2013年度 数理リテラシー 中間試験問題

2013年6月20日2限施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.　次の各文を記号を使って表せ。(p, q は命題であり、A, B, X は集合であるとする。)
(1) 「p かつ q」の否定は、「p でないか、または q でない」である。
(2) $\sqrt{2}$ は有理数全体の集合に属さない。　(3) A と B の共通部分は空集合である。
(4) A の補集合は、X と A の差集合に等しい。　(5) f は A から B への写像である。
(6) x が A と B の和集合の要素であるためには，x が A の要素であるか、または x が B の要素であることが必要十分である。

2.　(1) $p\wedge q$, $(p\wedge q)\vee r$, $p\vee r$, $q\vee r$, $(p\vee r)\wedge(q\vee r)$ の真理値表を作り，$(p\wedge q)\vee r \equiv (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ を証明せよ。
(2) 「x が 2 より大きいならば $f(x)$ は 3 より小さい」の否定を書きなさい。ただし $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ とする。

3.　(1) (集合の) 部分集合の定義を述べよ。
(2) (集合の) ベキ集合の定義を述べよ。$A=\{a,b,c\}$ のとき，$2^A(=\mathrm{Pow}(A))$ を求めよ。
(3) (2つの集合の) 直積集合の定義を述べよ。$A=\{a,b\}$, $B=\{1,2,3\}$ のとき $A\times B$ を求めよ。

4.　任意の自然数 n に対して $A_n=\left(-\dfrac{1}{n},n\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\dfrac{1}{n}<x<n\right\}$ とおくとき、

$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ を求めよ。(結果を書くだけでなく、証明もすること。)

5.　(1) 写像 $f\colon X\to Y$ が単射であるとは、どういうことか説明せよ (定義の条件を書け)。
(2) 単射な写像の例をあげ，それが単射である根拠を述べよ。(3) 写像 $f\colon X\to Y$ と $g\colon Y\to Z$ がともに単射であるならば、$g\circ f\colon X\to Z$ も単射であることを証明せよ。

6.　$f\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ を $f(x)=\sin x$ $(x\in[-\pi,\pi])$ で定めるとき，以下の問に答えよ。
(1) f の逆写像 f^{-1} は存在しない。その理由を述べよ。
(2) $A\subset[-\pi,\pi]$, $B\subset\mathbb{R}$ に対して、$f(A)$, $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。(ただし教科書で使われている $f_*(A)$, $f^*(B)$ という記号をそれぞれ $f(A)$, $f^{-1}(B)$ と書いた。)
(3) $f\left(\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}\right)$,　$f(\{0,\pi\})$,　$f\left(\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$,　$f^{-1}\left(\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right)$,　$f^{-1}(\{2\})$,　$f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2},2\right]\right)$ を求めよ (f を含まない式で表せ)。

2013 年 7 月 18 日版

略解

1. (1) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$ (2) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (3) $A \cap B = \emptyset$ (4) $A^c = X \setminus A$ (5) $f\colon A \to B$ (6) $x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \vee x \in B$

解説

(1) 否定の記号 $\neg$ を覚えていない人が多い。まあ $\overline{p}$ でも良いが，授業で使っていない記号を使う時は断って欲しい。$\equiv$ は $\Leftrightarrow$ でも良いが、一方通行の $\Rightarrow$ は不適切である。

(2) $\mathbb{Q}$ はぜひ覚えていて下さい。$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ もよろしく。$\sqrt{2} \subset \mathbb{Q}$ と書いた人がちらほらいたが、$\in$ と $\subset$ を混同するのは罪が思い。

2. (1) 真理値表は次のようになる。

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

この 5 列目 $(p \wedge q) \vee r$ と 8 列目 $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ の真偽が一致するので、$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$.
(2) $\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg((\neg)p \vee q) \equiv p \wedge (\neg q)$ (「p ならば q」の否定は「p であるのに q でない」) であるから、

$$\neg(x > 2 \Rightarrow f(x) < 3) \equiv x > 2 \wedge (\neg f(x) < 3) \equiv x > 2 \wedge f(x) \geq 3.$$

すなわち「$x > 2$ かつ $f(x) \geq 3$」.

解説 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ などを正確に表すのに真理値表は便利である。$\Rightarrow$ の否定は、覚えても良いし、ド・モルガンの法則で計算しても良い。

(1) 分かり辛い真理値の並べ方をする人がちらほら。辞書式順序などがお勧め (普通に樹形図を書くとそうなると思うのだが、そうでない、不思議な順番の人が結構いた)。「分配律より」と書いた人がいたが、証明すべきことが分配律なのでそれはまずい。

(2) 出来が悪かったが、これは絶対にマスターしてもらいたいことである。「p ならば q」(記号は $p \Rightarrow q$) は「p でないか、または q」($\neg p \vee q$) と同値であり、その否定は「p であるのに q でない」($p \wedge \neg q$) である。実際

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv (\neg\neg p) \wedge (\neg q) \equiv p \wedge (\neg q)$$

であるから。ゆえに「$x > 2 \Rightarrow f(x) < 3$」の否定は、「$x > 2 \wedge \neg f(x) < 3$」すなわち「$x > 2 \wedge f(x) \geq 3$」である。

3.

(1) A と B を集合とするとき、A が B の部分集合であるとは、次が成り立つことをいう。

$$\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B \qquad (\text{任意の } x \text{ に対して、} x \in A \text{ ならば } x \in B).$$

(2) A を集合とするとき，A の部分集合の全体 (の集合) を A のベキ集合と呼ぶ。($\mathrm{Pow}(A)$ や 2^A などの記号で表す。)

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{のとき} \quad 2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}.$$

(3) A と B を集合とするとき、$\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ を A と B の直積集合と呼ぶ。($A \times B$ で表す。)

$$A = \{a, b\}, \quad B = \{1, 2, 3\} \quad \text{のとき} \quad A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

解説 集合に関する演算 $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \times B$, 2^A は式で定義を書くのも良い:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}, \quad A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}, \quad A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}, \quad 2^A = \{B | B \subset A\}.$$

4. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 \leq x < 1\} = [0, 1)$, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x\} = (-1, \infty)$.
(前者の証明) まず

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow& \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{1}{n} < x < n \\ \Leftrightarrow& \quad \left(\forall n \in \mathbb{N} \quad -\frac{1}{n} < x\right) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \quad x < n). \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}\ x < n$ が $x < 1$ と同値であることはすぐ分かる。$\forall n \in \mathbb{N}\ -\dfrac{1}{n} < x$ は $0 \leq x$ と同値である。実際、$\forall n \in \mathbb{N}\ -\dfrac{1}{n} < x$ であれば、$-\dfrac{1}{n} < x$ の両辺の $n \to \infty$ での極限を取って $0 \leq x$. 逆に $0 \leq x$ であれば、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$-\dfrac{1}{n} < 0 \leq x$. ゆえに

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \wedge x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0, 1).$$

ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1)$.

(後者の証明) $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とする。$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $x \in A_n$. $-\dfrac{1}{n} < x < n$ であるが、$-1 \leq -\dfrac{1}{n}$ より $-1 < x$. ゆえに $x \in X$. ゆえに $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset X$.

$x \in X$ とする。$-1 < x$ である。$x > 0$ のとき $m := [x] + 1$ とおくと $m \in \mathbb{N}$ かつ $x < m$. ゆえに $x \in A_m$. $x \leq 0$ のとき $-1 < x \leq 0$ であるから、$x \in A_1$.

いずれにしても、$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ゆえに $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

以上より $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ■

5.

(1) $f \colon X \to Y$ が単射であるとは、

$$\forall x \forall x' \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

(正確には、$\forall x \in X\ \forall x' \in X\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ と書くべきものである。後半の "$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$" は代わりに対偶 "$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$" を選んでも良い。)

(2) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ で定まる f は狭義単調増加であるから、単射である。

(3) $x, x' \in X$, $x \neq x'$ とする。$f \colon X \to Y$ は単射であるから、$f(x) \neq f(x')$. $g \colon Y \to Z$ は単射であるから、$g(f(x)) \neq g(f(x'))$. すなわち $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x')$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。

6.

(1) $0, \pi \in [-\pi, \pi]$, $0 \neq \pi$, $f(0) = f(\pi)$ であるから、f は単射でない (ゆえに当然 f は全単射でない)。ゆえに f の逆写像は存在しない。
(念のため: $x := 0$, $x' := \pi$, $X := [-\pi, \pi]$ とすると、$x, x \in X$, $x \neq x'$, $f(x) = f(x')$.)

(2) $f(A) = \{ f(x) | \, x \in A\}$, $f^{-1}(B) = \{x \in X | \, f(x) \in B\}$. (あるいは $f(A) = \{y | \exists x (x \in A \wedge y = f(x))\}$, $f^{-1}(B) = \{x | x \in X \wedge f(x) \in B\}$.)

(3)

$$f(\{\pi/2\}) = \{1\}, \quad f(\{0, \pi\}) = \{0\}, \quad f([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1],$$
$$f^{-1}(\{1/2\}) = \{\pi/6, 5\pi/6\}, \quad f^{-1}(\{2\}) = \emptyset, \quad f^{-1}([1/2, 2]) = [\pi/6, 5\pi/6].$$