数理リテラシー 第 4 回
〜 論理 (4) 〜

桂田 祐史

2024 年 5 月 8 日

目次

連絡事項&本日の内容

- 講義ノート [1] の §2
- 昨年度と比べて宿題提出率がやや低い。
- 宿題 2 で式を日本語で読むような問題は、答え方の幅が広い。でもこういう読み方をすすめたい、と言うのが強くあって、とにかく正確に真似をしてほしい。それからずれたものは間違いとは言えないけれど。

宿題について　宿題１

学年・組・番号・氏名を書いて下さい。特にプリントに書いたのでない人に書き忘れが多い。プリントに書く必要はないけれど、プリントで書かせていることは書くべき。

宿題１　プリントに基づいて解説＆講評する。

宿題２　未提出 10 人？ まだちょっと多い。
なるべく全員に出してもらいたい。解説は次週にするかも。

2 つ以上の変数を含む述語 (条件) がある。

例 4.1 (2 つの変数を含む述語)

$xy = x$ は、x と y に数を代入すると命題になる。
$x = 0$, $y = 0$ を代入すると $0 \cdot 0 = 0$ となり、真な命題である。
$x = 1$, $y = 0$ を代入すると $1 \cdot 0 = 1$ となり、偽な命題である。

2 変数 x, y を含む述語は、$p(x, y)$ のように表せる。

2.4.1 2変数の述語で1つの変数に量称記号をつける

2変数 x, y を含む述語 $p(x,y)$ に対して、

$$\forall y \quad p(x,y) \quad \text{と} \quad \exists y \quad p(x,y)$$

は、どちらも x についての述語になる。

例 4.2

(1) $$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

(2) $$(\exists y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

いずれも、x についての述語である。例えば

(1) に $x=0$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R})$	$0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(1) に $x=1$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R})$	$1 \cdot y = 1$	これは偽な命題
(2) に $x=0$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R})$	$0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(2) に $x=1$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R})$	$1 \cdot y = 1$	これは真な命題

2.4.2 2つの変数を持つ述語に2つの量称記号をつける

$(\forall y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、$(\exists y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、変数 x についての述語であるから、$\forall x$ あるいは $\exists x$ をつけて命題が出来る。

- $\forall x(\forall y\ p(x,y))$　「任意の x (に対して), 任意の y に対して $p(x,y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x,y))$　「ある x が存在して、任意の y に対して $p(x,y)$」
- $\forall x(\exists y\ p(x,y))$　「任意の x に対して, ある y が存在して $p(x,y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x,y))$　「ある x (が存在して)、ある y が存在して $p(x,y)$」

青いカッコ ( ) は省略できる。

3つ以上の変数を持つ述語に対しても同様である。

2.4.3 慣れるための練習 (1)

例 4.3

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$

「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」

これは実は真。どんな x に対しても $y = x - 1$ とすれば…証明の書き方は後述

例 4.4

$(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{N})\ x > y$

「ある実数 y が存在して、任意の自然数 x に対して $x > y$ が成り立つ。」

これも実は真。$y = -1$ とすれば…

例 4.5

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x^2 + y^2 \geq 2xy$$

「任意の実数 x, 任意の実数 y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」

「任意の実数 x, y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」

2.4.3 慣れるための練習 (2)

例 4.6 (3 変数の場合、ピタゴラス数)

3 つでも同様で

$$\exists x \exists y \exists z \quad (x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N} \land z \in \mathbb{N} \land x^2 + y^2 = z^2)$$

を次のように書く。

$$(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N}) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

「ある自然数 x, y, z が存在して $x^2 + y^2 = z^2$」

この命題は真である。$x = 3, y = 4, z = 5$ とすると条件を満たす。

2.4.4 読み方についての議論

$\exists x\ P(x)$ の読み方として、

- (a) 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」
- (b) 「$P(x)$ が成り立つような x が存在する。」

という 2 つの読み方を紹介した。

(a) よりも (b) の方が日本語としては自然かもしれないが、(a) を使うことを勧める (と言いました)。

その理由を、次のスライドで、2 つの命題

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x < y$
- $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x < y$

を題材にして説明する。

注　$\exists x\ P(x)$ を英語で読むと、"There exists x such that $P(x)$ holds." となる。関係代名詞を使って書かれた文は、後ろの節から訳す、という話を思い起こさせる。この辺は日本語と英語の違いに係るところである。

2.4.4 読み方についての議論 (続き)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

(*) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x < y$ が成立する。」
　どんな実数に対しても、それより大きい実数がある。これは真な命題である。

　読み方 (b) を使うことにすると

「任意の実数 x に対して、$x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となるであろう。これは誤解の危険がある。なぜか？
　次の命題と混同されやすいから。

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

読み方 (a) を使えば
　(**) 「ある実数 y が存在して、任意の実数 x に対して $x < y$ が成立する。」
　(どんな実数よりも大きいような (チャンピオンの？) 実数があるという意味。これは偽。)
　読み方 (b) を使うことにすると、(**) は

「任意の実数 x に対して $x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となりそうである。

私の意見
　青と水色はとても紛らわしい。読点「、」を見落とさなければ大丈夫 (区別できる) という意見もあるけれど、それは聴いただけでは分からない。

2.4.5 ∀ と ∃ 入れ替えると違ってしまう

上に出て来た

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

で分かるように、∀ と ∃ の順番が変わると、まったく異なる命題になる。

一方、2 つの連続する ∀ や、2 つの連続する ∃ を変えても、変わらない。例えば

$$(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad P(x, n)$$

と

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 0) \quad P(x, n)$$

は、述語 $P(x, n)$ が何であっても真偽は一致する。

2.4.5 ∀ と ∃ 入れ替えると違ってしまう　例

例 4.7 (じゃんけん)

3 点からなる集合 $J = \{$ ぐう, ちょき, ぱあ $\}$ に、次のような 2 項関係 $\succ$ を導入する。

$$\text{ぐう} \succ \text{ちょき}, \quad \text{ちょき} \succ \text{ぱあ}, \quad \text{ぱあ} \succ \text{ぐう}$$

これ以外の場合は、$\succ$ は不成立とする ($\not\succ$)。例えば、ぱあ $\not\succ$ ちょき, ぱあ $\not\succ$ ぱあ (要するに「じゃんけん」の勝ち負けの判定)。こうすると、

$$(\forall t \in J)(\exists k \in J) \quad k \succ t$$

(どんな手 t に対しても、その t に勝つ手 k がある) は真であるが、

$$(\exists k \in J)(\forall t \in J) \quad k \succ t$$

(どんな手 t に対しても勝ってしまう "必勝手" k がある) は偽である。 □

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の $\boxed{}$ とする」のようなことを書く。

(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。さらに「x を任意の $\boxed{}$ とする」自体を省略することもあるが…)

例 4.8

$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$

証明　x を任意の実数とする。　(とにかくこう書いてみる。)

$x > 0$ の場合 $x^2 = x \cdot x > 0$ (正の数 x の積は正)

$x = 0$ の場合 $x^2 = 0^2 = 0$

$x < 0$ の場合 $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ (正の数 $-x$ の積は正)

いずれの場合も　$x^2 \geq 0$ が成り立つ。 □

注意 (当たり前)　$\forall$ を使って書かれた命題を日本語に翻訳するときは、「すべての」と「任意の」のどちらも使えるが、証明を書くときは「任意の」一択である。「x をすべての実数とする」はおかしい。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を$\boxed{}$とおくと」あるいは「x を$\boxed{}$とすると」と書き出せばよい。

例 4.9

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$

(x を探す…実数で $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすもの …… 方程式を解くと、$(x-1)(x-2) = 0$ から $x = 1, 2$)

証明　$x = 1$ とおくと、x は実数であり、

$$x^2 - 3x + 2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

ゆえに $x^2 - 3x + 2 = 0.$ □

注　方程式の解がつねに具体的に求まるとは限らないので、上に説明した手順は実行できないかもしれない。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆3　複数の量称 $(\forall, \exists)$ がある場合は、左から順に処理する。

例 4.10

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0.$$

証明　x を任意の整数とする。($\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)
(次に $(\exists y \in \mathbb{Z}) \cdots$ を見て、y を探す。整数で、$x + y = 0$ を満たすもの。y として $y = -x$ が見つかる。そこで…)
$y = -x$ とおくと、y は整数であり、

$$x + y = x + (-x) = 0.$$

ゆえに $x + y = 0$. □

$(\forall x \cdots)$ $(\exists y \cdots)$ の証明を読んだとき、記号は x, y の順に現れる。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (3)

もう一つ例をあげる。

例 4.11

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = y.$$

$\exists x$ を見て、x を探す気持ちになる。$(\forall y \in \mathbb{Z})\ x + y = y$ を満たす x として、$x = 0$ が見つかる。そこで…

証明 $x = 0$ とおくと、x は整数であり、任意の整数 y に対して、

$$x + y = 0 + y = y.$$

ゆえに $x + y = y$. □

参考文献

[1] 桂田祐史：数理リテラシー Part I. 論理, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/literacy/logic.pdf (2013–2024).