2016年度 数理リテラシー 中間試験問題

2016年6月30日2限施行 (10:45〜12:05 の予定), 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.　次の各文を記号のみを用いて表せ。
(1) 「p ならば q」は、「p でないか、または q である」と同値である。　(2) -1 は自然数でないが整数であり、$\frac{1}{2}$ は整数でないが有理数であり、$\sqrt{3}$ は有理数でないが実数であり、$4i$ は実数でないが複素数である。　(3) A と B の合併集合 (和集合) が B に等しいならば、A は B に含まれる。
(4) ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、$x+y=y$ が成り立つ。(5) 空集合の補集合は X であり、X の補集合は空集合である。

2.　(1) 真理値表を用いて $\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$ を示せ。(2) 「p ならば q」の否定が「p であるが、q でない」と同値であることを示せ。「p ならば q」については、**1**(1) に記したことを用いること。

3.　(1) (a,b) を数直線上の区間、$f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ とするとき、次の条件の否定を書け 。
$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)\ (\forall x\in(a,b))\ (\forall y\in(a,b)\colon\ |x-y|<\delta)\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon$
(2) 次の各命題の真偽を述べ、真である場合は証明し、偽である場合はその否定命題を書いてそれを証明せよ。
(a) $(\exists x\in\mathbb{R})\ (\forall y\in\mathbb{R})\ x\geq y$　(b) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists y>0)\ \log y=x$　(c) $(\exists x\in\mathbb{R})\ (\forall y\in\mathbb{R})\ xy=y.$

4.　(1) 以下の言葉の定義を (2 つの集合の場合に) 式を用いて書け。
(a) 合併集合　(b) 共通部分　(c) 差集合　(d) 直積集合
(2) (a) 集合のベキ集合の定義を書け。(b) $A=\{a,b\}$ のベキ集合 B を求めよ。また B のベキ集合の要素の個数を求めよ。

5.　$A=\{x\in\mathbb{R}\mid(\forall\varepsilon>0)|x|<\varepsilon\}$ のとき、$A=\{0\}$ である。以下の証明中の $\boxed{}$ を埋めよ。

(i) $\boxed{\text{あ}}$ とすると、$x=0$. ゆえに $x\in\mathbb{R}$ かつ $|x|=0$. 後者から、任意の正数 ε に対して、$\boxed{\text{い}}$. ゆえに $x\in A$.

(ii) $x\in A$ とすると、$(\forall\varepsilon>0)\ |x|<\varepsilon$. $x=0$ を証明するため、背理法を用いる。$\boxed{\text{う}}$ と仮定すると、$|x|>0$. ゆえに $|x|<|x|$. これは矛盾であるから、$x=0$. ゆえに $\boxed{\text{え}}$.

(i), (ii) から $A=\{0\}$. ■

6.　(1) 集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の合併集合 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, 共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ の定義を書け。

(2) 集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について、次の (i), (ii) を証明せよ。
(i) 条件 $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall m\in\mathbb{N})\ n<m\Rightarrow A_n\subset A_m$ を満たすならば $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n=A_1$.
(ii) 条件 $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall m\in\mathbb{N})\ n<m\Rightarrow A_n\supset A_m$ を満たすならば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=A_1$.

(3) 次の各場合に $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ を求めよ。　(a) $A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right\}$　(b) $A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ 0<x<\frac{1}{n}\right\}$

7.　(1)〜(3) の関数 f (高校数学ルールで $f(x)$ の式だけ書いてある) について、特に断りのない場合に定義域 X は何か。また、X をそう定めたとき、値域 $f(X)$ は何か。
(1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$　(2) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$　(3) $f(x)=x-[x]$
(実数 x に対して、$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。$[1.2]=1$, $[-3.4]=-4$)

注意事項

この面を表にして配り、試験開始まで裏返さないこと。

- 筆記用具と時計以外はカバンにしまって下さい。
- 10:45 に試験を始め、12:05 に終了する予定です。もし始まりが遅れたら、その分終わりの時間もずらします。
- 問題は好きな順に解答して構いません。ただし一つの問題の解答は一ヶ所にまとめること。
- 解答用紙は裏面も使用して構いません。なるべく解答用紙 1 枚で済ませること。どうしても足りなくなった場合は試験監督に申し出ること。
- 遅刻は 11:20 まで認めます。11:30〜12:00 の間は退室可能 (手をあげて試験監督に知らせ、解答用紙を渡し、静かに荷物をまとめて退室)。

1.

(1) $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$

(2) $-1 \notin \mathbb{N} \wedge -1 \in \mathbb{Z} \wedge \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \wedge \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \wedge \sqrt{3} \in \mathbb{R} \wedge 4i \notin \mathbb{R} \wedge 4i \in \mathbb{C}$

(3) $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$

(4) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ x + y = y$

(5) $\emptyset^c = X \wedge X^c = \emptyset$

2.

(1) 真理値表は次のようになり、4 列目と 7 列目の真理値が一致するので、$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

(2) $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$ であるから、

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg\left((\neg p) \vee q\right) \equiv (\neg(\neg p)) \wedge (\neg q) \equiv p \wedge (\neg q).$$

3.

(1)

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in (a,b))(\exists y \in (a,b) : |x - y| < \delta)\, |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

(2) (a) 偽。否定命題は $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x < y$. (証明) x を任意の実数とするとき、$y = x + 1$ とおくと、$y \in \mathbb{R}$ かつ $x < x + 1 = y$ より $x < y$. ■

(b) 真。(証明) 任意の実数 x に対して、$y = e^x$ とおくと、$y > 0$ かつ $\log y = \log e^x = x$ より $\log y = x$. ■

(c) 真。(証明) $x = 1$ とおくと、$x \in \mathbb{R}$ かつ、任意の実数 y に対して、$xy = 1 \cdot y = y$ より $xy = y$. ■

4.

(1) A と B を集合とする。(a) 次式で定義される $A \cup B$ のことを A と B の和集合という。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

次式で定義される $A \cap B$ のことを A と B の共通部分という。

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

次式で定義される $A \setminus B$ のことを A と B の差集合という。

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

次式で定義される $A \times B$ のことを A と B の直積集合という。

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

(2) (a) A を集合とするとき、$2^A = \{B \mid B \subset A\}$ を A のベキ集合と呼ぶ。

(b) $B = 2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. $a \neq b$ のとき、B の要素の個数は 4 であるから、2^B の要素の個数は $2^4 = 16$. $a = b$ のとき、B の要素の個数は 2 であるから、2^B の要素の個数は $2^2 = 4$.

5. $\boxed{\quad\text{あ}\quad} = \boxed{x \in \{0\}}$ $\boxed{\quad\text{い}\quad} = \boxed{|x| < \varepsilon}$ $\boxed{\quad\text{う}\quad} = \boxed{x \neq 0}$ $\boxed{\quad\text{え}\quad} = \boxed{x \in A}$

6.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$.

(2) (i) (a) $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_n$. 特に $n = 1$ とすると、$x \in A_1$. ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$. (b) $x \in A_1$ とする。仮定から任意の自然数 m に対して、$1 < m$ ならば $A_1 \subset A_m$. ゆえに $x \in A_m$. すべての自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_m$ が成り立つので、ゆえに $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. (a), (b) より $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(ii) (a) $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、$x \in A_n$. $n = 1$ の場合は $x \in A_1$. $n > 1$ の場合は、仮定から $A_1 \supset A_n$ であるから、$x \in A_1$. (b) $x \in A_1$ とする。合併集合の定義よりゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. (a), (b) より $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(3) (a) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$. (証明) (i) $x \in \{0\}$ とするとき、任意の自然数 n に対して、$-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$. すなわち $x = 0 \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. (ii) 逆に $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、$x = 0$ である。実際、もしも $x \neq 0$ ならば、$|x| > 0$. アルキメデスの公理により、ある自然数 N が存在して、$N|x| > 1$. ゆえに $|x| > \frac{1}{N}$. 従って $x \notin A_N$. これは $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ に矛盾する。ゆえに $x = 0$. ゆえに $x \in \{0\}$. (i), (ii) から $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$. ■

(b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. (証明) 背理法を用いる。$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ とすると、$x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を満たす x が存在する。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_n$. これから $x \in \mathbb{R}$ かつ $0 < x < \frac{1}{n}$. $0 < x$ であるから、アルキメデスの公理から、$Nx > 1$ を満たす自然数 N が存在する。ゆえに $x \not\int A_N$. これは矛盾である。ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. ■

7.

(1) (最初 $f(x) = \cot x$ と書こうかと思ったが、知らない人がいると面倒なので、分数の形で書いた。) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall n \in \mathbb{Z}) x \neq n\pi\}$ あるいは $X = \mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ などでも OK. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})\}$ と書いた人もいるけれど、$x \neq n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ という条件の書き方は、この講義で約束していないので、ちょっと微妙である。$f(X) = \mathbb{R}$.

(2) 関数 $\sqrt{x}$ は、普通 $x \geq 0$ のときだけ考える。$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ で、あるから、$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 3$. ゆえに $X = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$. x がこの範囲を動くとき、$x^2 - 4x + 3$ は 0 以上のすべての実数の値を取る。ゆえに $f(X) = [0, \infty)$.

(3) $X = \mathbb{R}$. $f(x)$ は x の小数部分であり、$f(X) = [0, 1)$.