2019 年度 数理リテラシー 中間試験問題

2019 年 6 月 19 日 4 限施行 (15:25〜17:00 の予定), 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.　次の各文を記号のみを用いて表せ。ただし、p, q は命題、A, B は集合、i は虚数単位とする。
(1) $\dfrac{1}{7}$ は整数ではないが有理数であり、$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は実数ではないが複素数である。　(2) 「p かつ q」の否定は、p でないかまたは q でない、と同値である。　(3) 任意の実数 x に対して、$x^2 \geq 0$ が成り立つ。　(4) A と B の共通部分の補集合は、A の補集合と B の補集合の合併である。　(5) 任意の x に対して、x が $A \setminus B$ に属するためには x が A に属しかつ x が B に属さないことが必要十分である。

2.　p, q, r, s を任意の命題とするとき以下の問に答えよ。論理の交換法則、結合法則は用いて良い。
(1) 真理値表を用いて、$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。
(2) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ を示せ。

3.　次の各命題の真偽を述べ、真である場合は証明し、偽である場合はその否定命題を証明せよ。
(1) $(\exists x \in \mathbb{Z})\ (\forall y \in \mathbb{N})\ x < y$　　(2) $(\forall x \in \mathbb{Q})\ (\exists y \in \mathbb{Q})\ xy = 1$

4.　(1) 次の命題を日本語の文で表せ。またこの命題の否定命題を (論理式で) 書け。

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

(2) 任意の条件 $P(x)$ に対して、$\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x))$ と $\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x))$ が成り立つことを認めて、 任意の条件 $P(x), Q(x)$ に対して、

$$\neg\left((\forall x : P(x))Q(x)\right) \equiv (\exists x : P(x))\neg Q(x)$$

が成り立つことを示せ。

5.　(1) 以下の言葉 ((d)〜(g) は 2 つの集合に関するもの) の定義を (式を用いて) 述べよ 。
(a) 部分集合　(b) 冪集合　(c) 補集合　(d) 積集合　(e) 和集合　(f) 差集合　(g) 直積集合

(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ とするとき、$A \times B$, 2^A を求めよ (要素を全て書き並べる方法で表せ)。

(3) $A = \{a, b, c\}$ かつ $B = \{c\}$ であるが、$A \setminus B = \{a, b\}$ が成り立たないような整数 a, b, c の例をあげよ。

6.　A, B を集合とするとき、以下の命題を証明せよ。(論理の法則は何でも使って良い。)
(1) $(A \cup B)^c = (A^c) \cap (B^c)$　(2) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$

7.　(1) 集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, 合併集合 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。

(2) 集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ を満たすとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ であることを示せ。

(3) $A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\dfrac{1}{n} < x \leq 1 + \dfrac{1}{n} \right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とするとき、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ (証明もせよ)。

注意事項

この面を表にして配ります。試験開始まで裏返さないこと。

- 筆記用具と時計以外はカバンにしまって下さい。
- 15:25 に試験を始め、17:00 に終了する予定です。もし始まりが遅れたら、その分終わりの時間もずらします。
- 問題は好きな順に解答して構いません。ただし一つの大問の解答は一ヶ所にまとめること。
- 解答用紙は裏面も使用して構いません。なるべく解答用紙 1 枚で済ませること。どうしても足りなくなった場合は試験監督 (桂田) に申し出ること。
- 遅刻は開始してから 30 分 まで認めます。開始してから 40 分後から試験終了 10 分前までは途中退室を認めます (手をあげて試験監督に知らせ、解答用紙を渡し、静かに荷物をまとめて退室して下さい)。

2019 年 6 月 27 日

講評・解説　もちろん、中間試験は真剣勝負で今回の結果は成績に反映されるが、現時点でそれほど大きな差はついていないので、

ギブアップも油断もしないこと。

数理リテラシーで中間試験をする理由の第一は、この後どのように学習するかの参考にしてもらうためである。(単に成績をつけるだけならば、期末試験だけで十分のはずである。しかし、このような試験は初めてという人がほとんどで、1 回だけの試験はとりこぼす人も多いので、練習効果を考えている。) 自分の理解度・学習進度、弱点を把握して、この後の学習に生かしてもらいたい。

勉強は個人がするものではあり、人によって様子が異なるのは当たり前だが、それでも総じて次のことが言える。

- 早い段階で学んだことは (その後も時々出て来るせいか) 習熟度が高い。問題は (1 番を除き) ほぼ学習した時間順に並んでいるので、前の番号ほど得点が高めである。
  自分の答案を見て、どの辺が理解不十分になっているか、確認しよう。後半の問題は出来が悪くても (しかたない)、期末試験で同じような問題が出題されたら、解けるように準備すること。

- 宿題を通して注意したことについて、比較的対応してくれたという印象がある (例えば文字・記号はかなり読みやすくなっている)。宿題で注意されたことが修正されていない人もいるが、しっかり反省して直してもらいたい。

- 証明問題にてこずる人が多い。それは割と普通のことであるが、「こういう問題は、まずこうしてみよう」と言ったことを守れていない人が多い (いつもそれで解決するわけではないが、それが出来るようになることが第一歩なので、試験ではそれで解決する問題を相当な率で選んでいる)。その点はとても不満である (素直に言うことを聞いてほしい)。繰り返しになるが、
  - 量称記号 $\forall, \exists$ で表された命題を証明を書くとき、次の手順が有効なことが多い。(i) 式に書かれた順番を守る、(ii) $\forall x$ が来たら「x を任意の○○とする」と書く、(iii) $\exists x$ が来たら以下に書かれている条件を満たす x の発見問題と考える。
  - 集合の包含関係 $A \subset B$ の証明を書くとき、次の手順が有効なことが多い。「x を A の任意の要素とすると」あるいは「$x \in A$ とすると」から始めて、ゴールは「$x \in B$」、その間を埋める作業をする。
  - 集合の等式 (相等関係) $A = B$ の証明を書くとき、($A \subset B$ と $B \subset A$ を示せば良いので)、$x \in A$ から $x \in B$ を導くこと、$x \in B$ から $x \in A$ を導くこと、の両方をすれば良い。

150 点満点。5 は 30 点で、他はすべて 20 点。
答案用紙はコピーしてあるので、採点結果についてメールでも問い合わせ可能。

解答

1.

(1) $\frac{1}{7} \notin \mathbb{Z} \land \frac{1}{7} \in \mathbb{Q} \land \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \notin \mathbb{R} \land \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$. または $\frac{1}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \land \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

(2) $\neg(p \land q) \equiv (\neg p) \lor (\neg q)$.

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0$.

(4) $(A \cap B)^c = (A^c) \cup (B^c)$.

(5) $\forall x (x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B)$.

2.

(1) 真理値表は

p	q	r	$p \lor q$	$(p \lor q) \land r$	$p \land r$	$q \land r$	$(p \land r) \lor (q \land r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

である。5 列目と 8 列目の真偽が一致するので $(p \lor q) \land r \equiv (p \land r) \lor (q \land r)$.

(2) まず交換律を使い、(1) の分配律を使い、さらに交換律を使うと

$$\begin{aligned} p \land (q \lor r) &\equiv (q \lor r) \land p \\ &\equiv (q \land p) \lor (r \land p) \\ &\equiv (p \land q) \lor (p \land r). \end{aligned}$$

ゆえに

$$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r). \tag{$\sharp$}$$

まず (1) を使い、それから ($\sharp$) を 2 回使い、結合律を使うと

$$\begin{aligned} (p \lor q) \land (r \lor s) &\equiv (p \land (r \lor s)) \lor (q \land (r \lor s)) \\ &\equiv ((p \land r) \lor (p \land s)) \lor ((q \land r) \lor (q \land s)) \\ &\equiv (((p \land r) \lor (p \land s)) \lor (q \land r)) \lor (q \land s) \\ &\equiv (p \land r) \lor (p \land s) \lor (q \land r) \lor (q \land s). \end{aligned}$$

ゆえに

$$(p \lor q) \land (r \lor s) \equiv (p \land r) \lor (p \land s) \lor (q \land r) \lor (q \land s). \blacksquare$$

3.

(1) 真。(証明) $x=0$ とおくと、$x \in \mathbb{Z}$ かつ任意の自然数 y に対して、$x=0<1 \leq y$ であるから、$x<y$ が成り立つ。

(2) 偽。否定命題は $(\exists x \in \mathbb{Q})\ (\forall y \in \mathbb{Q})\ xy \neq 1$. (証明) $x=0$ とおくと $x \in \mathbb{Q}$ であり、かつ任意の有理数 y に対して、$xy = 0 \cdot y = 0 \neq 1$ であるから $xy \neq 1$. ■

解説　この問題は多分一番差がつく問題。似ているけれど、全然ちがう命題が簡単に作れるので、「色々な問題の答を覚えてやろう」は通用しない。じっくり時間をかけて考えて下さい。

4.

(1) 任意の正の数 a, b に対して、ある自然数 n が存在して、$na > b$ が成り立つ。

否定命題は

$$(\exists a > 0)(\exists b > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad na \leq b.$$

(2) (授業でやったのだけれど、思い出せなかった人が多い。)

$$\begin{aligned}
\neg\left((\forall x : P(x))Q(x)\right) &\equiv \neg\left(\forall x\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)\right) \\
&\equiv \neg\left(\forall x\left(\neg P(x) \vee Q(x)\right)\right) \\
&\equiv \exists x \neg\left(\neg P(x) \vee Q(x)\right) \\
&\equiv \exists x\left(\neg\left(\neg P(x)\right)\right) \wedge \left(\neg Q(x)\right) \\
&\equiv \exists x\left(P(x) \wedge \left(\neg Q(x)\right)\right) \\
&\equiv (\exists x : P(x)) \neg Q(x). \blacksquare
\end{aligned}$$

解説　意外と (1) の前半が出来ていない。$\forall$○ 〜 を「任意の○に対して〜」、$\exists$○ 〜 を「ある○が存在して〜」がすらすら出て来るように。(1) の後半は否定命題を作るというもので、ほとんどの人は出来ていたが、まだ $(\forall a \leq 0)$ とかやらかしてしまう人が少数残っている。期末試験では完全にいなくなることを希望する。

5.

(1)
- A, B を集合とする。集合 B が集合 A の部分集合であるとは、$\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)$ が成り立つことをいい、$B \subset A$ あるいは $A \supset B$ と表す。
- A を集合とする。A の部分集合全体の集合、つまり $2^A := \{B \mid B \subset A\}$ を A の冪集合と呼ぶ。
- A を全体集合 X の部分集合とする。このとき $A^c := \{x \in X \mid x \notin A\}$ を A の補集合と呼ぶ。
- A, B を集合とする。$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ を A と B の積集合と呼ぶ。
- (以下略)

(2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$ であるから

$$A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\},$$

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\}\}.$$

(3) $a=1$, $b=2$, $c=2$ とすると、$A=\{a,b,c\}$, $B=\{c\}$ であっても

$$A \setminus B = \{1,2,2\} \setminus \{2\} = \{1\} \neq \{1,2\} = \{a,b\}.$$

解説

(1) A, B をこちらで与えなかったのは、少し難度をあげたか。部分集合の定義が苦手という人は例年多い。

(2) 以前は A^c や $A\cap B$ なども尋ねていたけれど、よく間違えるのは、$A\times B, 2^A$ の 2 つということで、最近はそれだけを尋ねるようにしている。案の定よく間違える。宿題のときから添削しているのだけど…これも期末試験では間違えなくなることを希望する。

(3) 意外と出来はよかった。こういうのは分かるんだね。うれしい。■

6.

(1) 任意の x に対して

$$\begin{aligned} x\in(A\cup B)^c &\Leftrightarrow \neg(x\in A\cup B)\\ &\Leftrightarrow \neg(x\in A\vee x\in B)\\ &\Leftrightarrow (\neg(x\in A))\wedge(\neg(x\in B))\\ &\Leftrightarrow (x\in A^c)\wedge(x\in B^c)\\ &\Leftrightarrow x\in(A^c)\cap(B^c)\end{aligned}$$

が成り立つから $(A\cup B)^c=(A^c)\cap(B^c)$.

(2)

$$\begin{aligned} A\cap B=\emptyset &\Leftrightarrow \neg\,(\exists x\ x\in A\cap B)\\ &\Leftrightarrow \neg\,(\exists x\,(x\in A\wedge x\in B))\\ &\Leftrightarrow \forall x\neg\,(x\in A\wedge x\in B)\\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg(x\in A))\vee(\neg(x\in B))\\ &\Leftrightarrow \forall x\,((\neg(x\in A))\vee x\in B^c)\\ &\Leftrightarrow \forall x(x\in A\Rightarrow x\in B^c)\\ &\Leftrightarrow A\subset B^c.\blacksquare\end{aligned}$$

解説　実はよく知られている問題。(1) は集合の等式の証明なので、こちらとしては例の「$x\in A$ とすると…$x\in B$, $x\in B$ とすると $x\in A$」をやってほしい。

(2) は色々な答えの書き方があるけれど (上のはあくまでも一例)、とにかく自力で出来れば、この段階としては、十分なレベルに達したと (個人的に) 考えている。こういうのは覚えるのではなくて[1]、同値変形の一つ一つが納得できるかチェックすることを強く勧める。

7.

(1)

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=\{x\mid(\forall n\in\mathbb{N})x\in A_n\},\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\{x\mid(\exists n\in\mathbb{N})x\in A_n\}.$$

[1] 数理リテラシーでは、言い回し (表現) については、覚えて真似しよう、とするのが良いけれど、ここはそういうのではないです。

(2) (任意の x に対して) $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、ある自然数 n が存在して、$x \in A_n$. 仮定より $A_n \subset A_{n-1} \subset A_{n-2} \subset \cdots \subset A_2 \subset A_1$ であるから、$x \in A_1$. ゆえに $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$.

(任意の x に対して) $x \in A_1$ とすると、$n = 1$ とおいたとき、$n \in \mathbb{N}$ かつ $x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

以上より $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(3) $\{A_n\}$ は (2) の仮定を満たすので、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

一方、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0,1]$ である。

実際、

- $x \in [0,1]$ とすると、$0 \le x \le 1$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$-\frac{1}{n} < 0 \le x \le 1 < 1 + \frac{1}{n}$ であるから、$-\frac{1}{n} < x \le 1 + \frac{1}{n}$. ゆえに $x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
- 逆に $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする。定義から、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$. すなわち $-\frac{1}{n} < x \le 1+\frac{1}{n}$. $n \to \infty$ とするとき、$-\frac{1}{n} \to 0$, $1 + \frac{1}{n} \to 1$. 「$\lim a_n = A$, $\lim b_n = B$, $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n \le b_n \Rightarrow A \le B$」という定理によって、$0 \le x \le 1$. すなわち $x \in [0,1]$. ■

解説　(1) はほぼ毎回出題している問題。間違えているケースは 2 つ。(a) そもそも集合になっていない。(b) $\forall$ と $\exists$ を逆にしている。

(2) と (3) は集合の等式の証明。(2) は割と標準的な証明が有効 ($x \in A$ と仮定して $x \in B$ を示す, $x \in B$ と仮定して $x \in A$ を示す) である。それをしている人は少しミスをしていても、どんまい、次回頑張って。標準的でないことをして失敗した人はやり方を改めること。(3) は空集合で、証明は少し変則的で難しいかも (「$x \in \emptyset$ とすると」は ??)。背理法を使うのが多分簡単。 ■