## 多変数の微分積分学２ 練習問題　(2007年10月2日, 10月4日)

**問２**　$A := [0,1]$, $f\colon A \to \mathbf{R}$ を $f(x) = x^2$ $(x \in [0,1])$ で定める。自然数 $N$ に対して、$\Delta_N := \left\{ \dfrac{j}{N} \right\}_{j=0}^{N}$ とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) $U(f,A,\Delta_N)$, $L(f,A,\Delta_N)$ を求めよ。(2) $\displaystyle\int_A f(x)\,dx = \frac{1}{3}$ であることを (積分の定義に基づいて) 示せ。

**解**　(1) $\Delta_N$ のすべての小閉方体は

$$A_j := \left[ \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right] \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$$

であり、$\mu(A_j) = \dfrac{1}{N}$. また $f$ は明らかに単調増加であるから、

$$\sup_{x \in A_j} f(x) = f\left(\frac{j}{N}\right) = \left(\frac{j}{N}\right)^2, \quad \inf_{x \in A_j} f(x) = f\left(\frac{j-1}{N}\right) = \left(\frac{j-1}{N}\right)^2.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
U(f,A,\Delta_N) &= \sum_{j=1}^{N} \sup_{x \in A_j} f(x)\mu(A_j) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N} j^2 \\
&= \frac{1}{N^3} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6N^2}, \\
L(f,A,\Delta_N) &= \sum_{j=1}^{N} \inf_{x \in A_j} f(x)\mu(A_j) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j-1}{N}\right)^2 \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N} (j-1)^2 = \frac{1}{N^3} \sum_{j=1}^{N-1} j^2 \\
&= \frac{1}{N^3} \cdot \frac{(N-1)N\left[2(N-1)+1\right]}{6} = \frac{(N-1)(2N-1)}{6N^2}.
\end{aligned}$$

(2) $N$ 等分割の全体 $\{\Delta_N; N \in \mathbf{N}\}$ は、すべての分割 $\mathcal{P}(A)$ の部分集合であるから、

$$U(f,A) = \inf_{\Delta \in \mathcal{P}(A)} U(f,A,\Delta) \le \inf_{N \in \mathbf{N}} U(f,A,\Delta_N).$$

$$L(f,A) = \sup_{\Delta \in \mathcal{P}(A)} L(f,A,\Delta) \ge \sup_{N \in \mathbf{N}} L(f,A,\Delta_N).$$

一般に $L(f,A) \le U(f,A)$ であるから、

$$\sup_{N \in \mathbf{N}} L(f,A,\Delta_N) \le L(f,A) \le U(f,A) \le \inf_{N \in \mathbf{N}} U(f,A,\Delta_N).$$

ところが (1) から分かるように、$\displaystyle\sup_{N \in \mathbf{N}} L(f,A,\Delta_N)$ と $\displaystyle\inf_{N \in \mathbf{N}} U(f,A,\Delta_N)$ はともに $\dfrac{1}{3}$ であるから、

$$U(f,A) = L(f,A) = \frac{1}{3}.$$

これは $f$ が $A$ で積分可能で、$\displaystyle\int_A f(x)\,dx = \frac{1}{3}$ であることを示している。■

**解説**　出題の狙いは、$U(f, A, \Delta)$, $L(f, A, \Delta)$ になじんでもらうことである。記号の意味が分からないと、ここ数回の授業はわけが分からないものになる恐れがあるので。積分の議論は決して難解ではないが、記述が煩雑になる傾向がかなり強く、記号に負けないことが大事である。

余談になるが、放物線と弦の囲む範囲の面積を求めることに歴史上初めて成功したのは、有名なシュラクサイのアルキメデス (BC 287 頃〜 BC 212) である (その議論は、有名な高木貞治の『解析概論』 (岩波書店) に紹介されている)。