksquare$

4.

(1) $\boxed{\text{あ}}$ は $\boxed{\Rightarrow}$. $\boxed{\text{い}}$ は $\boxed{\wedge}$.

(2) 否定条件は

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

「ある正の数 ε が存在して、任意の自然数 N に対して、$n \geq N$ を満たすある自然数 n が存在して、$|a_n - a| \geq \varepsilon$ が成り立つ。」

5.

(1) (a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ A と B の和集合と呼ぶ。 (b) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ A と B の差集合と呼ぶ。 (c) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ A と B の積集合と呼ぶ。 (d) $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ A と B の直積集合と呼ぶ。 (e) $A^{\complement} = \{x \in X \mid x \notin A\}$ (ただし、X を全体集合とする。) A の補集合と呼ぶ。 (f) $2^A = \{C \mid C \subset A\}$ A の冪集合と呼ぶ。

(2) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$, $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$.

6.

(1) $A \subset B$ と仮定する。C を 2^A の任意の要素とする。これは $C \subset A$ を意味する。仮定 $A \subset B$ より $C \subset B$. ゆえに $C \in 2^B$. 従って $2^A \subset 2^B$. ■

(2) 全体集合を X とする。任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^{\complement} &\Leftrightarrow \neg \left(x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \\ &\Leftrightarrow \neg \left((\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n \right) \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \neg \left(x \in A_n \right) \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) x \notin A_n \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n^{\complement} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n^{\complement} \right) \end{aligned}$$

であるから

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^{\complement} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(A_n^{\complement} \right). \quad \blacksquare$$

(3) 一般に「任意の集合 X, Y に対して $X \subset X \cup Y$ が成り立つ」。実際、任意の x に対して、$x \in X$ ならば $x \in X \vee x \in Y$ が成り立つので、$X \subset X \cup Y$.

$A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$ **の証明** $A \cup B = B$ が成り立つと仮定する。一般に $A \subset A \cup B$ が成り立つので ($X = A, Y = B$ とした)、$A \subset A \cup B = B$ より $A \subset B$.

$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ **の証明** $A \subset B$ が成り立つと仮定する。(i) 一般に $A \cup B \supset B$ が成り立つ ($X = B, Y = A$ とした)。(ii) x を $A \cup B$ の任意の要素とすると、$x \in A \vee x \in B$, $x \in A$ のときも仮定より $x \in B$ が成り立つので、つねに $x \in B$ が成り立つ。ゆえに $A \cup B \subset B$. (i), (ii) より $A \cup B = B$. ■

7.

(1)

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}.$$

(2) x を A_{123} の任意の要素とする。$n = 123$ とおくと、$n \in \mathbb{N}$ かつ $x \in A_n$. $(\exists n \in \mathbb{N})$ $x \in A_n$ が成り立つので、$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_{123} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

x を $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の任意の要素とする。$(\forall n \in \mathbb{N})$ $x \in A_n$ が成り立つ。$n = 456$ とおくと、$n \in \mathbb{N}$ であるから $x \in A_n$. すなわち $x \in A_{456}$. ゆえに $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_{456}$.

(3)

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{1\}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}.$$

証明は… (後で書きます。)