

# 多変数の微分積分学 2

## 第2部 (ベクトル解析)

桂田 祐史

2008年4月6日, 2016年4月修正

(<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/>)

# 目次

<b>第1章</b>	<b>ベクトル解析 — まずはベクトル場</b>	<b>3</b>
1.1	イントロ	3
1.1.1	ベクトル解析とは	3
1.1.2	記号に関する注意	4
1.1.3	ベクトル場 — その一つの必然性	4
1.2	準備: $\mathbf{R}^3$ のベクトル積	5
1.3	ベクトル場の微分演算子	10
1.3.1	ナブラ $\nabla$	10
1.3.2	勾配 (gradient)	10
1.3.3	発散 (divergence)	11
1.3.4	回転 (rotation)	11
1.3.5	ラプラシアン (Laplacian)	12
1.3.6	微分演算子の公式	13
1.3.7	参考: 物理からの例	14
<b>第2章</b>	<b>線積分</b>	<b>16</b>
2.1	復習: 曲線のいろは	16
2.2	曲線の弧長と線要素	18
2.3	(接線) 線積分の定義と基本的な性質	22
2.3.1	例	22
2.3.2	定義	24
2.3.3	線積分の性質	26
2.4	線積分とポテンシャル	30
2.4.1	ポテンシャルの定義	30
2.4.2	ポテンシャルと線積分の関係 (1)	31
2.4.3	ポテンシャルと線積分の関係 (2) ポテンシャルの存在条件	32
2.5	Green の定理	39
<b>第3章</b>	<b>曲面と面積分</b>	<b>46</b>
3.1	曲面の定義	46
3.1.1	3つの素朴な方法	46
3.1.2	正則パラメーター曲面	48
3.2	正則パラメーター曲面の曲面積と面積要素に関する面積分	52
3.2.1	定義	52
3.2.2	パラメーターの取り方によらないこと、曲面の向き	56
3.3	ベクトル場の法線面積分	60
3.4	Gauss の発散定理	65
3.5	Stokes の定理	69
	<b>参考書案内</b>	<b>71</b>

<b>付録 A 細かな補足</b>	<b>74</b>
A.1 区分的に $C^k$ 級	74
A.2 連結性	75
A.3 単連結性	76
A.4 Jordan の曲線定理	77
A.5 一般の正則曲面の定義	77
A.6 閉曲面の常識	78
<b>付録 B 単連結領域におけるポテンシャルの存在</b>	<b>80</b>
B.1 ステップ 1: 球におけるポテンシャルの存在	80
B.1.1 証明 1: 区間の「辺」からなる折れ線に沿う線積分と積分定理を利用	80
B.1.2 証明 2: 球の中心と結んだ線分に沿う線積分を利用	80
B.2 ステップ 2: 連続曲線に沿う線積分の導入	81
B.3 ステップ 3: 単連結領域におけるポテンシャルの存在	82
<b>付録 C Gauss の定理, Green の定理, Stokes の定理の補足</b>	<b>85</b>
C.1 縦線集合である領域における Green の定理	85
C.2 三方向に縦線集合である領域における Gauss の定理	87
C.3 Green の公式	89
C.4 Gauss の発散定理の物理への応用	89
C.5 Stokes の定理の証明	92
<b>付録 D misc</b>	<b>94</b>
D.1 弾性体の方程式から P 波、S 波の方程式を導く	94
<b>付録 E 歴史メモ</b>	<b>95</b>
E.1 ベクトル解析の誕生	95
E.2 Gauss の発散定理	96
E.3 Stokes の定理	96
<b>付録 F 問の解答</b>	<b>97</b>

この文書は電子版 (PDF) を

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/>

で公開してある。有効に利用してもらえれば幸いである。

この文書は、明治大学工学部数学科の 2007 年度後期の講義のための講義ノートである。T<sub>E</sub>X 組版上の問題に対処するため、久しぶりに手を入れた (2016/4)。図が 1 つ表示されなくなっていたのに気づいたので直した (2019/10/7)。

# 第1章 ベクトル解析 — まずはベクトル場

## 1.1 イントロ

### 1.1.1 ベクトル解析とは

この文書 (多変数の微分積分学2の後半) のテーマはベクトル解析である。ベクトル解析とは何だろうか? この問いかけに対しては色々な答がある。初めて学ぶ段階では理解しづらいだろうが (一通り終わった段階でもう一度ここに戻ってきて読み直してもらいたい)、いくつか紹介してみよう。

#### 1. 「ベクトル場の微積分」

これが一番安直な答だが、これだけだと中身が見えない。

#### 2. 「曲がっているもの (曲線や曲面) の上での微積分」

(a) 曲線上の積分である線積分  $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$

(b) 曲面上の積分である面積分  $\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma$

に関わる微積分である。

#### 3. 微積分の基本定理

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

の高次元化である

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (\text{Gauss の発散定理})$$

や

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{Stokes の積分定理})$$

の活躍する世界である。

歴史的には、ベクトル解析は、電磁気学<sup>1</sup>や流体力学に現れる現象を説明するために生まれた数学である (現在でも、これらの物理学を学ぶことはベクトル解析の学習に大いに役立つと思われる。また偏微分方程式の入門講義では、物理学に由来する問題が重要な例として登場するので、必然的にベクトル解析が活躍する。)。20世紀に入って高次元化され<sup>2</sup>、幾何学における基礎的な道具となって大発展した。

<sup>1</sup>ファラデー (Michael Faraday, 1791–1867, 英国) が開拓した分野をマクスウェル (James Clerk Maxwell, 1831–1879, スコットランドの Edinburgh に生まれ、英国の Cambridge に没する) が数学的にまとめ、ヘビサイド (Oliver Heaviside, 1850–1925, 英国) がベクトル解析を駆使するなどして整理した。— Maxwell と Heaviside の著作は簡単に (例えばアマゾンで) 入手できるので、百聞は一見にしかず、と言いたいところだが、大部であって読解するのはそう簡単ではない。

<sup>2</sup>微分形式の理論という、ちょっと異なる見かけになった。

### 1.1.2 記号に関する注意

- ベクトルを表すのに  $\vec{a}$  のように矢印をつけたり、 $\mathbf{a}$  のように太字にする習慣がある。この「多変数の微分積分学 2」の前半ではそれを採用しなかったが、ベクトル解析の説明では、なるべくベクトルを太字で書くことにする。
- この文書では右肩に  $T$  (transpose の頭文字) を書くことで行列やベクトルの転置を表す。数ベクトルは基本的に縦ベクトルとするが、紙幅を節約するために、横ベクトルの転置、例えば  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  のようにして表すことが多い。
- 空間の点を表す変数として  $x$  という文字が使われることが多いが、伝統的なベクトル解析の教科書では  $\mathbf{r}$  という文字がよく使われている。ここでもそれを採用することにする。なお  $\mathbf{r}$  の成分は普通の習慣通り  $x, y, z$  (あるいは  $x_1, x_2, x_3$ ) で表す。

### 1.1.3 ベクトル場 — その一つの必然性

1 変数実数値関数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  ( $I$  は  $\mathbf{R}$  の区間) の一般化としては、 $n$  変数  $m$  次元ベクトル値関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$  ( $\Omega$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合) というのがあるが、以下に説明するように  $m = n$  の場合は特に重要であるため、 $n$  次元ベクトル場 (vector field) と名づけられている。素朴な幾何学的なイメージとしては、「空間内のある範囲  $\Omega$  内のすべての点  $\mathbf{r}$  において矢印 (ベクトル  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ ) がある」とき、 $\Omega$  上のベクトル場  $\mathbf{f}$  が与えられている、ということになる。

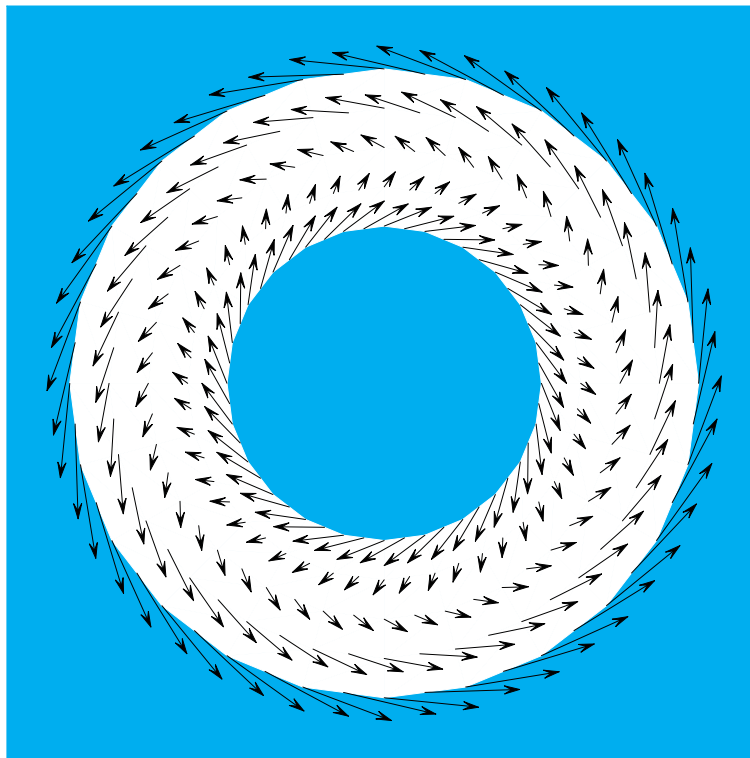


図 1.1: 円環領域内のあるベクトル場

ベクトル場がごく自然に現れるものであることを一つの例で説明しよう。 $F$  を普通の実 1 変数の実数値関数

$$F: I \rightarrow \mathbf{R} \quad (I \text{ は } \mathbf{R} \text{ の区間})$$

とするとき、導関数

$$F': I \rightarrow \mathbf{R}$$

もまた実1変数の実数値関数であるが、 $n$ 変数実数値関数

$$F: \Omega \rightarrow \mathbf{R} \quad (\Omega \text{ は } \mathbf{R}^n \text{ の開集合})$$

については、 $n \geq 2$  の場合は  $f$  の導関数に相当するものは、 $n$  変数  $n$ 次元ベクトル値関数 ( $n$ 次元ベクトル場)

$$\nabla F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$$

である ( $n$ 変数実数値関数ではない)。

多変数では、導関数は元の関数と違ったタイプ (値の空間の次元が異なる) になる  
実数値関数の微分はベクトル場である

なお、 $\Omega$  を定義域とする実数値関数

$$F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

のことを  $\Omega$  上のスカラー場 (scalar field) と呼ぶこともある。

## 1.2 準備: $\mathbf{R}^3$ のベクトル積

$\mathbf{R}^3$  の二つのベクトル

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

に対して、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  のベクトル積<sup>3</sup>とは、次式で定義される  $\mathbf{R}^3$  のベクトルのことをいう。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \left( \left| \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| \right)^T = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

これは少し覚えにくいだが、行列式に慣れていれば次のようにして覚えることができる。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix},$$

ただし

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

実際、行列式を第3列で展開すると

$$\left| \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right| \mathbf{e}_1 - \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{array} \right| \mathbf{e}_2 + \left| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right| \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ -(a_1 b_3 - b_1 a_3) \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

<sup>3</sup>しばしば外積 (outer product) とも呼ばれる。Grassmann algebra の意味での外積や、微分形式の外積 (exterior product) と混同しないように注意が必要である。

なお、第  $i$  成分には  $a_i, b_i$  が現れないこと、添字が  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$  と循環することを覚えておく  
とチェックするのに便利である。

しばしば次のような計算手順も紹介されている。

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 \\ & \textcircled{3} & \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 \end{array}$$

という表を作って、丸付きの番号のところを中心に2次の行列式を作って、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left( \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| \right)^T = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

**例 1.2.1 (ベクトル積の計算)**  $\mathbf{a} = (1, 2, 3)^T, \mathbf{b} = (4, 5, 6)^T$  とするとき、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  を計算してみよう。どちらか自分にとって分かりやすい方を覚えるとよい。

(1) (「形式的公式」の利用 — 行列式の展開に慣れている場合お勧め)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \mathbf{e}_1 \\ 2 & 5 & \mathbf{e}_2 \\ 3 & 6 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(2) 右の表から

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & \textcircled{3} & \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{array}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left( \left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{array} \right| \right)^T = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \blacksquare$$

**問 1.**  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$  を求めよ (この結果と次に紹介する線形性からも、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  の成分表示が得られる)。

**問 2.**  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  を満たさない  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の例をあげよ。

**命題 1.2.2 (ベクトル積の性質)** 以下  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  は  $\mathbf{R}^3$  の要素、 $\lambda \in \mathbf{R}$  とする。

(1)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ . 特に  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

(2)  $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}), (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ .

(3) 任意の  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$  に対して、

$$\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{x}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{x}).$$

(4)  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が1次独立  $\iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ .

(5)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  で出来る平行四辺形  $\{t\mathbf{a} + s\mathbf{b}; t \in [0, 1], s \in [0, 1]\}$  の面積を  $S$  とするとき、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}, \quad \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \geq 0, \quad \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = S.$$

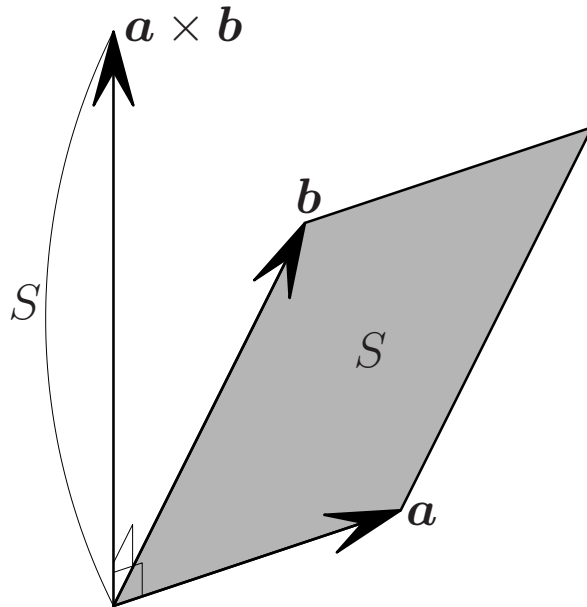


図 1.2:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  の双方に垂直で、長さは平行四辺形の面積

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は「正の向き」

証明 (1), (2) は定義式と行列式の性質から明らかである。(3) は  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  とすれば、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{x}) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \\ a_3 & b_3 & x_3 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{x}).$$

( $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  の形式的定義の  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  のところにそれぞれ  $x_1, x_2, x_3$  を代入すると  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と  $\mathbf{x}$  の内積になる。)

(4) については、(3) を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \text{ と } \mathbf{b} \text{ が 1 次独立} &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \text{ s.t. } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \text{ が 1 次独立} \\ &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \text{ s.t. } \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{x}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \mathbf{x} \text{ s.t. } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{x}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

(5) の最初の三つは (3) を使って、

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}) = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}) = 0,$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{b}) = 0,$$

$$\det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 \geq 0.$$

$S = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$  の証明は、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が 1 次従属な場合は、両辺とも 0 であるから明らかである。以下、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が 1 次独立な場合を考える。3つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  で作られる 3次元平行体 (平行六面体) の体積を  $V$  としよう。 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  が他の二つのベクトルに直交しているところから、

$$V = S\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|.$$

一方、平行体の体積の一般論から

$$V = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$



ゆえに

$$S\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2$$

となるので両辺を  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$  ( $> 0$ ) で割ることにより、

$$S = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|.$$

(5) の計算による証明  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると、 $\cos \theta = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$  であるから、

$$\begin{aligned} S &= \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin \theta = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2} \\ &= \sqrt{(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\ &= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|. \blacksquare \end{aligned}$$

3次元空間内の平らな図形  $S$  に対して、 $S$  に垂直で、長さが  $S$  の面積 (しばしば同じ  $S$  という文字で表す) に等しいベクトルを、 $S$  の面積ベクトルと呼ぶ。上の命題は、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  が  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が作る平行四辺形の面積ベクトルであることを示している。

問 3. 3次元空間内の3点  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  に対して、 $\frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a})$  は、三角形  $abc$  の面積ベクトルであることを示せ。

問 4. 3次元空間内の四面体の4つの面の面積ベクトル (ただし向きは四面体の外向きとする) の和は  $\mathbf{0}$  であることを示せ。

この講義では使わないが、「三重積の公式」は有名なので紹介がてら<sup>4</sup>、問題にしておく (解答は p. 97)。

問 5. (スカラー三重積の公式)

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) \text{ であることを示せ。}$$

問 6. (ベクトル三重積の公式, Lagrange の公式)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \text{ であることを示せ。}$$

問 7. 次の等式を証明せよ。

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad (\text{Jacobi の等式}).$$

(反可換律と Jacobi の等式を満たす代数系を Lie 代数と呼ぶ、そうである。)

問 8. (スカラー四重積の公式)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

であることを示せ。

参考 1.2.1 ( $\mathbf{R}^n$  のベクトルの外積) あまり使われないが、 $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 4$ ) のベクトルのベクトル積を紹介しよう。 $\mathbf{R}^n$  の  $n-1$  個のベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$  があつたとき

$$\mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}$$

は線形形式であるから、

$$\exists \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n \quad \text{s.t.} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \quad \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}).$$

この  $\mathbf{c}$  を  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$  のベクトル積と呼び、 $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \dots \times \mathbf{a}_{n-1}$  と書く。

<sup>4</sup>力学などで活躍するので、無駄にはならないだろう。

$n$ 次元空間では  $n-1$  個のベクトルに対してそのベクトル積が定義される。

2つのベクトルのベクトル積が定義できるのは 3次元空間だけ！

もし  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1}$  の成分が知りたい場合は、 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$  を代入すれば良い：

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \times \cdots \times \mathbf{a}_{n-1} \text{ の第 } i \text{ 成分} = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{e}_i).$$

(これはもちろん 3次元の場合の一般化になっている。) ■

**参考 1.2.2 (空間内の三角形の面積、平面の方程式への応用)** 空間の 3点  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, 1, 0)$ ,  $C(0, 2, -1)$  を頂点とする三角形  $ABC$  の面積と、それを含む平面の方程式を求めよ。

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left( \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに (三角形は平行四辺形の半分だから)

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 7^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{66}}{2}.$$

考えている平面は、 $A(1, 2, 3)$  を通り、 $(4, 7, -1)^T$  に垂直であるから、それを定義する方程式として

$$4(x-1) + 7(y-2) + (-1)(z-3) = 0$$

が取れる。整理して  $4x + 7y - z = 15$ . ■

**参考 1.2.3 (力学への応用例「中心力場での運動」)** 1変数ベクトル値関数  $\mathbf{f}(t)$ ,  $\mathbf{g}(t)$  があるとき、

$$(\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t))' = \mathbf{f}'(t) \times \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}'(t)$$

が成り立つ (各自確かめよ)。

質点の質量、時刻  $t$  での位置、働く力をそれぞれ  $m$ ,  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{f}$  とするとき、

$$m\mathbf{r}''(t) = \mathbf{f}$$

が成り立つ (Newton 力学の第二法則)。 $\mathbf{f}$  が

$$\mathbf{f} = f(\mathbf{r})\mathbf{r}$$

の形をしているとき、 $\mathbf{f}$  は中心力場 (central force) であるという。このとき、任意の 3次元ベクトル  $\mathbf{a}$  に対して  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$  であることに注意すると

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)) = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \frac{\mathbf{f}}{m} = \frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \frac{f}{m} \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$$

が分かるから

$$\frac{1}{2} \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) \equiv \text{定数ベクトル.}$$

この左辺は面積速度と呼ばれるものになっているので<sup>5</sup>、

中心力場では面積速度は一定である

ということを示している (万有引力の場合は Kepler の第二法則)。 ■

<sup>5</sup>この定数倍である  $\mathbf{r}(t) \times (m\mathbf{r}'(t))$  を  $\mathbf{0}$  のまわりの角運動量と呼ぶ。この議論は角運動量が保存される、ということにもなる。

## 1.3 ベクトル場の微分演算子

ベクトル場の微分演算子をざっと紹介する。grad, rot, div は、幾何学で学ぶ外微分形式の理論では、「外微分」という一つの演算に (あざやかに) まとめられているが、「物理的な」意味も重要であり、ここで説明する記法も習得すべきである。

grad の意味は既知のはずである (「多変数の微分積分学 1」で習った)。div, rot については、後述する積分定理で明らかになる。

### 1.3.1 ナブラ $\nabla$

$\mathbf{R}^n$  の部分集合 (大抵は開集合) で定義された関数を考えているとき、

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

という微分演算を表す形式的ベクトルを導入する。 $\nabla$  はナブラ (nabla) と呼ばれる<sup>6</sup>。なお Hamilton の微分演算子と呼ぶこともある。

### 1.3.2 勾配 (gradient)

$\mathbf{R}^n$  の開集合  $\Omega$  で定義された  $C^1$  級の関数  $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} F := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

と定義する。 $\nabla F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  であるから、 $\nabla F$  は  $\Omega$  上の  $n$  次元ベクトル場である。 $\nabla F$  を  $f$  の<sup>こうばい</sup>勾配 (gradient) ベクトル場と呼ぶ。 $\nabla F$  はしばしば  $\text{grad } F$  とも書かれる。

微分法の復習:  $\nabla F$  の幾何学的意味

$\mathbf{a} \in \Omega$  とするとき、 $\nabla F(\mathbf{a})$  は  $F$  のレベルセット (等高線あるいは等値面)

$$\{\mathbf{x} \in \Omega; F(\mathbf{x}) = h\}, \quad h := F(\mathbf{a})$$

の上にある点  $\mathbf{a}$  における法線ベクトルであり、 $F$  の値が最も速く増加する方向を表している<sup>7</sup>。

例えば 3 次元空間内の滑らかな曲面  $F(x, y, z) = 0$  上の点  $(a, b, c)$  における接平面の方程式は

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0.$$

<sup>6</sup>何でもヘブライ語 (と言っても筆者自身ピンと来ないが) の堅琴 (Nebel) が語源であるという (藤野 [22])。

<sup>7</sup>Schwarz の不等式  $|\nabla F \cdot \mathbf{h}| \leq \|\nabla F\| \|\mathbf{h}\|$  の等号成立条件「 $\mathbf{h}$  と  $\nabla F$  が 1 次従属であること」を思い出そう。

### 1.3.3 発散 (divergence)

$\mathbf{R}^n$  の開集合  $\Omega$  上の  $C^1$  級のベクトル場  $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  に対して、

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

と定義する。 $\nabla \cdot \mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  であるから、 $\nabla \cdot \mathbf{f}$  は  $\Omega$  上の実数値関数 (スカラー場) である。 $\nabla \cdot \mathbf{f}$  を  $\mathbf{f}$  の**発散 (divergence)** または**湧き出し**と呼ぶ。 $\nabla \cdot \mathbf{f}$  はしばしば  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  とも書かれる。

恒等的に  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$  を満たすベクトル場を**湧き出しなし**または**管状 (solenoidal)** という。

$\operatorname{div} \mathbf{f}$  の正確な意味は後述の Gauss の発散定理で明らかになる。

**例 1.3.1** 浅い川の水の流れの速度  $\mathbf{f}$  は 2 次元のベクトル場とみなすことができる (このように流体の速度の作るベクトル場を**速度場**と呼ぶ)。もしも雨が降ったり、川底に穴が空いていたりして水が染み込んでいったり、逆に川底から水が湧き出して来たりしなければ  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$  が成り立つ。水が染み込んで消えるようなところでは  $\operatorname{div} \mathbf{f} < 0$ , 水が湧き出して来るようなところでは  $\operatorname{div} \mathbf{f} > 0$  が成り立つ。 ■

### 1.3.4 回転 (rotation)

ここでは  $n = 3$  とする。 $\mathbf{R}^3$  のベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  については、前節で見たようにベクトル積  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  が定義できることに注意する。

$\mathbf{R}^3$  の開集合  $\Omega$  上の  $C^1$  級のベクトル場  $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して、

$$\nabla \times \mathbf{f} := \left( \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \end{array} \right| \right)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

と定義する。 $\nabla \times \mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  であるから、 $\nabla \times \mathbf{f}$  は  $\Omega$  上の 3 次元ベクトル場である。 $\nabla \times \mathbf{f}$  を  $\mathbf{f}$  の**回転 (rotation)** ベクトル場と呼ぶ。 $\nabla \times \mathbf{f}$  はしばしば  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$  あるいは  $\operatorname{curl} \mathbf{f}$  とも書かれる。既に紹介したベクトル積の行列式を用いた覚え方を用いると

$$\nabla \times \mathbf{f} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

と書くこともできる。

特に  $\mathbf{f}$  を速度場と考えるときは  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$  を**渦度 (vorticity)** と呼び、恒等的に  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$  を満たすベクトル場を**渦無し**または**非回転 (irrotational)**、**層状 (lamellar)** という。

$\operatorname{rot} \mathbf{f}$  の正確な意味は、後述の Stokes の定理で明らかになる。

**参考 1.3.1 (計算にあたってのヒント)**  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$  の第 1 成分は

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 \end{array} \right| = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$$

であるが、これが分かれば後は  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$  と番号を回して

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

が得られる。計算のチェックに利用すると良い。 ■

余談 1.3.1 (2次元ベクトル場の回転) 2次元ベクトル場  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$  について

$$\nabla \times \mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{f} := \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

と定義することもある。これは3次元ベクトル場  $\tilde{\mathbf{f}}$  が

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{r}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), 0)^T$$

のように本質的に2次元である場合に

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{f}} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3 = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^T$$

となることから来ているものであろう。

なお、スカラー場  $\psi$  に対して

$$\text{rot } \psi := \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^T$$

と定めることもある(このとき  $\psi$  をベクトル場  $\text{rot } \psi$  の流れ関数 (stream function) であるという)。

結局、3次元以外で  $\text{rot}$  が出て来たら、その話をしている人がどういう意味で用いているか、よくよく注意すべきである。■

参考 1.3.2 2次元領域内の流体の中に「羽根の付いた車」(水車小屋の水車のようなものを思い浮かべるとよい)を沈めたとき(ただし回転軸は領域を含む平面に垂直に取る)、回転の「効果」は(速度場を  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$  としたとき)

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

に比例することを「信じ込ませ」ようにする議論を時々見かける(3次元速度場の場合は、回転軸を  $x_1, x_2, x_3$  と順に考える)。きちんと議論しようとする結構難しいので、ここでは取り上げないが、暇潰しに考えてみると面白いかも知れない。■

### 1.3.5 ラプラシアン (Laplacian)

$\mathbf{R}^n$  の開集合  $\Omega$  上で定義された  $C^2$  級の関数  $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  に対して

$$\Delta F := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$$

と定義し、 $\Delta F$  を  $F$  のラプラシアン (Laplacian) と呼ぶ。

$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  をラプラス作用素 (ラプラス演算子, Laplace operator) と呼ぶ。

$\Delta F \equiv 0$  をみたす  $F$  を調和関数 (harmonic function) とよぶ。

$\mathbf{R}^n$  の開集合  $\Omega$  で定義された  $C^2$  級のベクトル場  $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  に対して

$$\Delta \mathbf{f} := (\Delta f_1, \dots, \Delta f_n)^T$$

とおき、 $\mathbf{f}$  のラプラシアンと呼ぶ。

ラプラシアンを用いて記述される重要な偏微分方程式が非常に多い(例えば、後の波動方程式、熱方程式の例を見よ)。

余談 1.3.2 (記号の話) すぐ後で示すように、 $\Delta F = \text{div}(\text{grad } F) = \nabla \cdot (\nabla F)$  であるから、 $\Delta$  を  $\nabla^2$  で表すことがある(特に工学系の本ではそうしてあることが多い)。■

### 1.3.6 微分演算子の公式

微分演算子を二つ続けると何がおこるか？次の命題は、頻繁に応用される。

**命題 1.3.2 (ベクトル場の微分演算子)**  $f$  は  $\mathbf{R}^3$  上の  $C^2$  級のベクトル場、 $F$  は  $\mathbf{R}^3$  上の  $C^2$  級のスカラー場とすると、次の (1)-(4) が成り立つ。

(1)  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} F) = \Delta F$ . いいかえると  $\nabla \cdot (\nabla F) = \Delta F$ .

(2)  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} F) = \mathbf{0}$ . いいかえると  $\nabla \times (\nabla F) = \mathbf{0}$ .

(3)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$ . いいかえると  $\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$ .

(4)  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} f) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} f) - \Delta f$ . いいかえると  $\nabla \times (\nabla \times f) = \nabla(\nabla \cdot f) - \Delta f$ .

なお、(1) は一般の次元で成立する。

**証明** (1)  $\operatorname{div} f$  の定義式

$$\operatorname{div} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}$$

に

$$f = \operatorname{grad} F = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^T$$

を代入すると、

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} F) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} f_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} = \Delta F.$$

(2)  $\operatorname{rot} f$  の定義式

$$\operatorname{rot} f = \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)^T$$

に

$$f = \operatorname{grad} F = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^T$$

を代入すると、

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

$F$  が  $C^2$  級であるから、 $F$  の 2 階導関数は偏微分の順序にはよらない。ゆえに

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} F) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

(3), (4) の証明は各自の演習とする (ぜひとも自分の手で計算して確かめてみる)。■

(4) の応用としては、以下に述べる例 1.3.3 が有名である。

問 9. 上の命題 1.3.2 を証明せよ。

問 10. 1 階の微分作用素 grad, div, rot を 2 回続ける操作は、上の命題で取り上げた公式で尽されることを確かめよ。

問 11. 任意の  $C^1$  級ベクトル場  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  に対して

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{u})$$

が成り立つことを示せ。

問 12.  $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  のとき、grad  $F$ ,  $\Delta F$  を求めよ (実はとても有名かつ重要な例)。

問 13. 任意の 3 次元の中心力場  $\mathbf{f}$  は  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{0}$  を満たすことを示せ ( $\mathbf{f}$  が中心力場とは、ある 1 変数実数値関数  $F$  を用いて、 $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})\mathbf{r}$ , すなわち  $\mathbf{f}(x, y, z) = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  と書ける、ということである)。

### 1.3.7 参考: 物理からの例

数学を深く理解するためには、その良い応用例を学ぶことが非常に役に立つ。その意味で (遠回りのように思えるかも知れないが) 電磁気学や流体力学における例を物理学のテキストで学ぶことを強く奨めたい<sup>8</sup>。

以下いくつか手短に紹介する。

例 1.3.3 (Maxwell の方程式 (1873), 電磁波の予言) 真空中では、電場  $\mathbf{E}$ , 磁束密度  $\mathbf{B}$ , 電荷密度  $\rho$ , 電流密度  $\mathbf{j}$  はマクスウェルの方程式

$$(1.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

を満たす<sup>9</sup> ( $c$  は光速,  $\varepsilon_0$  は真空の誘電率<sup>10</sup>である)。

特に電荷、電流密度が存在しない ( $\rho \equiv 0, \mathbf{j} \equiv \mathbf{0}$ ) とき、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

であるから、命題 1.3.2 の (4) を使って、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (-\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \Delta \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \Delta \mathbf{E} - \mathbf{0} \\ &= \Delta \mathbf{E}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \nabla \times (c^2 \nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \Delta \mathbf{B} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \Delta \mathbf{B} - \mathbf{0} \\ &= \Delta \mathbf{B}. \end{aligned}$$

<sup>8</sup>立場の違いはあれ、空間概念を突き詰めて考えている点では、現代でも数学と物理学は近い関係を持っているはずである。

<sup>9</sup>Maxwell の著作を見ても、この微分方程式は見当たらない。はじめてこの微分方程式の形に書き下したのは Heaviside である。

<sup>10</sup>ちなみに、MKS 単位系では、 $c = 299792458 \text{ m/s}$  (メートルの定義による),  $\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \doteq 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ .

すなわち  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  ともに速さ  $c$  の波動方程式 (wave equation) を満たす。Maxwell (James Clerk Maxwell, 1831–1879) はこの事実を知って、真空中を伝播する電磁波の存在を予言した (1864 年)。それに従い 1887 年、Hertz (Heinrich Rudolph Hertz, 1857–1894) が実験で発生と検知に成功した。その伝播速度が光速とよく一致することから、光も一種の電磁波と予想された (光の電磁波説)。もちろん現在では、光や電波が電磁波であることは常識である。 ■

問 14.  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$  が等方弾性体の弾性波の方程式

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u})$$

を満たすとき (ここで  $\rho, \mu, \lambda$  は正定数)、 $p := \text{div} \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s} := \text{rot} \mathbf{u}$  はそれぞれ

$$\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta p \quad (\text{P 波の方程式}),$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{s} \quad (\text{S 波の方程式})$$

を満たすことを示せ。— P 波 (primary wave) は S 波 (secondary wave) より速い。

(解答は p. 94) ■

後述する Gauss の発散定理の物理への応用が非常に多い。その例を付録 C.4 に収録しておく。



## 第2章 線積分

### 2.1 復習: 曲線のいろは

曲線について、以下の線積分の議論に必要な事項を説明する。

曲線の定義として、いわゆるパラメーター曲線を採用する<sup>1</sup>。

$\Omega$  を  $\mathbf{R}^n$  の部分集合とするとき、 $\mathbf{R}$  の有界閉区間を定義域とする、 $\Omega$  への連続写像を  $\Omega$  内の**曲線** (curve) と呼ぶ (すなわち  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  のような連続写像)。粗く言うと「曲線とは1変数の連続なベクトル値関数」である。

曲線には、 $C$  や  $\gamma$ ,  $\Gamma$  などの文字で名前をつけることが多い。以下、 $\varphi$  の定める曲線を  $C$  と呼ぶことにする。

図形ではなく、写像として曲線を定義していることに注意しよう。 $\varphi$  の像  $\varphi([\alpha, \beta])$  のことを、曲線  $C$  の**像** (image) または**跡** (spur) と呼ぶ。

$\varphi(\alpha)$  を曲線  $C$  の**始点**、 $\varphi(\beta)$  を曲線  $C$  の**終点**、両方あわせて曲線  $C$  の**端点**とよぶ。始点と終点一致 ( $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ ) するとき、曲線  $C$  は**閉曲線** (closed curve) であるという。

曲線が自分自身と交わらないとき (ただし始点と終点一致するのは交わると考えない)、その曲線は**Jordan 曲線** (Jordan curve) または**単純曲線**であるという。

写像  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$  が  $C^m$  級であるとは、各  $\varphi_j$  が  $C^m$  級であることをいう ( $m \in \mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$ )。このとき曲線  $C$  は  $C^m$  級であるという。

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi''(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1''(t) \\ \vdots \\ \varphi_n''(t) \end{pmatrix},$$
$$\varphi^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(j)}(t) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(j)}(t) \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1, \dots, m)$$

のように  $\varphi$  の微分係数、導関数を表す。

$\varphi'(t) \neq \mathbf{0}$  であるとき、 $\varphi'(t)$  は  $\varphi(t)$  における曲線の接線の方向を表すベクトルである。到るところ  $\varphi'(t) \neq \mathbf{0}$  であるとき、曲線は**正則**であるという。正則な  $C^1$  級曲線の像は滑らかである (接線の方向が連続的に変化するのだ)。

**例 2.1.1** 正定数  $a, b$  に対して、 $\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t)^T$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ) は  $C^\infty$  級の正則なジョルダン閉曲線であり、この像は方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

<sup>1</sup>パラメーターづけ (すなわち写像) そのものを曲線の定義とするのは、少し無駄がある。それは後で出て来る「線積分の値は曲線の (向きを変えない) パラメーターづけによらない」という定理からも明らかである。一方で純粋に図形 (点集合) としての曲線では、線積分を考えるのに不十分である。例えば「 $(1, 0)^T$  を始点として、原点を中心とする単位円上を、反時計回りに1周する曲線を  $C$  とする」という言明の中には、単に原点を中心とする単位円というだけでは済まない情報が含まれている。

で定められる楕円である。点  $(a \cos t, b \sin t)$  における接線の方向は、ベクトル

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

で求まる。 $\cos, \sin$  は、同時に 0 にならないので、 $\varphi' \neq \mathbf{0}$ 。ゆえに正則である。■

曲線を  $C^m$  級 ( $m \geq 1$ ) のものに限るとやや不便である。区分的に  $C^m$  級という概念を導入しよう。曲線  $C$  が区分的に  $C^m$  級であるとは、

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_\ell = \beta$$

を満たす  $\{t_j\}_{j=0}^\ell$  が存在して、各小区間  $[t_{j-1}, t_j]$  に  $\varphi$  を制限した写像  $\varphi|_{[t_{j-1}, t_j]}$  が  $C^m$  級になることを言う。要するに、各  $t_j$  では、片側微分係数  $\varphi^{(k)}(t_j - 0), \varphi^{(k)}(t_j + 0)$  が存在することのみを要請していて、 $\varphi^{(k)}(t_j)$  が存在しなくても構わない。この曲線が正則であるとは、各区間  $[t_{j-1}, t_j]$  に制限した曲線が正則であることをいう。

一般に正則な  $C^1$  級曲線の像は「なめらか」である(接線の方向が連続的に変化する)。正則でなかったり、正則であっても区分的に  $C^1$  級でしかなかった場合は、曲線の像が「とがる」こともある(逆にいうと多角形の周のようなとがった図形を曲線とするには、正則性をはずすか、「区分的に」という限定を入れるかする必要がある)。

**例 2.1.2**  $\mathbf{R}^2$  で 4 点  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$  を頂点とする正方形の周は、区分的に  $C^\infty$  級の正則なジョルダン閉曲線

$$\varphi(t) := \begin{cases} (t, 0)^T & (t \in [0, 1]) \\ (1, t-1)^T & (t \in [1, 2]) \\ (3-t, 1)^T & (t \in [2, 3]) \\ (0, 4-t)^T & (t \in [3, 4]) \end{cases}$$

の像である。これは正方形を反時計回りに一周する。■

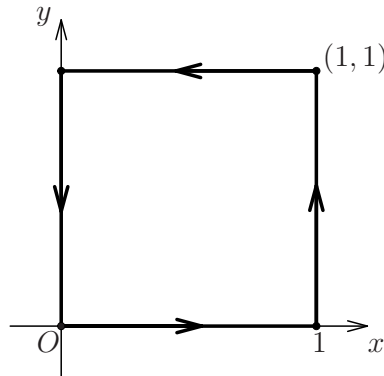


図 2.1: 正方形の周を反時計回りに一周する

$[-\beta, -\alpha] \ni t \mapsto \varphi(-t)$  も  $\mathbf{R}^n$  内の曲線であるが、これを  $C$  を逆向きにした曲線とよび、 $-C$  で表す。曲線  $C_1: \mathbf{r} = \varphi_1(t)$  ( $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ ) の終点と曲線  $C_2: \mathbf{r} = \varphi_2(t)$  ( $t \in [\alpha_2, \beta_2]$ ) の始点が一致するとき、

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & (t \in [\alpha_1, \beta_1]) \\ \varphi_2(\alpha_2 + (t - \beta_1)) & (t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2]) \end{cases}$$

で  $\mathbf{R}^n$  内の曲線が得られる。これを  $C_1$  に  $C_2$  をつないだ曲線とよび、 $C_1 + C_2$  で表す。

$C_1$  の終点と  $C_2$  の始点が一致していない場合にも形式的な和  $C_1 + C_2$  を考えることがある。

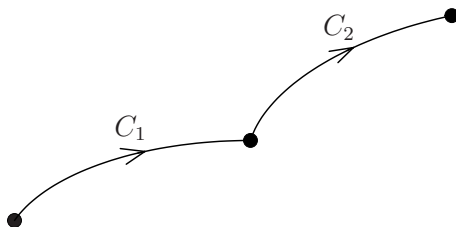


図 2.2:  $C_1$  の終点 =  $C_2$  の始点ならば  $C_1 + C_2$  が作れる

## 2.2 曲線の弧長と線要素

最初にこの節の要点 (線要素に関する線積分と曲線の長さの定義) を述べる。それさえ理解しておけば、次の節に進んで構わない。

**定義 2.2.1 (線要素に関する線積分、曲線の長さ)**  $C: \mathbf{r} = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) を  $\mathbf{R}^n$  内の区分的に  $C^1$  級の曲線、 $f$  を  $C$  の像の上で定義された連続関数とするとき、

$$\int_C f ds := \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt$$

を  $f$  の曲線  $C$  上の、線要素に関する線積分 (line integral, path integral) と呼ぶ<sup>a</sup>。

特に  $f \equiv 1$  の場合の

$$(2.1) \quad \int_C ds = \int_\alpha^\beta \|\varphi'(t)\| dt$$

を曲線  $C$  の長さ (弧長) と呼ぶ。

また

$$ds := \|\varphi'(t)\| dt$$

とおき、これを曲線  $C$  の線要素 (弧長要素, line element) と呼ぶ。

<sup>a</sup> $C$  が閉曲線である場合、contour integral と呼び、 $\oint$  という記号で書かれることもある。

### 物理的解釈

- $\int_C f ds$  は、何かあるものが曲線  $C$  上に線密度  $f$  で分布しているときの、曲線  $C$  全体での総量を表している (線密度とは、単位長さあたりの量のことである)。
- $\varphi(t)$  を質点の時刻  $t$  での位置を表すものと解釈すれば、 $\varphi'(t)$  は質点の速度、 $\|\varphi'(t)\|$  は質点の速さを表すことになり、(2.1) は「速さを時間で積分すると<sup>みちのり</sup>道程になる」と読むことができる。

曲線の弧長が (2.1) で与えられることは、平面曲線の場合には高校数学でも学んでいる。

### 高校の数学の教科書に載っている「公式」

(1)  $x = f(t), y = g(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) という媒介変数表示で与えられる曲線の長さは

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

(2) 関数  $y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) のグラフである曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

(2) は (1) の特別な場合であり、これを任意次元に一般化したものが上の定義になっていることが分かる。

そもそも、なぜこのような式 (2.1) で定義するかについては、次の「一般的な弧長の定義」が参考になるであろう。

### 曲線の長さの一般的な定義

定義域である区間  $[\alpha, \beta]$  の任意の分割  $\Delta = \{t_j\}_{j=0}^N$  に対して、

$$L_{\Delta} := \sum_{j=1}^N \|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\|,$$

さらに

$$L := \sup\{L_{\Delta}; \Delta \text{ は } [\alpha, \beta] \text{ の分割}\}$$

とおく。  $L < \infty$  のときに曲線  $C$  は長さを持つ (rectifiable) といい、  $L$  を  $C$  の長さという。  $\varphi$  が区分的に  $C^1$  級の場合は (2.1) が成立する。これは

$$\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) = \varphi'(t_{j-1})(t_j - t_{j-1}) + o(|t_j - t_{j-1}|),$$

$$\|\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})\| = \|\varphi'(t_{j-1})\| (t_j - t_{j-1}) + o(|t_j - t_{j-1}|)$$

に気が付けば簡単に証明できる。

この「多変数の微分積分学 2」では、(2.1) が実用上十分一般的と考えられるので、これを曲線の長さの定義に採用する。

**例 2.2.2 (サイクロイド (cycloid) の弧長)**  $a$  を正定数とするとき、曲線  $\varphi(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))^T$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ) の長さを求めよ。

(解)  $\varphi'(t) = (a(1 - \cos t), a \sin t)$  であるから、

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

ゆえに弧長は

$$\int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a. \blacksquare$$

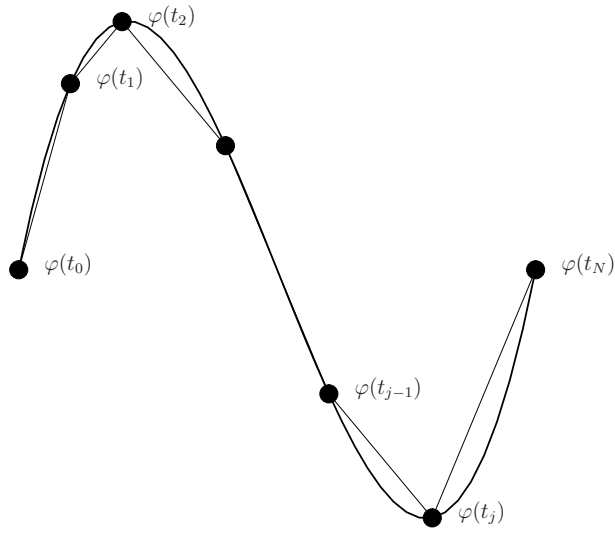


図 2.3: 折れ線の長さ  $L_{\Delta}$  の上限が曲線の長さ

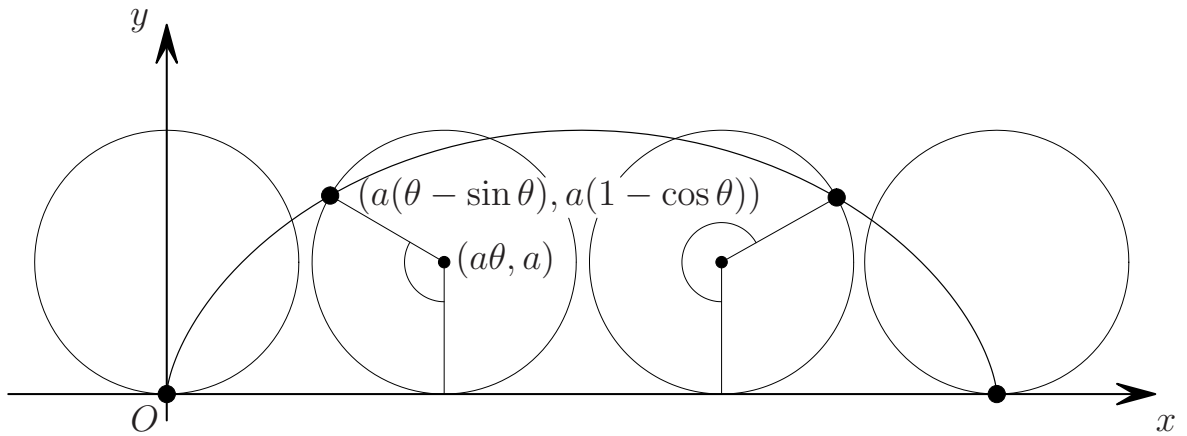


図 2.4: サイクロイド  $(x, y) = (a(\theta - \sin \theta), a(1 - \cos \theta))$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ )

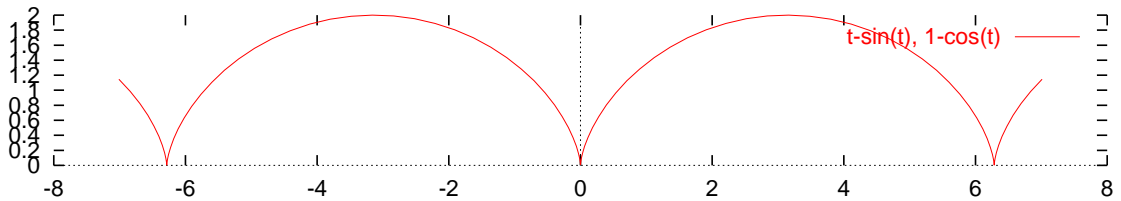


図 2.5: サイクロイド  $(x, y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$  (gnuplot による)

```
set parametric;set size ratio -1;plot [-8:8] t-sin(t),1-cos(t)
```

例 2.2.3 (極形式で表される曲線の弧長) 極座標によって  $r = f(\theta)$  ( $\theta \in [a, b]$ ) と表されている曲線は、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\theta) \cos \theta \\ f(\theta) \sin \theta \end{pmatrix}$$

というパラメーター表示を持つので、その弧長は

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_a^b \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2} d\theta.$$

例えば  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) のときは、

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin \theta)^2 + (a(1 + \cos \theta))^2} d\theta = \dots = 2 \int_0^\pi 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a. \blacksquare$$

余談 2.2.1 曲線の長さの定義式に現れる積分は、 $\sqrt{\quad}$  があるため、計算が難しいことが多い。例えば最も単純と思われる放物線の長さの計算も、意外と難しい(高校数学で解けないこともないが、あまり見かけない問題である)。実は初等関数で表現することが不可能な場合も多い。有名なのは楕円の弧長の計算で、 $\sqrt{\quad}$  の中が3次または4次の多項式である、いわゆる楕円積分 (elliptic integral) が出現する。楕円積分の逆関数である楕円関数 (elliptic function) を研究する楕円関数論は19世紀に花開いた数学理論である。余談の余談になるが、弧長の計算というと、サイクロイドが定番なのは、学習者に馴染みが薄い曲線ではあるものの、計算がとても簡単だ、という理由が大きいのではないかと考えている。■

問 15. 放物線  $y = x^2$  ( $x \in [0, 1]$ ) の長さを求めよ<sup>2</sup>。

(結果は  $(2\sqrt{5} + \sinh^{-1} 2) / 4 = [2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})] / 4 = 1.47894285754 \dots$ )

問 16.  $a, b$  を正定数とするとき、楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  の長さを積分で表せ。

なお、線要素に関する線積分はパラメーターづけによらないことが証明できる(後でベクトル場の接線線積分のところでも似たことを証明するので、それを参考にするとよい)。

余談 2.2.2 (弧長パラメーターと  $\int f ds$  という記号を使う気持ち) 簡単のため、曲線  $C: \mathbf{r} = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) は  $C^1$  級であるとする(区分的  $C^1$  級の場合にもほぼ同様の議論ができるが、議論がやや面倒になる)。

任意の  $t \in [\alpha, \beta]$  に対して、曲線  $C$  の  $\alpha$  から  $t$  までの部分の長さは

$$\sigma(t) := \int_\alpha^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau.$$

これを文字  $s$  を用いて表す(根強い)習慣がある:

$$s = \sigma(t) = \int_\alpha^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau.$$

これから任意の  $t \in [\alpha, \beta]$  において

$$\frac{ds}{dt} = \sigma'(t) = \|\varphi'(t)\|.$$

これから  $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$  は、 $C^1$  級の関数であることが分かる。

曲線  $C$  は正則、すなわち任意の  $t \in [\alpha, \beta]$  に対して  $\varphi'(t) \neq 0$  と仮定しよう。すると

$$\sigma'(t) > 0 \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

<sup>2</sup> $\sqrt{2}$  次式の積分は大学1年次に既習済みである。

ゆえに  $\sigma: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, L]$  は狭義単調増加で、逆関数  $t = \sigma^{-1}(s)$  が存在し、それも  $C^1$  級となる。 $\psi := \varphi \circ \sigma^{-1}$ , つまり  $\psi(s) := \varphi(\sigma^{-1}(s))$  ( $s \in [0, L]$ ) とおくと、これも  $C^1$  級の正則曲線を与える。それを  $\tilde{C}$  と書こう。 $\tilde{C}$  の像は  $C$  の像に等しく、(後で説明する) 向きも  $C$  のそれに等しい (従って線積分を考える場合に、 $C$  と  $\tilde{C}$  には差がない)。 $\mathbf{r} = \psi(s)$  ( $s \in [0, L]$ ) を曲線  $C$  の弧長パラメータ  $s$  によるパラメータづけと呼ぶ。

この  $\psi$  では、

$$(2.2) \quad \|\psi'(s)\| = 1 \quad (s \in [0, L])$$

が成り立つことに注意しよう。質点の運動で解釈すると、つねに速さ 1 で運動するということである。したがって “時間 = 道程” が成り立つ。また (2.2) から、

$$\int_{\tilde{C}} f \, ds = \int_0^L f(\psi(s)) \, ds$$

が得られる (左辺の  $ds$  と右辺の  $ds$  は別物である)。どうして左辺のような記号を使うかの「気持ち」がよく現れている式となっている。■

## 2.3 (接線) 線積分の定義と基本的な性質

伝統的なベクトル解析でもっとも活躍する線積分は、ベクトル場  $\mathbf{f}$  の曲線  $C$  上の接線線積分

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

である。この講義では単に線積分と言ったら、この線積分のことを指す。

これは現代の幾何学においては、1 次微分形式

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

の曲線  $C$  上での線積分

$$\int_C \omega = \int_C f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

として表現されることが多い。形式的になってしまうが、暗記術としては

$$d\mathbf{r} = (dx_1, \dots, dx_n)^T$$

とみなすのがよい。すると

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \int_C f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

となってつじつまがあう (?)。

### 2.3.1 例

(少々乱暴かもしれないが定義の前に例を紹介する。)

## 物理からの例 (力の場がする仕事)

方向と大きさが一定の力 (大きさを  $f$  とする) で、その力の方向に物体を距離  $r$  だけ移動させるとき、その力がした仕事  $W$  は

$$W = fr$$

となるのであった。

一定の力  $f$  を作用させて、物体をまっすぐ  $r$  だけ移動させたとき、その力のした仕事は

$$W = \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}.$$

力の場  $\mathbf{f}$  が与えられているとき、曲線  $C$  に沿って物体を動かした場合、その力がした仕事  $W$  は近似的に

$$W \approx \sum_{j=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{r}_{j-1}) \cdot \Delta \mathbf{r}_j, \quad \Delta \mathbf{r}_j := \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}.$$

ただし  $\mathbf{r}_j$  は、 $[\alpha, \beta]$  の十分細かい分割  $\Delta = \{t_j\}_{j=0}^N$  に対して  $\mathbf{r}_j = \varphi(t_j)$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ) で定義される。そこで

$$W = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} := \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{r}_i$$

とみなすことができる。曲線  $C$  が区分的に  $C^1$  級である場合には、容易に

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

に等しいことが示せる。■

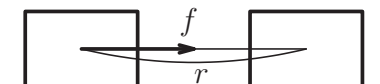


図 2.6:  $W = fr$

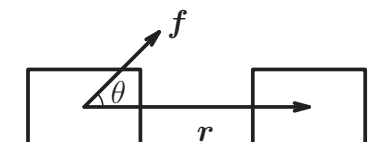


図 2.7:  $W = \|\mathbf{f}\| \cos \theta \times \|\mathbf{r}\| = \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}$

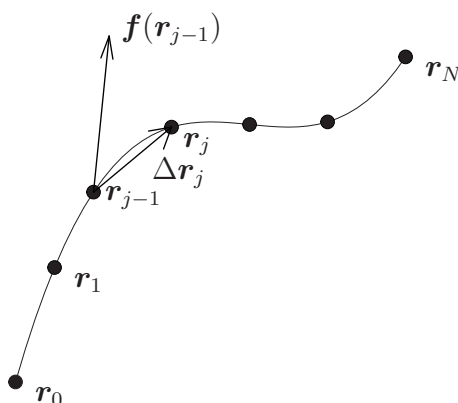


図 2.8: 仕事は、狭い範囲では  $\mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{r}$  で近似できる



## 複素関数論からの例

$\Omega$  を複素平面  $\mathbf{C}$  の開集合で、 $C$  を  $\Omega$  内の長さを持つ曲線とすると、連続関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$  の曲線  $C$  上の線積分 (複素線積分) を

$$\int_C f(z) dz = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

(ただし  $[\alpha, \beta]$  の分割  $\Delta = \{t_j\}_{j=1}^N$  に対して、 $z_j = \varphi(t_j)$  とおいた。)

のように定義するのであった。

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(z) \quad (x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z)$$

と実部虚部に分解すると

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + i dy) = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$$

となって、この線積分が、ここで扱っているベクトル場の接線線積分の特別な場合であることがわかる。

■

### 2.3.2 定義

**定義 2.3.1 (ベクトル場の接線線積分)**  $\mathbf{R}^n$  内の区分的  $C^1$  級曲線  $C: \mathbf{r} = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) と、 $C$  の像  $C^*$  の上で定義されている連続ベクトル場  $\mathbf{f}: C^* \rightarrow \mathbf{R}^n$  に対して、

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} := \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

とおき、これをベクトル場  $\mathbf{f}$  の曲線  $C$  上の (接線) 線積分と呼ぶ。

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$  のとき、これを

$$\int_C f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$$

とも表す。

**例 2.3.2**  $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z \\ z + x \\ x + y \end{pmatrix}$ ,  $C: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$  ( $t \in [0, 1]$ ) とするとき、 $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  を求めよ。

(解)  $\varphi(t) := (t, t^2, t^3)^T$  とおく。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\varphi(t)) &= \mathbf{f}(t, t^2, t^3) = (t^2 + t^3, t^3 + t, t + t^2)^T, \\ \varphi'(t) &= (1, 2t, 3t^2)^T \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) &= (t^2 + t^3) \cdot 1 + (t^3 + t) \cdot 2t + (t + t^2) \cdot 3t^2 \\ &= t^2 + t^3 + 2t^4 + 2t^2 + 3t^3 + 3t^4 = 3t^2 + 4t^3 + 5t^4. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (3t^2 + 4t^3 + 5t^4) dt = 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{5} = 3. \blacksquare$$

**例 2.3.3**  $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $C: \mathbf{r} = \varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  ( $t \in [0, \pi]$ ) とするとき、  
 $\int_C P dx + Q dy$  を求めよ。  
 (解)

$$P(\varphi(t)) = P(\cos t, \sin t) = \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = -\sin t,$$

$$Q(\varphi(t)) = Q(\cos t, \sin t) = \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos t,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

であるから、

$$P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} = -\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t = 1.$$

ゆえに

$$\int_C P dx + Q dy = \int_0^\pi 1 dt = \pi. \blacksquare$$

**参考 2.3.1 (記号の色々な流儀 — 他の本を読むときのために)** 外微分形式を用いた表現とは対照的に、ベクトル解析のベクトル場を用いた記法には、数多くの流儀がある<sup>3</sup>。ここでは線積分を表す記号をいくつか紹介する。

$d\mathbf{r}$  の代わりに  $ds$  あるいは  $dx$  を用いて

$$\int_C \mathbf{f} \cdot ds, \quad \int_C \mathbf{f} \cdot dx$$

と書いたり、**単位接ベクトル**  $\mathbf{t} := \frac{1}{\|\varphi'(t)\|} \varphi'(t)$  を導入して線要素  $ds$  に関する線積分

$$\int_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds$$

で表したり<sup>4</sup>、内積の記号を変えて

$$\int_C (\mathbf{f}, d\mathbf{r}), \quad \int_C (\mathbf{f} | d\mathbf{r}), \quad \int_C \langle \mathbf{f} | d\mathbf{r} \rangle$$

のように書いたり、とにかく (あきれるくらい) 色々な記法がある。■

**注意 2.3.4 (覚えるのは大変?)** 線積分が 3 つ出来てきたが、計算法については

$$\int_C \mathbf{f} ds = \int_\alpha^\beta \mathbf{f}(\varphi(t)) \frac{ds}{dt} dt, \quad \frac{ds}{dt} = \|\varphi'(t)\|,$$

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \varphi'(t),$$

$$\int_C P dx + Q dy = \int_\alpha^\beta \left[ P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt \quad (n=2 \text{ の場合})$$

<sup>3</sup>筆者自身は、少なくとも線積分に関しては、微分形式を用いた記法の方が混乱がなくて明らかに優れていると思う (趣味の問題かもしれないが)。

<sup>4</sup> $\int_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds = \int_\alpha^\beta \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} \|\varphi'(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ . この記法は、面積分の  $\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  と並べると座りが良い感じがして魅力的である。

であり、いずれも  $\int_C$  を  $\int_\alpha^\beta$  に置き換え、

$$d\bigcirc \text{ を } \frac{d\bigcirc}{dt} dt$$

にするだけであるから、覚えるのに困難はないであろう。1 番目と他の 2 つは別物であるが<sup>5</sup>、2 番目と 3 番目は見掛けが異なるだけで、本質的には同じものである。■

### 2.3.3 線積分の性質

次の命題は本質的に複素関数論の線積分で学んだはずである (証明も同じである)。

**命題 2.3.5 (ベクトル場の接線線積分の性質)** (乱暴だが仮定は省略する。曲線は区分的に  $C^1$  級、ベクトル場は連続くらい。)

$$(1) \int_C (\mathbf{f} + \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}.$$

$$(2) \int_C (\lambda \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{r} = \lambda \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

$$(3) \int_{C_1+C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

$$(4) \int_{-C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

$$(5) \left| \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \right| \leq \int_C \|\mathbf{f}\| ds.$$

**証明** いずれも定義に戻って考えれば簡単である。(1), (2) については通常の積分の線形性から明らかである。

(3) は、

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$

から得られる。

(4) については、曲線  $C$  が  $\mathbf{r} = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) であるとして、 $-C$  は  $\mathbf{r} = \varphi(-t)$  ( $t \in [-\beta, -\alpha]$ ) で与えられるので、

$$\int_{-C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\beta}^{-\alpha} \mathbf{f}(\varphi(-t)) \cdot \frac{d}{dt}(\varphi(-t)) dt = - \int_{-\beta}^{-\alpha} \mathbf{f}(\varphi(-t)) \cdot \varphi'(-t) dt.$$

$t = -u$  ( $u \in [\alpha, \beta]$ ) とおくと、 $dt = -du$ ,  $t = -\beta$  のとき  $u = \beta$ ,  $t = -\alpha$  のとき  $u = \alpha$  であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-C} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{\beta}^{\alpha} \mathbf{f}(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) (-1) du = \int_{\beta}^{\alpha} \mathbf{f}(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du = - \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>少し上に述べたように、単位接線ベクトル  $\mathbf{t}$  を導入すると、接線線積分は弧長要素に関する線積分で表現できるので、1 番目と他の 2 つが全く関係ないとは言い切れない。しかし、区別して考えた方が分かりやすいと思われるので、ここでは「別物」と言い切ってしまうことにした。

(5) については、Schwarz の不等式より、

$$|\mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)| \leq \|\mathbf{f}(\varphi(t))\| \|\varphi'(t)\|$$

が得られることから明らかである。■

**注意 2.3.6** 弧長要素に関する線積分  $\int_C f ds$  についても、ほぼ同様のことが成り立つが、(5) だけは

$$\int_{-C} f ds = \int_C f ds$$

となる。つまり弧長要素に関する線積分は向きによらない。この事実の解釈を二つ示そう。

(a) (物理的な解釈) 弧長要素に関する線積分  $\int_C f ds$  は、例えば線密度  $f$  を知って曲線全体での総質量を求める計算と解釈できる。この場合、どちらの端から測り始めても質量は当然同じである。一方、ベクトル場の接線線積分  $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  は、例えば力の場  $\mathbf{f}$  のする仕事と解釈できる。この場合、行きと帰り (例えば登りと下り) で仕事の符号が逆 ( $-1$  倍) になるのは明らかであろう。

(b) 少し上で述べたように、曲線の単位接線ベクトル

$$\mathbf{t} := \frac{1}{\|\varphi'(t)\|} \varphi'(t)$$

を導入すると、

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} ds$$

と、スカラー関数  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{t}$  の弧長要素に関する線積分として表すことができる。 $C$  を逆向きの曲線  $-C$  で取り替えると、 $\mathbf{t}$  が  $-\mathbf{t}$  に置き換わることは明らかであるから、線積分の値も  $-1$  倍されることが分かる。■

「ベクトル場の接線線積分の値は曲線の向きを保つパラメーターづけによらない」と言われる事実がある。まずは簡単な例で説明しよう。

**例 2.3.7**  $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$ ,  $C_1: \mathbf{r} = \varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^{3/2} \end{pmatrix}$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $C_2: \mathbf{r} = \psi(u) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$  ( $u \in [0, 1]$ )

とするとき、 $\int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ ,  $\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  を求めよ。

(解)  $\mathbf{f}(\varphi(t)) = \mathbf{f}(t, t^{3/2}) = \begin{pmatrix} t^{3/2} \\ t^2 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}t^{1/2} \end{pmatrix}$  であるから、

$$\mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = t^{3/2} \cdot 1 + t^2 \cdot \frac{3}{2}t^{1/2} = t^{3/2} + \frac{3}{2}t^{5/2}.$$

ゆえに

$$\int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left( t^{3/2} + \frac{3}{2}t^{5/2} \right) dt = \left[ \frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{2}t^{7/2} \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}.$$

一方、 $\mathbf{f}(\psi(u)) = \mathbf{f}(u^2, u^3) = \begin{pmatrix} u^3 \\ (u^2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^3 \\ u^4 \end{pmatrix}$ ,  $\psi'(u) = \begin{pmatrix} 2u \\ 3u^2 \end{pmatrix}$  であるから、

$$\mathbf{f}(\psi(u)) \cdot \psi'(u) = u^3 \cdot 2u + u^4 \cdot 3u^2 = 2u^4 + 3u^6.$$

ゆえに

$$\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (2u^4 + 3u^6) du = \left[ \frac{2}{5}u^5 + \frac{3}{7}u^7 \right]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}. \quad (\text{解答終り})$$

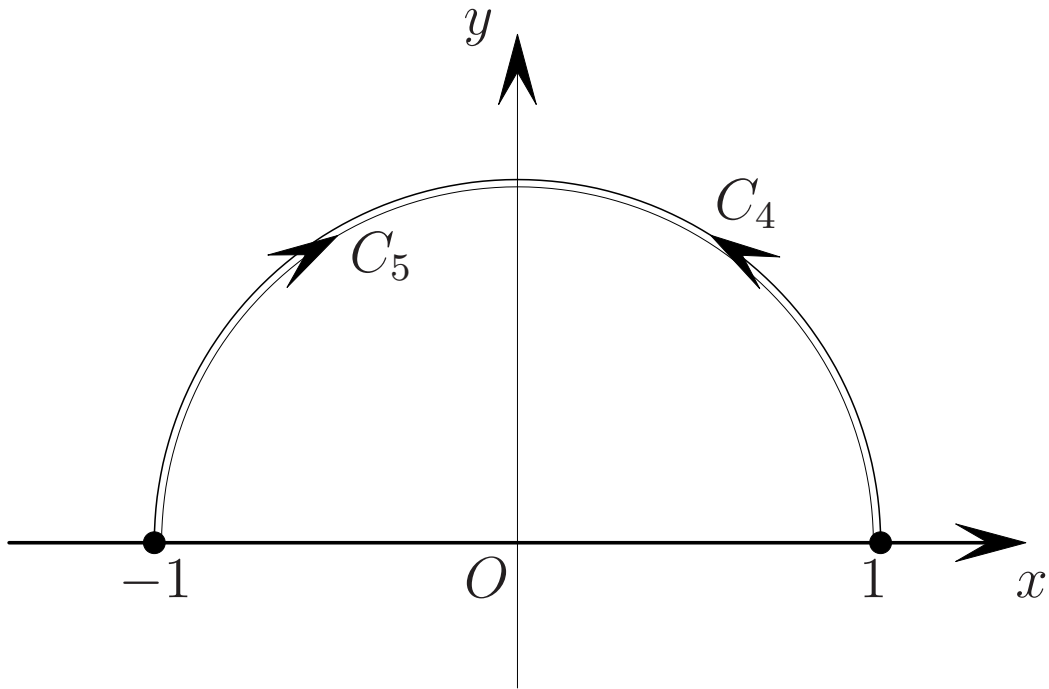


図 2.9:  $C_5 = -C_4$  (逆向きの曲線)

例 2.3.8 次の 5 つの平面曲線を考えよう。

$$\begin{aligned}
 C_1: \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (t \in [0, \pi]) \\
 C_2: \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 1]) \\
 C_3: \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \cos(\pi t^2) \\ \sin(\pi t^2) \end{pmatrix} \quad (t \in [0, 1]) \\
 C_4: \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad (t \in [-1, 1]) \\
 C_5: \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad (t \in [-1, 1])
 \end{aligned}$$

いずれの曲線も像は同じで、単位円  $x^2 + y^2 = 1$  の上半分 ( $y \geq 0$  の部分) の円弧である。  $C_1, C_2, C_3, C_4$  はいずれも、円弧の上を反時計回りに  $(1, 0)$  から  $(-1, 0)$  まで「移動する」曲線である。一方  $C_5$  だけは円弧の上を時計回りに  $(-1, 0)$  から  $(1, 0)$  まで移動する曲線である。実際  $C_5 = -C_4$  であり、  $C_5$  は  $C_4$  の逆向きの曲線である。この円弧上で連続なベクトル値関数  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$  に対して、

$$\int_{C_j} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

が成り立つ (上の例と同様に置換積分を用いて証明できる)。一方で  $C_5 = -C_4$  であるから、

$$\int_{C_5} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_4} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}. \blacksquare$$

**定理 2.3.9** (線積分は (向きを変えない) 曲線のパラメータづけによらない)  $f$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合  $\Omega$  上のベクトル場で、 $C: \mathbf{r} = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) は  $\Omega$  内の区分的  $C^1$  級曲線とする。 $\eta: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  を  $C^1$  級の単調増加関数とするととき、

$$\psi(\tau) := \varphi(\eta(\tau)) \quad (\tau \in [a, b])$$

で定まる曲線を  $\tilde{C}$  とすると、

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\tilde{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

**証明** 合成関数の微分法より  $\psi'(\tau) = \varphi'(\eta(\tau))\eta'(\tau)$  となることから<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{f}(\psi(\tau)) \cdot \psi'(\tau) d\tau \\ &= \int_a^b \mathbf{f}(\varphi(\eta(\tau))) \cdot \varphi'(\eta(\tau))\eta'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

ここで  $t = \eta(\tau)$  と変数変換すると ( $\alpha = \eta(a)$ ,  $\beta = \eta(b)$  に注意して)

$$\int_{\tilde{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}. \blacksquare$$

(曲線を  $C^1$  級正則 Jordan 曲線に限れば、 $\psi$  と  $\varphi$  の像が一致することから、 $\psi = \varphi \circ \eta$  を満たす  $C^1$  級の単調関数  $\eta$  の存在が示せる。)

ここに到って、線積分を考える場合の曲線を指定するためには、具体的なパラメータづけ (写像) は必ずしも要らないことが分かる。例えば上の例では「単位円  $x^2 + y^2 = 1$  の上半分 ( $y \geq 0$ ) の円弧を、反時計回りに移動する曲線」と言えばよい。次の例の曲線も、この事実を使って指定してある。

**例 2.3.10**  $\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix}$ ,  $C: (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$  を順に結んでできる折れ線と

するとき、 $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  を求めよ。

(解)  $(0, 0, 0)$  から  $(1, 0, 0)$  にいたる線分を  $\gamma_1$ ,  $(1, 0, 0)$  から  $(1, 1, 0)$  にいたる線分を  $\gamma_2$ ,  $(1, 1, 0)$  から  $(1, 1, 1)$  にいたる線分を  $\gamma_3$  とおくと、 $C = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$  となる。ゆえに

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

$\gamma_1$  は  $\varphi(t) = (t, 0, 0)^T$  ( $t \in [0, 1]$ ) とパラメータづけできる。 $\mathbf{f}(\varphi(t)) = (0, t, t)^T$ ,  $\varphi'(t) = (1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$  であるから、 $\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ 。

$\gamma_2$  は  $\varphi(t) = (1, t, 0)^T$  ( $t \in [0, 1]$ ) とパラメータづけできる。 $\mathbf{f}(\varphi(t)) = (t, 1, 1+t)^T$ ,  $\varphi'(t) = (0, 1, 0)^T$ ,  $\mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1$  であるから、 $\int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 1$ 。

$\gamma_3$  は  $\varphi(t) = (1, 1, t)^T$  ( $t \in [0, 1]$ ) とパラメータづけできる。 $\mathbf{f}(\varphi(t)) = (1+t, t+1, 2)^T$ ,  $\varphi'(t) = (0, 0, 1)^T$ ,  $\mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 2$  であるから、 $\int_{\gamma_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 2$ 。

ゆえに  $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0 + 1 + 2 = 3$ . ■

<sup>6</sup>むしろ  $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  のように書いた方が分かりやすいかもしれない。

## 2.4 線積分とポテンシャル

高校数学で習った積分 (1 次元の世界  $\mathbf{R}$  での積分) では原始関数が大活躍した。ベクトル場の接線線積分でそれに相当するものはポテンシャル<sup>7</sup>と呼ばれる。ポテンシャルはいつも存在するとは限らないが、存在するときは原始関数と同様のことが成り立つ。

ポテンシャルがいつ存在するか、存在するときはどうやって求められるかが山場である。

### 2.4.1 ポテンシャルの定義

$\Omega$  を  $\mathbf{R}^n$  の開集合、 $F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を  $C^1$  級の関数とすると、 $F$  の「導関数」は (実数値関数ではなく)  $F$  の勾配ベクトル場  $\nabla F: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  である。これは実数値関数ではないので

多変数の場合、実数値関数の原始関数は考えられない!

ということになる。多変数の場合に 1 変数関数の原始関数に相当するのは、次に定義するベクトル場のポテンシャルということになる (これはおいおい納得できるであろう)。

**定義 2.4.1**  $\mathbf{R}^n$  の開集合  $\Omega$  上で定義された連続なベクトル場  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  に対して、

$$\nabla F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \Omega)$$

をみたす  $C^1$  級の関数  $F$  が存在するとき、 $F$  をベクトル場  $f$  のポテンシャル (potential) と呼ぶ。

**余談 2.4.1 (外微分形式の言葉では)** 1 次外微分形式  $\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$  に対して、 $\omega = dF := \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n$  となる関数  $F$  を  $\omega$  のポテンシャルとよぶ。ポテンシャルの存在する  $\omega$  を完全 (exact) であるという ■

**例 2.4.2 (一様な重力場のポテンシャル)**

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (g \text{ は定数})$$

とすると

$$F(x_1, x_2, x_3) := -gx_3$$

は  $\nabla F = f$  を満たす。つまり  $F$  は  $f$  のポテンシャルである。 ■

**例 2.4.3 (一つの恒星の作る重力場のポテンシャル)**

$$f(\mathbf{r}) := -\frac{GM}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \quad (M, G \text{ は定数}, \mathbf{r} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\})$$

とすると

$$F(\mathbf{r}) := \frac{GM}{\|\mathbf{r}\|}$$

は  $f$  のポテンシャルである。 ■

<sup>7</sup>これは物理学用語のポテンシャル・エネルギーに由来する。この概念を初めて導入したのは Lagrange (1773) であるが、この言葉を初めて使ったのは Green (1828) であるという。

問 17. 例 2.4.3 を確かめよ。

参考 2.4.1 (ポテンシャル — 物理学の用語法) 物理学では、力の場  $f$  に対して

$$-\nabla V = f$$

となるような関数  $V$  が存在するとき、 $f$  は**保存力** (conservative force) であるといい、 $V$  を  $f$  の**ポテンシャル・エネルギー**と呼ぶ。これは上で定義したポテンシャルと符号のみ異なっているわけである。上の二つの例は物理学で良く知られた例である。■

(最初に予告したように) 実は

**ポテンシャルとは、多変数版原始関数である。**

このことを説明するために、原始関数について復習しよう。

### 1 変数関数の原始関数

$\mathbf{R}$  の区間  $I$  で定義された実数値連続関数  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、 $F' = f$  を満たす関数 (必然的に  $C^1$  級となる)  $F$  を、 $f$  の原始関数と呼ぶのであった。

$F$  が  $f$  の原始関数であるとき、任意の定数  $C$  に対して、 $\tilde{F}(x) := F(x) + C$  で  $\tilde{F}$  を定めるとき、 $\tilde{F}$  も  $f$  の原始関数となる。

$f: I \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられているとき、次の (1), (2) が成り立つ (微分積分学の基本定理)。

(1)  $F$  が  $f$  の原始関数であれば、任意の  $a, b \in I$  に対して

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

(2) 任意の  $a \in I$  を固定して、

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (x \in I)$$

で  $F$  を定めるとき、 $F$  は  $f$  の原始関数になる。(これから任意の連続関数は原始関数を持つことが分かる。1 変数関数の場合には当たり前なので、強調されることがなかったと思うが、多変数の場合には以下に見るように大きな問題として浮上する。)

$F$  が  $f$  のポテンシャルであるとき、任意の定数  $C$  に対して、

$$\tilde{F}(x) := F(x) + C \quad (x \in \Omega)$$

で定めた関数  $\tilde{F}$  は、やはり  $f$  のポテンシャルとなる。

### 2.4.2 ポテンシャルと線積分の関係 (1)

前項で説明した原始関数の性質 (1), (2) が、ポテンシャルではどうなるか追求する。

まず (1) は (ポテンシャルの存在を仮定すれば) 大丈夫である。

**命題 2.4.4 (ポテンシャルが存在すれば、線積分はポテンシャルで書ける)**  $\Omega$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  が連続なベクトル場、 $F$  は  $f$  のポテンシャルであるとするとき、 $\Omega$  内の任意の区分的  $C^1$  級曲線  $C$  に対して、

$$\int_C f \cdot dr = F(b) - F(a) \quad (a, b \text{ はそれぞれ } C \text{ の始点、終点})$$



**証明** 曲線  $C$  のパラメータづけを  $\mathbf{r} = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) とすると、

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{i=1}^n f_i(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(t)) \varphi'_i(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) dt = [F(\varphi(t))]_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a}). \blacksquare \end{aligned}$$

ところが、原始関数とは異なり、ポテンシャルはつねに存在するとは限らない。それを見るために次の命題を紹介しよう。

**命題 2.4.5 (ポテンシャル存在のための必要条件)**  $\Omega$  は  $\mathbf{R}^n$  の開集合、 $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  が  $C^1$  級のベクトル場で、ポテンシャルを持つならば、

$$(2.3) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。

この条件は  $n = 3$  の場合は、 $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$  と同値である。また  $n = 2$  の場合は、 $\text{rot } \mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$  と同値である。

**証明**  $\mathbf{f}$  のポテンシャル  $F$  が存在したとする。定義から

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

である。 $\mathbf{f}$  が  $C^1$  級という仮定から、 $F$  は  $C^2$  級である。

$C^2$  級の関数の 2 階導関数については、偏微分の順序交換ができるので、

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \blacksquare$$

$n = 3$  の場合は、任意の  $C^2$  級関数  $F$  に対して  $\text{rot}(\text{grad } F) = \mathbf{0}$  が成り立つことを命題 1.3.2 で証明済みであるから、それからも分かる (多くの本にはこのことが書いてある)。

**系 2.4.6**  $n \geq 2$  の場合、ポテンシャルはいつも存在するとは限らない。

**証明** (2.3) が成り立たないベクトル場を見つければよい。

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1$$

となり、(2.3) が成り立たない。■

### 2.4.3 ポテンシャルと線積分の関係 (2) ポテンシャルの存在条件

原始関数の性質 (2) に相当するものとして、次の非常に印象的な定理が得られる。

**定理 2.4.7**  $\mathbf{R}^n$  の領域 (連結開集合)  $\Omega$  と  $\Omega$  上の連続なベクトル場  $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  に対して、 $\mathbf{f}$  のポテンシャルが存在するためには、 $\Omega$  内の任意の区分的  $C^1$  級閉曲線  $C$  に対して、

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が成り立つことが必要十分である。このとき任意に選んだ  $\mathbf{a} \in \Omega$  に対して、

$$F(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \quad (\mathbf{x} \in \Omega),$$

( $C_{\mathbf{x}}$  は  $\Omega$  内の区分的  $C^1$  級曲線で、始点が  $\mathbf{a}$ 、終点が  $\mathbf{x}$  であるもの)

とおくと、 $F$  は  $\mathbf{f}$  のポテンシャルとなる。

**証明** (必要性)  $\mathbf{f}$  のポテンシャル  $F$  が存在すると仮定する。閉曲線  $C$  のパラメータ付けを  $\mathbf{r} = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) とするとき、 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$  に注意すると、

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = 0.$$

(十分性)  $\Omega$  内の任意の区分的  $C^1$  級閉曲線  $C$  に対して  $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$  が成り立つと仮定する。 $\Omega$  内の任意の点  $\mathbf{a}$  を取って固定し、 $\Omega$  内の各点  $\mathbf{x}$  に対して、 $\mathbf{a}, \mathbf{x}$  をそれぞれ始点、終点とする、 $\Omega$  内の区分的に  $C^1$  級の曲線  $C_{\mathbf{x}}$  を取り<sup>8</sup>、

$$F(\mathbf{x}) := \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

とおく。

仮定から  $F(\mathbf{x})$  は  $C_{\mathbf{x}}$  の取り方によらずに定まる (いわゆる well-defined)。実際  $C_{\mathbf{x}}$  と  $\tilde{C}_{\mathbf{x}}$  をともに  $\mathbf{a}$  を始点、 $\mathbf{x}$  を終点とする  $\Omega$  内の区分的  $C^1$  級曲線とすると、 $C_{\mathbf{x}} + (-\tilde{C}_{\mathbf{x}})$  は  $\Omega$  内の閉曲線になるので、仮定から  $\int_{C_{\mathbf{x}} + (-\tilde{C}_{\mathbf{x}})} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ 。これから  $\int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\tilde{C}_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  が得られる。

任意の  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して、 $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$  となることを示す<sup>9</sup>。曲線  $\gamma_h$  を  $\varphi(t) := \mathbf{x} + t\mathbf{h}e_i$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) で定めると、これは  $\mathbf{x}$  を始点、 $\mathbf{x} + \mathbf{h}e_i$  を終点とする線分である。 $C_{\mathbf{x} + \mathbf{h}e_i}$  として、 $C_{\mathbf{x}} + \gamma_h$  が取れる。 $\varphi'(t) = \mathbf{h}e_i$ 、 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_i = f_i$  であるから、

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} + \mathbf{h}e_i) - F(\mathbf{x}) &= \int_{C_{\mathbf{x} + \gamma_h}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_h} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^1 \mathbf{f}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot \mathbf{h}e_i dt \\ &= h \int_0^1 f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \dots, x_n) dt \end{aligned}$$

<sup>8</sup>命題 A.2.1(p.75) を見よ。

<sup>9</sup>授業などでは  $n = 2$  の場合に、積分路を図示して、 $\frac{\partial F}{\partial x}(p, q) = f_1(p, q)$  を示すとよい。 $\exists \varepsilon > 0$  s.t.  $B((p, q); \varepsilon) \subset \Omega$ 。 $\mathbf{x} \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  なる任意の  $\mathbf{x} = (x, q)$  に対して、 $C_{\mathbf{x}}$  として、まず  $\mathbf{a}$  から  $(p, q)$  まで到り、それから  $x$  軸に平行な有向線分で  $(x, q)$  に到る曲線を採用すると、 $F(x, q) = F(p, q) + \int_p^x f_1(t, q) dt$  となる。ここまですべてに説明して納得してもらえれば、 $\frac{\partial F}{\partial x}(x, q) = f_1(x, q)$  は明らかである (結局 1 変数関数の原始関数の性質 (2) に帰着しているわけである)。

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{F(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - F(\mathbf{x})}{h} &= \int_0^1 f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + th, x_{i+1}, \dots, x_n) dt \\ &\rightarrow \int_0^1 f_i(\mathbf{x}) dt = f_i(\mathbf{x}) \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

これは  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$  を示している。ゆえに  $\nabla F = \mathbf{f}$  で、 $F$  は  $\mathbf{f}$  のポテンシャルである。■

この定理は示唆に富み、面白いが、与えられたベクトル場  $\mathbf{f}$  がポテンシャルを持つことを示すには使いつらい<sup>10</sup>。

前節で  $\mathbf{R}^n$  の領域におけるベクトル場  $\mathbf{f}$  がポテンシャルを持つには

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

が必要であることを示したが、実は定義域の領域に「穴」がなければこれは十分条件である。実際、次の定理が成り立つ。

**定理 2.4.8 (単連結領域では渦無しベクトル場はポテンシャルを持つ)**  $\Omega$  が  $\mathbf{R}^n$  の単連結領域、 $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  が  $C^1$  級のベクトル場で、

$$(2.4) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

をみたすとき、 $\mathbf{f}$  のポテンシャルが存在する。特に  $n = 3$  の場合、(2.4) は  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$  と同値である。また  $n = 2$  の場合も (あまり一般的な記号ではないが)  $\text{rot } \mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$  と同値である。

この定理の証明は、付録 B で与えることにするが、一つの証明のあらすじを与えておく。

**証明のあらすじ**  $\Omega$  全体で  $\partial f_i / \partial x_j = \partial f_j / \partial x_i$  が成り立つと仮定すると、任意の曲線  $C$  を連続的に変形させたとき、 $\mathbf{f}$  の  $C$  にそっての線積分の値は変わらないことが示せる。単連結性の仮定から、任意の閉曲線は定数曲線 (像が 1 点) に連続的に変形できるので、閉曲線上の線積分の値は 0 である。ゆえに  $\mathbf{f}$  のポテンシャルが存在する。■

順序が逆になったが、単連結性の定義は次のようなものである。

**定義 2.4.9 (単連結 (の定義もどき))**  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^n$  の領域 (連結開集合) とする。 $\Omega$  が単連結 (simply connected) であるとは、 $\Omega$  内の任意の閉曲線が定数閉曲線に  $\Omega$  内で連続可変であることを言う。

(本当は「連続可変」の定義を述べていないので、このままでは定義とは言いかねる。詳しくは付録の定義 A.3.1 (p.76) を見よ。)

**例 2.4.10 (単連結な領域、単連結でない領域)** 単連結な領域の例として、全空間  $\mathbf{R}^n$ 、開球  $B(a; R)$ 、凸領域<sup>11</sup>、星型領域<sup>12</sup>、3次元空間での 1 点の補集合  $\mathbf{R}^3 \setminus \{a\}$ 、平面から半直線を除いた領域例えば  $\mathbf{R}^2 \setminus$

<sup>10</sup>ポテンシャルが存在しないことを示すには、 $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$  をみたす閉曲線  $C$  を一つでも見つければよいので、まあまあ実際的である (後の例 2.4.13 を参照せよ)。一方、ポテンシャルが存在するかどうか調べるために、とにかく  $F(\mathbf{x})$  を (線積分で) 計算して、 $\nabla F = \mathbf{f}$  が成り立つことをチェックするという手もなくはない (しかし長い計算のうちで一つのミスも許されないの、あまり勧められる方法ではない)。

<sup>11</sup> $\Omega$  が凸とは、 $\Omega$  内の任意の 2 点を端点とする線分が  $\Omega$  に含まれること ( $\forall a \in \Omega, \forall b \in \Omega, \forall t \in [0, 1] (1-t)a + tb \in \Omega$ ) をいう。

<sup>12</sup> $\Omega$  が星型 (star-like, star-shaped) とは、 $\exists p \in \Omega, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, 1] (1-t)p + tx \in \Omega$  が成り立つことをいう。

$\{(x, 0); x \leq 0\}$  などがある。また  $\mathbf{R}^2$  内の任意の Jordan 閉曲線の囲む領域 (いわゆる Jordan 領域) は、単連結領域である。

単連結でない領域の例としては、2次元空間での1点の補集合  $\mathbf{R}^2 \setminus \{a\}$ , 2次元空間内の円環領域  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid r_1^2 < (x - a)^2 + (y - b)^2 < r_2^2\}$ ,  $\mathbf{R}^3 \setminus \ell$  ( $\ell$  は両方向に無限にのびた直線)、輪環面の内部 (ドーナツ型の領域) などがある。■

直観的には、 $\Omega$  が単連結とは、 $\Omega$  の中に閉曲線が外せなくなるような障害物が存在しないということである。

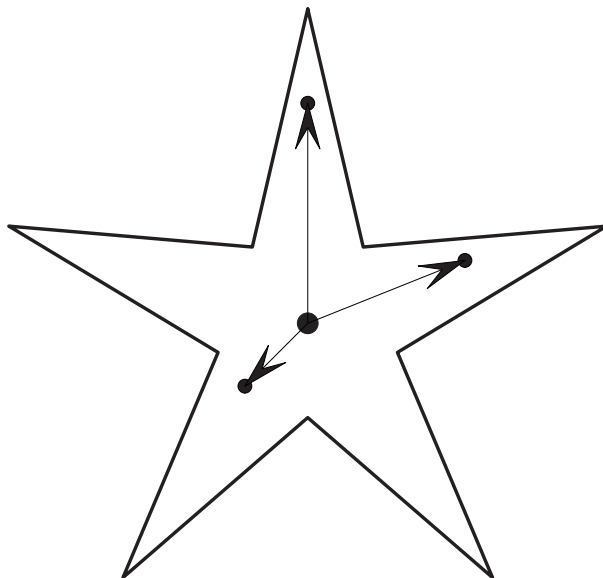


図 2.10: 星の形は星型領域: ある1点からすべての点が見えるから

**余談 2.4.2 (Poincaré の定理とどっちが強い)** (幾何学で微分形式を学んでから復習する人に) 定理の条件 (2.4) は、1次微分形式

$$\omega := f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

が閉形式 (closed form,  $d\omega = 0$  を満たすこと) であることを意味しているので、定理は「単連結領域では、任意の1次閉微分形式は完全である」と書き換えられる。Poincaré の定理「星型領域<sup>13</sup>では、任意の次数の閉微分形式は完全である」は有名であるが<sup>14</sup>、星型ならば単連結であり逆は真でないから、ベクトル場のポテンシャルの存在については (1次微分形式については) 上の定理の方が (仮定の条件が弱いだけ) 強いわけである<sup>15</sup>。Poincaré の定理の売りは、任意次数の微分形式について「閉  $\implies$  完全」が言えるところであろう。■

**例 2.4.11 (ポテンシャルの計算)**  $\mathbf{R}^3$  上のベクトル場  $f(\mathbf{r}) = (y + z, z + x, x + y)^T$  はポテンシャルを持つことを示し、実際にポテンシャルを求めよ。

<sup>13</sup>Poincaré の定理では、条件をもう少し一般化して、可縮な領域としてあることも多い。可縮な領域は単連結領域であり、逆は真でないので、やはり上の定理の方が強い。

<sup>14</sup>Jules Henri Poincaré (1854–1912, フランスの Nancy に生まれ、Paris にて没する) は 19 世紀から 20 世紀にかけて活躍した (D. Hilbert と双璧をなす) 大数学者である。

<sup>15</sup>ときどき定理 2.4.8 に言及せず、Poincaré の定理しか書いていない数学書がある。筆者は学生時代、この余談に書いたことを悟るまで、ずいぶんと落ち着かない気分させられた覚えがある。

ベクトル場  $\mathbf{f}$  の定義域  $\mathbf{R}^3$  は単連結領域で、

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{f} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & f_1 & \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & f_2 & \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & f_3 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(x+y) - \frac{\partial}{\partial z}(z+x) \\ \frac{\partial}{\partial z}(y+z) - \frac{\partial}{\partial x}(x+y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(z+x) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

が成り立つので、 $\mathbf{f}$  はポテンシャルを持つ。原点から  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$  に向かう線分  $C_{\mathbf{x}}$  は

$$\varphi(t) = (tx, ty, tz)^T \quad (t \in [0, 1])$$

とパラメータづけができる。このとき

$$\mathbf{f}(\varphi(t)) = \mathbf{f}(tx, ty, tz) = \begin{pmatrix} t(y+z) \\ t(z+x) \\ t(x+y) \end{pmatrix}, \quad \varphi'(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

であるから、ポテンシャルとして

$$\begin{aligned}F(\mathbf{x}) &:= \int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} ty+tz \\ tz+tx \\ tx+ty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t [x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)] dt \\ &= xy + yz + zx\end{aligned}$$

が得られる。 $\nabla F = \mathbf{f}$  を満たすことを確かめるのはやさしい(でもサボらずにやること)。■

**参考 2.4.2 (静電場はポテンシャルを持つ)** 電場  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  は、Maxwell の方程式 (1.1) を満たすが、時間変化のない場合、時間微分の項が消えて、

$$(2.5) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}$$

となる。元々は  $\mathbf{E}$  と  $\mathbf{B}$  の連立方程式であったものが、分離していることに注意しよう。 $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$  であるから、 $\mathbf{E}$  はポテンシャルを持つことが分かる。その1つを  $-\phi$  とおくと、

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}(-\phi).$$

これを Maxwell の方程式 (2.5) の第1式に代入して

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(-\phi)) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

すなわち

$$(2.6) \quad -\Delta \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

$\phi$  のことを静電ポテンシャルまたは静電位と呼び、(2.6) を Poisson 方程式 (Poisson equation) と呼ぶ。すなわち、静電ポテンシャルは Poisson 方程式の解である。— 以上の説明は、良く見かけるものであるが、少し雑なところがある。出て来る関数の定義域や滑らかさにきちんと言及していない。点電荷などを扱うためには、議論を超関数の範囲で正当化する必要があるだろう(残念ながら筆者は不勉強で目にしたことがない)。■

**例 2.4.12 (有名なポテンシャルを線積分で頑張って計算)**  $\mathbf{R}^3$  から原点を除いた集合  $\Omega$  上のベクトル場  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)^T$$

について考える。簡単な計算で  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$  であることが分かる。 $\Omega$  は単連結領域であるから  $\mathbf{f}$  はポテンシャルを持つ。このベクトル場は物理学ではよく現れるもので<sup>16</sup>、 $F(x, y, z) := -1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  がポテンシャルであることも常識と言ってよい。ところでこれを線積分で求めるには<sup>17</sup>、少々工夫が必要である。以下にその工夫の一つを示す。

まず  $\mathbf{p} = (p, 0, 0)^T$  を始点、 $\mathbf{q} = (q, 0, 0)^T$  を終点とする有向線分を  $C$  とするとき (ただし  $pq > 0$  — これは  $C$  が原点を含まないということ)、

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

となることは簡単な計算でわかる ( $\int_p^q \frac{x}{x^3} dx$  を計算する)。

次に原点を中心とする任意の球面上の任意の  $C^1$  級曲線  $\gamma$  に対して、

$$\int_\gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

であることも分かる。実際、 $\gamma$  のパラメータづけを  $\varphi(t)$  ( $t \in I$ ) とすると、 $\|\varphi(t)\|^2 = r^2$  ( $r$  は球面の半径) であるから、微分して  $\varphi(t) \cdot \varphi'(t) = 0$  が得られる。これから  $\mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$  ( $t \in I$ ) が得られるので、 $\int_\gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_I \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = 0$ 。

定点  $\mathbf{e} := (1, 0, 0)^T$  と任意の点  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3$  を結ぶ曲線  $C_{\mathbf{x}}$  として、 $\mathbf{e}$  を始点、 $(q, 0, 0)^T$  (ただし  $q := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) を終点とする有向線分  $\Gamma_q$  と、 $(q, 0, 0)$  と  $\mathbf{x}$  を結ぶ原点を中心とする半径  $q$  の球面上の曲線  $\gamma_{q, \mathbf{x}}$  をつないだ  $\Gamma_q + \gamma_{q, \mathbf{x}}$  を取る。

$$\int_{C_{\mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Gamma_q} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\gamma_{q, \mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{q} \right) + 0 = 1 - \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

ゆえに  $\mathbf{f}$  のポテンシャルとして  $F(x, y, z) := 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  が得られた (1 は除いてもよい)。■

**問 18.** 任意の中心力場はポテンシャルを持つことを示し、それを求めよ。(ヒント まず任意の中心力場  $\mathbf{f}$  に対して、 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  が成り立つことに注意する。 $n \geq 3$  のとき、 $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  は単連結であるから、上の例とほぼ同様に議論できる。 $n = 2$  の場合は、 $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$  は単連結ではないが、原点のまわりを円周に沿って一周する曲線上の線積分が (例と同様に) 0 となることを用いる (厳密に議論するのはやや難しい。))

**例 2.4.13 (単連結でない領域では、ポテンシャルを持たない渦無しベクトル場がある)**  $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  で定義されたベクトル場

$$\mathbf{f}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T$$

は  $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$  を満たすが、ポテンシャルを持たない。実際、単位円周上を正の向き (進行方向の左手に円の内部を見る向き) に一周する閉曲線を  $C$  とするとき、

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi \neq 0$$

<sup>16</sup>質点の作る万有引力の場のポテンシャル、点電荷の作る電場のポテンシャル等。

<sup>17</sup> $\nabla F = \mathbf{f}$  を計算で確かめるのは容易だから、線積分をしないといけない理由はない。しかし、ここではポテンシャルは線積分で求めることが出来ると説明しているので、敢えてそれを実行してみよう、ということである。

であることが示せるから (練習だと思ってぜひとも確認すること)、もしポテンシャルが存在するならば、定理 2.4.7 に矛盾する。

この例は多くのテキストで紹介されているものだが、実は複素関数論で有名な等式

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad (i \text{ は虚数単位})$$

の両辺の虚部を取ったものに他ならない。こちらの言葉でいうと、関数  $z \mapsto 1/z$  の原始関数が存在しないということになる。なお、よく知られているように例えば  $\mathbf{C} \setminus \{x; x \leq 0\}$  という単連結領域では原始関数が存在する ( $\log z$  の任意の分枝が原始関数になる)。それに対応して、 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leq 0\}$  では  $f$  もポテンシャルを持つ。■

**問 19.**  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \leq 0\}$  における  $f$  のポテンシャルを求めよ。(答:  $\tan^{-1} \frac{y}{x}$ )

**余談 2.4.3** 受験参考書風に「解法の手引き」を作ると、以下のようになるだろうか。

「 $C^1$  級の  $n$  次元ベクトル場  $f$  がポテンシャルを持つかどうかチェックし、持つ場合はそれを求めよ」という問題には、例えば次の手順で考えるとよい。

(1) 条件

$$(\star) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つか調べる (条件  $(\star)$  は  $n = 3$  の場合、 $\text{rot } f = \mathbf{0}$  と同値である。また  $n = 2$  の場合も  $\text{rot } f = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$  と同値である)。これが成り立たなければポテンシャルは存在しない。この条件  $(\star)$  が成り立つならば、次の (2) に進む。

(2)  $f$  の定義域  $\Omega$  が単連結かどうか調べる<sup>18</sup>。単連結でなければ次の (3) に進む。単連結であれば、

$$(\heartsuit) \quad F(x) := \int_{C_x} f \cdot dr \quad (x \in \Omega)$$

がポテンシャルとなる。ここで  $C_x$  は、 $\Omega$  から任意に選んだ定点  $a$  を始点とし、 $x$  を終点とする  $\Omega$  内の区分的  $C^1$  級曲線である<sup>19</sup>。ていねいにこの線積分を計算し、念のため  $\nabla F = f$  が成り立つかどうか検算する。

(3)  $(\star)$  が成り立つが、 $\Omega$  は単連結でない場合) ポテンシャルを持たない可能性もある。それを確かめるには、

$$\int_C f \cdot dr \neq 0$$

を満たす  $\Omega$  内の閉曲線  $C$  を見つければよい。軟弱な問題の場合、そういう閉曲線が設問中にあったりする。自分で探す場合は、 $\Omega$  に空いた「穴」を囲む (ひっかかる) 閉曲線で、線積分を計算しやすいものを試してみるとよい。すべての「穴」にこのチェックをかけてパスする (線積分が 0 となる) 場合、うまくするとポテンシャルが存在することの証明が出来るかもしれない。しかし厳密にやりとげるのは面倒かも。■

<sup>18</sup>実際に演習問題で出くわす単連結領域は、大抵の場合、簡単なものに限られる。授業で紹介する例をよく見ておくとよい。例えば、空間の次元が何であっても、全空間  $\mathbf{R}^n$  は単連結である (障害物が何もないので、閉曲線はひっかかりようがない)。2 次元の場合は、 $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{a\}$  のように穴があいているものは単連結ではない。

<sup>19</sup>これは自分に都合のよいように選べる。 $\Omega = \mathbf{R}^n$  の場合は、 $a =$  原点、 $a$  と  $x$  を結ぶ曲線として、有向線分  $\varphi(t) = ta$  ( $t \in [0, 1]$ ) のように取るのが簡単?

問 20.  $\Omega := \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  で定義されているベクトル場  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$  で、 $\mathbf{R}^2$  全体への連続な拡張を持たないが、ポテンシャルを持つようなものを一つ求めよ。(注: 時々変な勘違いをする人がいるので、その存在をアピールする意味で。簡単に作ることが出来るので、答は省略する。)

問 21.  $f$  の定義域が  $\mathbf{R}^3$  全体であるような場合、 $\text{rot } f = \mathbf{0}$  のチェックをさぼって、最初から線積分 (♡) で  $F(x)$  を計算し、 $\nabla F = f$  が成り立つかどうかチェックする、というやり方もありうる。なぜそれで良いのか理由を説明せよ。(しかし、これは長い計算のうち 1箇所でも間違えると、すべてがおじゃんになるので、人間向きではないと思われる。コンピューターにやらせるのならば案外良いかもしれない。)

## 2.5 Green の定理

微積分の基本定理の 1つの拡張であるといえる、Green の定理を紹介する。大ざっぱに言うと

— 平面内の領域の「ふち」の上での接線線積分は、その領域上の重積分に直せる —

ということなのだが、この定理が成立する領域をきちんと定式化するのは案外難しい。多くの本では次のように述べられている。

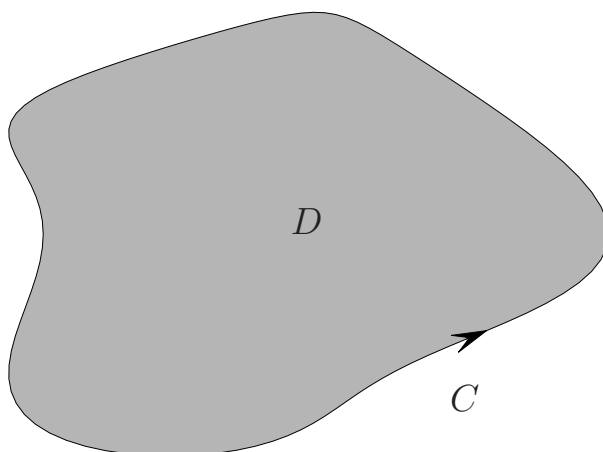


図 2.11: ジョルダン閉曲線  $C$  で囲まれる領域  $D$

$C$  の進行方向の左手に  $D$  を見る

**定理 2.5.1 (Green の定理あるいは Cauchy-Green の定理)**  $\mathbf{R}^2$  内の区分的  $C^1$  級 Jordan 閉曲線  $C$  の囲む領域を  $D$  とする。 $C$  の向きは、 $C$  上の各点で進行方向の左手に  $D$  を見るようになっているとする。このとき  $D$  の閉包を含む開集合  $\Omega$  上で定義された  $C^1$  級のベクトル場  $f = (P, Q)^T$  に対して次式がなりたつ。

$$(2.7) \quad \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot } \mathbf{f} \, dx \, dy, \quad \text{rot } \mathbf{f} := \det(\nabla \mathbf{f}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \end{pmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

同じことを微分形式で表現すると次のようになる。

$$(2.8) \quad \int_C P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

(このように、領域の境界である曲線をたどるとき、進行方向の左手に領域の内部を見るように進む向きを、**正の向き**という。)



ところがこの定理 2.5.1 は、筆者にとっては以下の点から少々「気持ちが悪い」。

1. 「囲む」の意味が曖昧である。Jordan の曲線定理 (A.4 節参照) を仮定すればよいが、そのような (授業では到底証明が不可能な) 大定理を持ち出すのは心苦しい。次のように書き直すべきかもしれない。

$D$  は  $\mathbf{R}^2$  の有界な領域で、その境界  $\partial D$  有限個の区分的  $C^1$  級 Jordan 閉曲線からなり、その向きは、 $\partial D$  の各点で進行方向の左手に  $D$  を見るようになっているとする。

2. 「左」というのも誤解<sup>20</sup>を生じかねない表現である (おそらく授業で上の定理だけ見せた場合、まず 99% の学生は誤解するのではないだろうか)。

ここでは次の形の定理を証明することで満足 (我慢?) することにする。

**定理 2.5.2** ( $x$  軸  $y$  軸両方向に縦線集合である領域での Green の定理)  $\mathbf{R}^2$  の領域  $D$  が

$$D = \{(x, y); x \in (a, b), \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} = \{(x, y); y \in (c, d), \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$$

と表されたとする。ここで  $\varphi_j$  は  $[a, b]$  上定義された区分的に  $C^1$  級の関数、 $\psi_j$  は  $[c, d]$  上定義された区分的に  $C^1$  級の関数で、

$$\forall x \in (a, b) \quad \varphi_1(x) < \varphi_2(x), \quad \forall y \in (c, d) \quad \psi_1(y) < \psi_2(y)$$

を満たすとする。このとき、 $D$  の閉包で定義された  $C^1$  級の実数値関数  $P, Q$  に対して

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

が成り立つ。ただし  $C$  は次で定義される  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を結んで出来る閉曲線とする。

$$\begin{aligned} C_1 : \mathbf{r} &= (t, \varphi_1(t))^T & (t \in [a, b]), & & C_2 : \mathbf{r} &= (b, t)^T & (t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]), \\ -C_3 : \mathbf{r} &= (t, \varphi_2(t))^T & (t \in [a, b]), & & -C_4 : \mathbf{r} &= (a, t)^T & (t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]). \end{aligned}$$

**証明**  $D$  が  $y$  軸の方向に縦線集合であることから、

$$\begin{aligned} \iint_D \left( -\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx \\ &= \int_{C_1} P(x, y) dx - \int_{-C_3} P(x, y) dx \\ &= \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} P(x, y) dx = \int_C P(x, y) dx. \end{aligned}$$

ただし  $C_2, C_4$  では  $dx/dt = 0$  であることから、 $\int_{C_2} P dx = \int_{C_4} P dx = 0$  となることを用いた。

<sup>20</sup>右と左の数学的な定義を読んだり聞いたりしたことがあるだろうか。物理法則は左右非対称なので (ヤンとリーの発見した「パリティ対称性の破れ」)、物理学としては右と左は定義可能であるようだが、数学では「普通の」意味と一致するように右と左を定義することはできない。数学書に「右」と「左」が出て来ることはあるが、本当は  $x$  軸と  $y$  軸の「位置関係」と「同じ」というだけのことであろう。

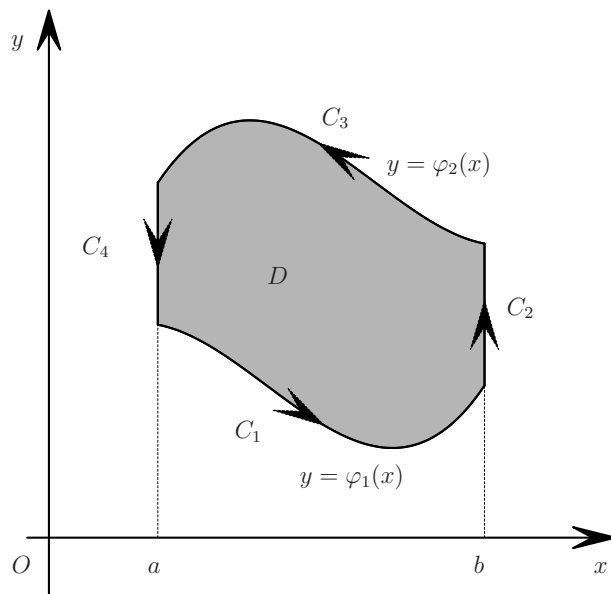


図 2.12:  $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  が囲む領域  $D$

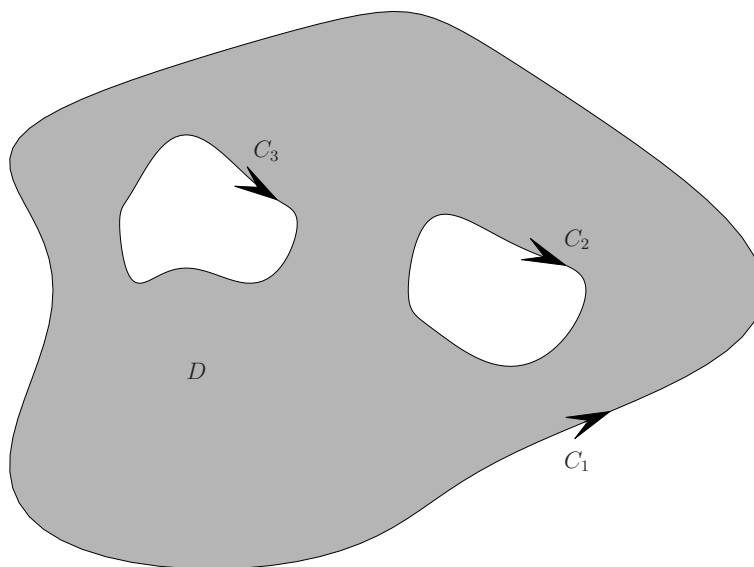
同様にして  $D$  が  $x$  軸の方向に縦線集合であることから、

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_C Q(x, y) dy$$

が得られる。以上得られた二つの等式を加えればよい。 ■

一工夫すると、一方向だけに縦線集合であるような領域に対しても成り立つことが示せる (付録の定理 C.1.1(p.85))。

さらに次の図 2.13 のように、互いに交わらない有限個の閉曲線で囲まれる領域に対しても拡張できる。ここでも進行方向の左手に領域内部を見るように曲線に向きをつける (やはり「正の向き」という)。



$$\text{図 2.13: } \sum_{j=1}^3 \int_{C_j} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot } \mathbf{f} dx dy$$

いずれにせよ、この定理 2.5.2 は仮定が強すぎるので「一般性が低い」と言われても仕方がないが、以

下に解説する積分範囲の分割のテクニック (多分複素関数論でおなじみ) を併用すれば、実際に与えられた領域での積分に適用するのに「かなり」使える。

**例 2.5.3 (積分範囲を分割して定理が使える場合に帰着する例)**  $D$  を円環領域  $\{(x, y); 1 < x^2 + y^2 < 2\}$  とすると、どちらの定理の仮定も満たさないが、

$$D_1 := \{(x, y) \in D; x > 0, y > 0\}, \quad D_2 := \{(x, y) \in D; x < 0, y > 0\},$$

$$D_3 := \{(x, y) \in D; x < 0, y < 0\}, \quad D_4 := \{(x, y) \in D; x > 0, y < 0\},$$

$$C_1 := x^2 + y^2 = 2 \text{ を反時計回りに一周する曲線}, \quad C_2 := x^2 + y^2 = 1 \text{ を時計回りに一周する曲線}$$

とおくと、 $D_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) は定理 2.5.2 の仮定を満たす<sup>21</sup>。

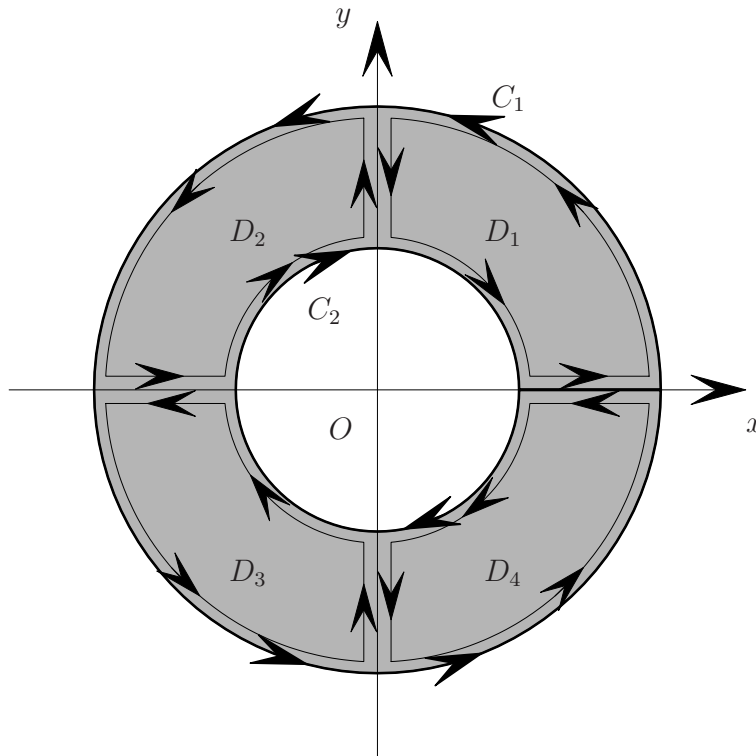


図 2.14:  $\int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{\partial D_1} + \int_{\partial D_2} + \int_{\partial D_3} + \int_{\partial D_4}$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup \text{零集合}.$$

また逆向きの曲線の対を (線積分に影響なしとして) 除くことにすれば

$$C_1 + C_2 = \partial D_1 + \partial D_2 + \partial D_3 + \partial D_4,$$

$\partial D_j$  は  $D_j$  の周を進行方向の左手に  $D_j$  の内部を見る向きに一周する閉曲線

であるから、

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \sum_{j=1}^4 \iint_{D_j} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial D_j} P dx + Q dy \\ &= \int_{C_1 + C_2} P dx + Q dy. \blacksquare \end{aligned}$$

<sup>21</sup>本当は二つに分解するだけで定理 C.1.1 が適用できる。

自分で好きなように選んだ区分的  $C^1$  級 Jordan 閉曲線が囲む領域  $D$  を、 $x$  軸  $y$  軸両方向に縦線集合であるような領域に分解できるか、しばらく紙とペンを持って考えてみることを奨める。多分「実用上十分」という感触が持てると思う。

**問 22.** ある本で、ほぼ定理 2.5.2 に相当する命題 (両方向に縦線集合であるような領域について…) だけを証明して、後は領域を分解することでいつもうまく行く、と説明していたが、そこまで言ってしまうと嘘になる。反例を示せ。

**余談 2.5.1** …しかし数学者の普通の感覚からすると、「縦線集合である領域の有限和に分解できるような領域」というのは、いくら使えるものではあっても「美しくない」ので、例えば例 2.5.3 にも直接適用できるような定理を述べようと努力してしまうようである (ある種の職業病かもしれない)。…しかし筆者が読んだテキストで、定理を厳密に述べて証明することに成功しているものは少ないようである。結構「ずる」をしている本が多い (そうするくらいならば、変に一般化しなければよいと思うのだが…)。誠実に立ち向かっていると感じられた本として、杉浦 [14] をあげておく (「また杉浦先生の本か」という感じがするが)。[14] では、Green の定理を 3 バージョン提示している。最初の二つがこの文書の定理 2.5.2, 定理 C.1.1 である。興味が出て来た人は最後の一つを読んでみるとよい。 ■

**例 2.5.4 (線積分で領域の面積を計算する)** 区分的  $C^1$  級の閉曲線  $C$  で囲まれる有界領域を  $D$  とすると、

$$\int_C x dy = - \int_C y dx = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \mu_2(D)$$

である ( $\mu_2(D)$  は  $D$  の面積を表す記号であった)。実際に

$$P(x, y) = 0, Q(x, y) = x \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

$$P(x, y) = -y, Q(x, y) = 0 \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

$$P(x, y) = -\frac{1}{2}y, Q(x, y) = \frac{1}{2}x \text{ に対して } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

であるから、Green の定理によれば  $\int_C x dy, - \int_C y dx, \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx$  のいずれも

$$\iint_D 1 dx dy = \mu_2(D)$$

に等しい。 ■

**問 23.** サイクロイド  $\Gamma : \mathbf{r} = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))^T$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ) と  $y$  軸で囲まれる範囲の面積を求めよ<sup>22</sup>。(解答:  $\int_{\Gamma} y dx = 3\pi a^2$ )

**例 2.5.5 (多角形の面積を座標で表す)** 平面上に  $n$  角形  $\Omega$  があり、頂点  $P_j(x_j, y_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) が正の向きに並んでいるとする。このとき、 $\Omega$  の面積  $\mu_2(\Omega)$  は

$$(2.9) \quad \mu_2(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (x_{j+1} - x_{j-1}) y_j.$$

ただし  $P_{n+1} = P_1, P_0 = P_n$  とする。

<sup>22</sup>ガリレオはサイクロイドに興味を持って、この面積も求めようと努力し (紙を切って重さを測るとか…)、 $3\pi a^2$  に近いが、厳密に等しくはない、と書いているそうです (遠山 [26] にもう少し詳しく書いてあります)。

(証明) Green の定理によって、

$$\mu_2(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x \, dy = \sum_{j=1}^n \int_{\overrightarrow{P_j P_{j+1}}} x \, dy.$$

ただし、 $\overrightarrow{P_j P_{j+1}}$  で、 $P_j$  から  $P_{j+1}$  に向かう線分 (曲線) を表した。その曲線は、 $\varphi(t) := (1-t)P_j + tP_{j+1}$  ( $t \in [0, 1]$ ) とパラメーター付けできる。

$$\varphi'(t) = -P_j + P_{j+1} = \overrightarrow{P_j P_{j+1}}, \quad x = (1-t)x_j + tx_{j+1}, \quad \frac{dy}{dt} = y_{j+1} - y_j.$$

であるから

$$\int_{\overrightarrow{P_j P_{j+1}}} x \, dy = \int_0^1 ((1-t)x_j + tx_{j+1}) \cdot (y_{j+1} - y_j) \, dt = \frac{1}{2} (x_j + x_{j+1}) (y_{j+1} - y_j).$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \mu_2(\Omega) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (x_j + x_{j+1}) (y_{j+1} - y_j) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n x_j y_{j+1} - \sum_{j=1}^n x_j y_j + \sum_{j=1}^n x_{j+1} y_{j+1} - \sum_{j=1}^n x_{j+1} y_j \right). \end{aligned}$$

$x_{n+1}y_{n+1} = x_1y_1$  であるから、カッコ内の第 2 項、第 3 項は打ち消し合って

$$\mu_2(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j).$$

次のように変形できる ( $x_n y_{n+1} = x_0 y_1$  に注意)。

$$\mu_2(\Omega) = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n x_j y_{j+1} - \sum_{j=1}^n x_{j+1} y_j \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n x_{j-1} y_j - \sum_{j=1}^n x_{j+1} y_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (x_{j-1} - x_{j+1}) y_j. \blacksquare$$

(注意: 公式 (2.9) は、Green の定理に依らずに帰納法で初等的に証明することも出来る。 $n$  角形の面積を  $S_n$  と表すとき、

$$S_3 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)].$$

これは (2.9) が  $n = 3$  のときに成り立つことを示している。(2.9) が  $n$  まで成り立つとすると

$$\begin{aligned} S_n + \Delta P_1 P_n P_{n+1} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^{n-1} (x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n) + (x_{n+1} y_1 - x_1 y_{n+1}) + (x_1 y_n - x_n y_1)] \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n (x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j) + (x_{n+1} y_1 - x_1 y_{n+1}) \right). \end{aligned}$$

これは、(2.9) が  $n+1$  のときも成り立つことを示している。— 以上は実は粗い。対象を凸多角形に限るか、三角形の面積を符号付と解釈することの正当化をするか、修正が必要である。そういうところまで解決できるような、一般的な Green の定理を頑張って証明しておくのは価値がある、という気がしてくる。■

**例 2.5.6 (Cauchy の積分定理)** 複素平面上の区分的  $C^1$  級の Jordan 閉曲線  $C$  の囲む領域を  $D$  とし、 $\bar{D}$  の開近傍で定義された  $C^1$  級の複素数値関数  $f$  があるとき、 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbf{R}$ ,  $u(x, y) \in \mathbf{R}$ ,  $v(x, y) \in \mathbf{R}$ ) とすると、

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u(x, y) + iv(x, y))(dx + i dy) \\ &= \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy \\ &= \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

もしも  $f$  が正則関数であれば、**Cauchy-Riemann の方程式**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つので、

$$\int_C f(z) dz = \iint_D 0 dx dy + i \iint_D 0 dx dy = 0. \blacksquare$$

**例 2.5.7 (2次元単連結領域で渦無しベクトル場はポテンシャルを持つ)** 2次元単連結領域  $\Omega$  におけるベクトル場  $\mathbf{f}$  が

$$\text{rot } \mathbf{f} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$$

を満たす場合、領域  $\Omega$  に穴がないので、 $\Omega$  内の任意の閉曲線  $C$  の囲む領域  $D$  について  $\bar{D} \subset \Omega$  となるため、Green の定理が使える

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 0 dx dy = 0$$

が成り立つ。定理 2.4.7 より、 $\mathbf{f}$  はポテンシャルを持つ。すなわち、定理 2.4.8 の2次元版が成り立つことが分かる (厳密な証明とはいいづらい — なぜだか分かりますか?<sup>23</sup>)。■

**余談 2.5.2 (定理の名称)** Green の定理は **Gauss-Green の定理** と呼ばれたり、**Green-Stokes の定理** と呼ばれたりする。その辺の事情を説明しよう。

(後で紹介する) Gauss の発散定理の2次元版

$$\int_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \text{div } \mathbf{f} dx dy$$

で  $\mathbf{f} = (Q, -P)^T$  において、 $\mathbf{n} ds = (dy, -dx)^T$  に注意すると、(2.8) が得られる<sup>24</sup>。

一方、(2.7) は後で紹介する Stokes の定理の2次元版と考えることもできる。

つまり2次元空間では、Gauss の定理も Stokes の定理も、Green の定理という一つの公式につぶれてしまう、ということである。あるいは Green の定理という、比較的証明の簡単な基本的定理が、高次元空間では別の形の拡張 (Gauss の定理, Stokes の定理) を許す、という見方もできる。■

<sup>23</sup> $C$  は Jordan 曲線とは限らないので、 $C$  が囲む領域というもののがはっきりしない。例えば 8 の字型の閉曲線が囲む領域は何か分かりますか？

<sup>24</sup> $\mathbf{n}$  は、接線ベクトル  $\varphi'(t)$  を、 $-\pi/2$  回転した  $\begin{pmatrix} \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) \\ \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2'(t) \\ -\varphi_1'(t) \end{pmatrix}$  を正規化したもので、 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}} \begin{pmatrix} \varphi_2'(t) \\ -\varphi_1'(t) \end{pmatrix}$ 。  $ds = \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2} dt$  であるから、 $\mathbf{n} ds = \begin{pmatrix} \varphi_2'(t) \\ -\varphi_1'(t) \end{pmatrix} dt$ 。ゆえに  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = Q dy - (-P) dx = P dx + Q dy$ 。

## 第3章 曲面と面積分

(この章の内容も、そろそろ揃ってきたと思うが、まとめ方についてはまだまだだと思う。)  
曲面上の積分である面積分がこの章のテーマである。簡単のために3次元空間内の曲面に話を限定する。特に以下の三点が重要である。

1. 面積要素と曲面積の定義
2. ベクトル場の法線面積分の定義
3. 微積分の基本定理の高次元化に相当する、Gauss の定理 (領域の境界上の法線面積分は、領域内の体積積分に直せる) と Stokes の定理 (曲面の縁の上の線積分は、曲面の面積分に直せる)

### 3.1 曲面の定義

まずは曲面の定義から見直そう。

**余談 3.1.1 (楽屋裏)** 意外に思われるかも知れないが、曲面を定義するのは難しい(曲線と比べると難易度がかなり高い)。現代の数学としては、「曲面とは2次元の多様体である」というのが一番正統的な解答であるが、多様体を2年生の微積分の講義で説明するのは困難である(多様体について一通り基礎的な事項の説明をするには、一つの講義科目が必要である…日本の大学の数学科では、通常は3年次の幾何学でそれが行われる)。ここでは多様体の概念に行き着く前の素朴なレベルの概念にとどめることにする。中途半端な結果しか得ることが出来ないが、ここで学ぶことは決して無駄ではなく、多様体を学ぶ際に役立つはずである(そのことを念頭に、素朴ではあるが、真面目に説明してあるつもりである)。■

#### 3.1.1 3つの素朴な方法

曲面を定義するための方法として、以下の3つが基本的である。

曲面の例としては、原点を中心とする半径  $R (> 0)$  の球面 (の一部) を取り上げる。

##### (a) 2変数関数のグラフとしての曲面

$$z = f(x, y) \quad (\text{または } x = g(y, z) \text{ あるいは } y = h(z, x)).$$

例えば

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad ((x, y) \in \Omega := \{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\})$$

で、原点を中心とする半径  $R$  の球面の「上半分」を表す。

##### (b) 3変数関数のレベル・セット (等値面) としての曲面

$$F(x, y, z) = h.$$

ここで  $h$  は定数である。

例えば

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

で原点を中心とする半径  $R$  の球面 (全体) を表す。

(c) パラメーター曲面  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T: D \rightarrow \mathbf{R}^3$  とするとき、

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v), \\ y = \varphi_2(u, v), \\ z = \varphi_3(u, v) \end{cases} \quad \text{i.e. } \mathbf{r} = \varphi(u, v)$$

で1つの曲面が定義できる。

例えば

$$(3.1) \quad \begin{cases} x = R \sin \theta \cos \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ z = R \cos \theta \end{cases} \quad ((\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi])$$

で原点を中心とする半径  $R$  の球面を表せる。

以上の3つの定義法は、以下に見るように、ローカルにはほとんど同等である。

### 3つの定義法相互の関係

- (a) は (b) の一種である。実際

$$F(x, y, z) := f(x, y) - z, \quad h := 0$$

とおくと、 $z = f(x, y)$  は  $F(x, y, z) = h$  と同値になる。

- (a) は (c) の一種である。実際

$$\varphi_1(u, v) := u, \quad \varphi_2(u, v) := v, \quad \varphi_3(u, v) := f(u, v)$$

とおくと、 $z = f(x, y)$  は

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v), \\ y = \varphi_2(u, v), \\ z = \varphi_3(u, v) \end{cases}$$

と同値になる。

- (b) は  $F(\mathbf{a}) = h, \nabla F(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$  となる  $\mathbf{a}$  の十分近くで (a) である。実際

$$F_x(\mathbf{a}) \neq 0 \quad \text{または} \quad F_y(\mathbf{a}) \neq 0 \quad \text{または} \quad F_z(\mathbf{a}) \neq 0$$

となっているので、例えば最初の場合では、陰関数定理を用いて、 $F(x, y, z) = h$  を

$$x = \varphi(y, z)$$

と  $x$  について解くことができる。

- (c) は

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$$

を満たす点  $(u_0, v_0)$  の十分近くで (a) である。実際

$$\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{または} \quad \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{または} \quad \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$



であるから、例えば最初の場合は逆関数定理を用いて

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}(y, z)$$

と  $u, v$  について解くことが出来る。このとき

$$x = \varphi_1(u, v) = \varphi_1(\boldsymbol{\xi}(y, z))$$

となる。

上の説明の途中であげた条件

- 方法 (b) 関数  $F$  のレベル・セットの場合には  $\nabla F \neq 0$
- 方法 (c) パラメーター曲面  $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varphi}(u, v)$  場合には  $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$

は重要なので、以下では常に仮定することになると思っておいて欲しい。実はいずれも曲面の接平面の  $\mathbf{0}$  でない法線ベクトルの存在を保証する条件であると考えられる。

**例 3.1.1 (勾配  $\nabla F$  はレベルセット  $F = h$  の法線ベクトルを与える)** 「多変数の微分積分学1」で、 $F(x, y, z) = c$  で与えられる曲面上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  に対して、 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  はその点における接平面の法線ベクトルを与えることを学んだはずである。例えば空間内の平面

$$F(x, y, z) := ax + by + cz = d \quad (a, b, c, d \text{ は } (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \text{ をみたす実定数})$$

においては、平面上のどの点においても  $\nabla F = (a, b, c)^T$  が法線ベクトルを与える。

また、空間内の  $(a, b, c)^T$  を中心とする半径  $R$  の球面

$$F(x, y, z) := (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

上にある点  $(x_0, y_0, z_0)^T$  における接平面の法線ベクトルとして  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 2(x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c)^T$  が取れる<sup>1</sup>。ゆえに接平面の方程式として

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = 0$$

が得られる。■

**問 24.**  $C^1$  級の関数  $f$  のグラフ  $z = f(x, y)$  上の点  $(x_0, y_0, z_0)$  ( $z_0 = f(x_0, y_0)$ ) における接平面の方程式を求めよ。(グラフの場合は特別な条件なしに接平面が得られる。)

パラメーター曲面の法線ベクトルについては、次項で考察することにする。

### 3.1.2 正則パラメーター曲面

我々は曲面上での積分 (面積分) を定義するにあたり、前項の (c), すなわち曲面のパラメーター表示を採用し、特に以下に紹介する「正則パラメーター曲面」を「まともな曲面」の典型として扱うことにする。

<sup>1</sup>これが法線ベクトルを与えることは初等幾何学的に考えても明らかである。

**定義 3.1.2 (パラメーター曲面、正則パラメーター曲面)**  $D$  は  $\mathbf{R}^2$  の有界領域または有界閉領域、 $1 \leq r \leq \infty$ ,  $\varphi: D \rightarrow \mathbf{R}^3$  は  $C^r$  級の写像とすると、 $\varphi$  を  $C^r$  級の**パラメーター曲面**という。

このようなパラメーター曲面に  $S$  などの文字で名前をつけ、

$$S: \mathbf{r} = \varphi(u, v) \quad ((u, v) \in D)$$

のように表す。

写像  $\varphi$  の像 (値域)

$$\varphi(D) = \{\varphi(u, v); (u, v) \in D\}$$

を  $S$  の**像**と呼ぶ。この文書では、パラメーター曲面  $S$  の像は  $S^*$  で表す:  $S^* := \varphi(D)$ 。

パラメーター曲面  $S$  が**正則**であるとは、次の (i), (ii) を満たすことを言う。

(i)  $\varphi$  が単射である。すなわち

$$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in D, \quad \mathbf{p} \neq \mathbf{q} \implies \varphi(\mathbf{p}) \neq \varphi(\mathbf{q}).$$

(ii) 任意の  $\mathbf{p} \in D$  で

$$(3.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathbf{p}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}.$$

**用語の復習、約束**  $\mathbf{R}^n$  の領域とは、 $\mathbf{R}^n$  の連結な開部分集合のことをいう。 $D$  が  $\mathbf{R}^n$  の閉領域とは、 $\mathbf{R}^n$  のある領域  $U$  の閉包になっていること ( $\bar{U} = D$ ) をいう。特に断りがない限り、閉領域は  $\bar{U}$  のように表すことが多い (つまり  $U$  が領域ということである)。

閉領域は開集合でないので、その上で定義された関数の微分が問題となる。この文書では、 $\mathbf{R}^n$  の部分集合  $\Omega$  が開集合でないとき、 $\Omega$  で定義された写像  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$  が  $C^k$  級であるとは、 $\Omega$  の閉包を含む開集合  $U$  と、 $U$  で定義された  $C^k$  級の写像  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbf{R}^m$  で、 $\tilde{f}$  の  $\Omega$  の制限が  $f$  に一致する ( $\tilde{f}|_{\Omega} = f$ ) ものが存在することと約束する。■

**余談 3.1.2 (誰もが認める定義はない)** 実は、パラメーター曲面、正則パラメーター曲面の定義には、細部が異なる流儀がいくつかある。ここでは後の目的 (面積分を定義し、その基本的な性質を述べて証明する) に便利となるようなものを採用したつもりであるが、決定版とは言えない (そういうものがあれば、それが普及しているであろう)。

例えば、正則パラメーター曲面について、(i) 単射性と (ii)  $\varphi_u \times \varphi_v \neq \mathbf{0}$  を課すことはどの流儀にも共通しているが、 $\varphi$  の定義域に関する条件や、条件 (i), (ii) が成り立つ範囲については定まったやり方がない。

なお、写像  $\varphi$  でなく、 $\varphi$  の像そのものを曲面とよぶ流儀もある (むしろその方が普通であるかも知れない)。■

**$u$  曲線、 $v$  曲線、法線ベクトル**  $S: \mathbf{r} = \varphi(u, v) \quad ((u, v) \in D)$  を  $C^1$  級パラメーター曲面とする。

$(u_0, v_0) \in D$  とするとき、

$$u \mapsto \varphi(u, v_0) \quad (\text{定義域は } \{u; (u, v_0) \in D\} \text{ の } u_0 \text{ を含む連結成分})$$

を  $\varphi(u_0, v_0)$  を通る  $u$  曲線、

$$v \mapsto \varphi(u_0, v) \quad (\text{定義域は } \{v; (u_0, v) \in D\} \text{ の } v_0 \text{ を含む連結成分})$$

を  $\varphi(u_0, v_0)$  を通る  $v$  曲線と呼ぶ。

問 25. 球面のパラメーター表示  $\varphi(\theta, \phi) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta)^T$  ( $(\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ) において、 $\theta$  曲線、 $\phi$  曲線はなにか？

$\varphi(u_0, v_0)$  において、 $u$  曲線の接ベクトル、 $v$  曲線の接ベクトルはそれぞれ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = \varphi_u(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = \varphi_v(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

である。これら 2 つのベクトルの双方に垂直なベクトルとして

$$\varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v)} \\ \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u, v)} \\ \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \end{pmatrix}$$

が得られる (ただし  $(u_0, v_0)$  を略した)。パラメーター曲面  $S$  が正則ならば、このベクトルは  $\mathbf{0}$  にならない。

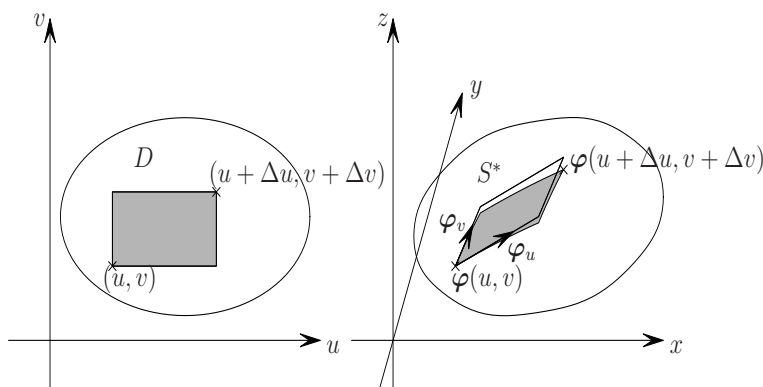


図 3.1:  $\varphi_u \times \varphi_v$  は曲面  $S$  の接平面の法線ベクトルになる

これはパラメーター曲面  $S$  の点  $\varphi(u_0, v_0)$  における接平面の法線ベクトルである (レベルセット  $F = h$  の法線ベクトルが  $\nabla F$  であることを認めれば、証明できる)。

こうして次のことが分かった。

正則パラメーター曲面  $S: \mathbf{r} = \varphi(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) においては、  
各点で  $\mathbf{0}$  でない法線ベクトル  $\varphi_u \times \varphi_v$  が定まる

参考 3.1.1 (他の本を読むときのために — 条件 (3.2) の言い換え) 条件 (3.2) を次の形で書いてある本も多い。

$$(3.3) \quad \text{rank } \varphi'(\mathbf{p}) = 2.$$

ここで  $\varphi'(\mathbf{p})$  は  $\varphi$  のヤコビ行列である。それを成分で書くと

$$\varphi'(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\mathbf{p}) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(\mathbf{p}) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(\mathbf{p}) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

となるが、この行列のランクが 2 であるとは、2 つの列ベクトルが 1 次独立であること、言い換えると、2 次小行列式の中に少なくとも一つ 0 でないものがあることと同値である。それは

$$(3.4) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left( \frac{\partial(\varphi_i, \varphi_j)}{\partial(u, v)} \right)^2 > 0$$

と書くこともできる (この式で定義してある本も多い)。実は

$$(3.5) \quad \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left( \frac{\partial(\varphi_i, \varphi_j)}{\partial(u, v)} \right)^2$$

であるから、条件 (3.4) が (3.2) と同値であることは明らかであろう。こうして、3 条件 (3.2), (3.3), (3.4) は互いに同値であることが分かる。■

**例 3.1.3 (2 変数関数のグラフは正則パラメーター曲面の像である)**  $D$  は  $\mathbf{R}^2$  の有界 (閉) 領域、 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  を  $C^r$  級の関数とする ( $1 \leq r \leq \infty$ )。このとき、 $f$  のグラフ

$$\text{grad } f = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D\}$$

は  $C^r$  級の正則パラメーター曲面の像である。実際、 $\varphi(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$  とおくと、これは明らかに単射で<sup>2</sup>、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

が成り立つ。 $\varphi$  は  $C^r$  級正則パラメーター曲面で、 $\text{graph } f$  はその像である。■

**例 3.1.4 (球面のパラメーターづけ)** 半径  $R (> 0)$  の球面  $S_R := \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$  を考えよう。

実際、 $D := [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ 、 $\varphi: D \ni (\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$  とすると、 $\varphi$  は  $C^\infty$  級パラメーター曲面で、 $S_R$  はその像となっている。

しかし  $\varphi$  は正則ではない。実際、 $\varphi|_D$  は単射 (1 対 1) であるが、 $\varphi$  そのものは単射ではない ( $\phi$  が何であっても  $\varphi(0, \phi) = (0, 0, R)$ 、 $\varphi(\pi, \phi) = (0, 0, -R)$ 。また  $\theta$  が何であっても  $\varphi(\theta, 0) = \varphi(\theta, 2\pi)$ )。

一方

$$\varphi_\theta = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \varphi_\phi = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$(3.6) \quad \varphi_\theta \times \varphi_\phi = R^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \phi \\ \sin^2 \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} = R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup> $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$  ならば、 $(x_1, y_1, f(x_1, y_1)) \neq (x_2, y_2, f(x_2, y_2))$ 。

ゆえに ( $0 \leq \theta \leq \pi$  に注意すると)

$$(3.7) \quad \|\varphi_\theta \times \varphi_\phi\| = R^2 \sin \theta.$$

これから  $0 < \theta < \pi$  であれば  $\varphi_\theta \times \varphi_\phi \neq \mathbf{0}$  であるが、 $\theta = 0, \pi$  のとき  $\varphi_\theta \times \varphi_\phi = \mathbf{0}$ .

球面のように重要な曲面が正則パラメーター曲面にならないことは少々困ったことであるが、条件を満たさない点は全体のほんの一部であるため (後で球面全体で測度を定義すれば、測度が 0 の集合となることが分かるので、影響は無視できる)、球面上での面積分は、このことを無視して、この極座標を用いたパラメーター曲面で計算してしまって構わないのである。■

**注意 3.1.5 ((3.6) が自然であること)**

$$\mathbf{n} := \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

とおくと、実は

$$\mathbf{n} = \frac{\varphi(\theta, \phi)}{\|\varphi(\theta, \phi)\|} = \frac{\varphi(\theta, \phi)}{R}.$$

図形的考察から、 $\mathbf{n}$  は球面上の点  $\varphi(\theta, \phi)$  における外向き単位法線ベクトルである。

一方 (3.7) も次のようにして納得できる。 $D$  内の長方形  $\Lambda = [\theta_0, \theta_0 + \Delta\theta] \times [\phi_0, \phi_0 + \Delta\phi]$  の  $\varphi$  による像  $\varphi(\Lambda)$  はほぼ長方形で、底辺  $= R \sin \theta_0 \Delta\phi$ 、高さ  $= R \Delta\theta$  である<sup>3</sup>。ゆえに面積は近似的に  $R^2 \sin \theta_0 \Delta\theta \Delta\phi$  であり、面積の拡大率が  $R^2 \sin \theta_0$  であることが分かる<sup>4</sup>。

こうして、

$$\varphi_\theta \times \varphi_\phi = (\text{極座標変換のヤコビアン}) \cdot (\text{外向き単位法線ベクトル})$$

という形で覚えることができる。法線ベクトルであることは一般的に成り立つのであるから、「長さが極座標変換のヤコビアンに等しく、向きが外向き」としてもよい。■

## 3.2 正則パラメーター曲面の曲面積と面積要素に関する面積分

### 3.2.1 定義

$S: \mathbf{r} = \varphi(u, v) ((u, v) \in D)$  を  $\mathbf{R}^3$  内の正則  $C^r$  級パラメーター曲面であるとする。 $\varphi$  の微分可能性より

$$\varphi(u+h, v+k) = \varphi(u, v) + h\varphi_u(u, v) + k\varphi_v(u, v) + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right) \quad ((h, k) \rightarrow (0, 0))$$

であるから、 $D$  内の長方形 (縦  $\Delta u$ , 横  $\Delta v$ )

$$A = [u, u + \Delta u] \times [v, v + \Delta v]$$

が十分小さいとき、その像

$$\varphi(A) = \{\varphi(u+h, v+k); (h, k) \in [0, \Delta u] \times [0, \Delta v]\}$$

<sup>3</sup>地球上で、子午線に沿って緯度 1 度の開きにある 2 点間の距離はどこでも同じだが、緯線にそって経度 1 度の開きにある 2 点間の距離は緯度により異なる。北極から測った角度が  $\theta_0$  である緯線は、半径  $R \sin \theta_0$  の円であることを理解しよう。

<sup>4</sup>実は、3 次元極座標変換

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

のヤコビアンが  $r^2 \sin \theta$  であることも同様の考察で理解できる。

は平行四辺形

$$\{\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u, v) + h\boldsymbol{\varphi}_u(u, v) + k\boldsymbol{\varphi}_v(u, v); (h, k) \in [0, \Delta u] \times [0, \Delta v]\}$$

で良く近似される。この平行四辺形の面積は

$$\|\boldsymbol{\varphi}_u(u, v) \times \boldsymbol{\varphi}_v(u, v)\| \Delta u \Delta v$$

であるから、直観的には

$$\varphi(A) \text{ の面積} \doteq \|\boldsymbol{\varphi}_u(u, v) \times \boldsymbol{\varphi}_v(u, v)\| \Delta u \Delta v.$$

言い換えると、

$$\text{面積の拡大率は } \|\boldsymbol{\varphi}_u(u, v) \times \boldsymbol{\varphi}_v(u, v)\|.$$

そこで正則パラメータ曲面上の面積分、曲面積を次のように定義する。

**定義 3.2.1 (正則パラメータ曲面上の面素に関する面積分, 曲面積)**  $D$  は  $\mathbf{R}^2$  の Jordan 可測な有界閉領域、 $S: \mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) は  $C^1$  級正則パラメータ曲面、 $f$  を  $S^*$  上定義された連続関数  $f: S^* \rightarrow \mathbf{R}$  とするとき、 $f$  の  $S$  上の (面 (積) 要素に関する) **面積分 (surface integral)** を

$$\int_S f \, d\sigma := \iint_D f(\boldsymbol{\varphi}(u, v)) \|\boldsymbol{\varphi}_u(u, v) \times \boldsymbol{\varphi}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

で定義する。特に  $f \equiv 1$  の場合の

$$\int_S d\sigma = \iint_D \|\boldsymbol{\varphi}_u(u, v) \times \boldsymbol{\varphi}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

を  $S$  の **曲面積 (surface area)** と呼び、 $\mu_c(S)$  で表す (標準的な記号ではない)。

また

$$d\sigma := \|\boldsymbol{\varphi}_u(u, v) \times \boldsymbol{\varphi}_v(u, v)\| \, du \, dv$$

とおき、これを  $S$  の **面 (積) 要素 (surface element)** と呼ぶ。

**注意 3.2.2 (面積要素の表し方の流儀)**  $d\sigma$  のかわりに  $dS$  や  $d\Gamma$ ,  $d\gamma$ ,  $dA$  などの記号を使うこともある (実は 2005 年度までの講義では  $dS$  という記号を使っていた)。たまたま私が所有している書籍十数冊を調べたところ、 $d\sigma$  が一番多かったので、この文書でもそれを採用することにしたが、これが本当に世の中で一番たくさん使用されている記号かどうかは分からない。面積要素を使う場合は、どの記号を使うか、一言断っておくのがエチケットであろう。■

**注意 3.2.3 (曲面が平らなときは、曲面積は普通の面積に一致する)**  $\boldsymbol{\varphi}$  の像が  $xy$  平面に含まれているとき、曲面積は 2 次元 Jordan 測度 (面積) に等しい。

**証明** 仮定より  $\varphi_3 = 0$ , すなわち  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, 0)^T$  となっているので、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \end{pmatrix}$$

となる。ゆえに  $\mathbf{R}^3$  内の曲面として  $S$  の曲面積は

$$\mu_c(S) = \iint_D \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right| \, du \, dv.$$

一方、 $\mathbf{R}^2$  内の図形としての  $S$  の面積  $\mu(S)$  は、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(u, v) := \begin{pmatrix} \varphi_1(u, v) \\ \varphi_2(u, v) \end{pmatrix}$  という変数変換によって、

$$\mu(S) = \iint_S dx dy = \iint_D |\det \Phi'(u, v)| du dv = \iint_D \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \right| du dv.$$

ゆえに、両者は一致することが分かる。■

**例 3.2.4 (球面の曲面積)** 既に述べたように、球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  は厳密には正則パラメーター曲面ではないが、細かいことには目をつむって機械的に曲面積を計算して見よう。前節の例 3.1.4 の計算から

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

であることが分かるから、

$$\mu_c(S) = \iint_{\substack{\theta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi]}} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^2. \blacksquare$$

**例 3.2.5 (2 変数関数のグラフの曲面積)** すでに見たように、 $\mathbf{R}^2$  の Jordan 可測な有界閉領域  $D$  上で定義された  $C^1$  級の関数  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、

$$\varphi(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これから  $\text{graph } f$  は正則パラメーター曲面  $S: \mathbf{r} = \varphi(x, y) ((x, y) \in D)$  の像であることが分かり、その曲面積が以下のように計算できる。

$$d\sigma = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| dx dy = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy$$

であるから

$$\mu_c(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dx dy. \blacksquare$$

**例 3.2.6 (回転面の曲面積)**  $xy$  平面における  $C^1$  級の関数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  のグラフを  $x$  軸の回りに回転して出来る曲面について考えよう。ただし、 $f(x) > 0 (x \in [a, b])$  を仮定する。

$$D := [a, b] \times [0, 2\pi], \quad \varphi: D \ni \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ f(x) \cos \theta \\ f(x) \sin \theta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

で定義されるパラメーター曲面  $S: \mathbf{r} = \varphi(x, \theta) ((x, \theta) \in D)$  について、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \cos \theta \\ f'(x) \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \sin \theta \\ f(x) \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} f(x) f'(x) \\ -f(x) \cos \theta \\ f(x) \sin \theta \end{pmatrix}$$

であるから

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\| = |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2} > 0.$$

ゆえに  $S$  は正則パラメーター曲面で、

$$\mu_c(S) = \iint_{x \in [a,b], \theta \in [0,2\pi]} |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2} dx d\theta = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2} dx. \blacksquare$$

**問 26.** (有名な事実の紹介用) 正則パラメーター曲面  $S = \varphi(D)$  において

$$E := \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right), \quad F := \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right), \quad G := \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

とおくと

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{EG - F^2}$$

が成り立つことを示せ。

**例 3.2.7 (トーラスの曲面積)** 空間内の  $xz$  平面内の中心  $(c, 0, 0)$ , 半径  $r$  の円周 (ただし  $c > r > 0$  とする) を、 $z$  軸のまわりに回転してできる曲面 (トーラス, 輪環面) の曲面積を求めよ。

(解)  $xy$  平面内の円

$$\begin{cases} x = c + r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

を  $z$  軸のまわりに回転したもののなので、

$$\varphi(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} (c + r \cos \theta) \cos \phi \\ (c + r \cos \theta) \sin \phi \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad ((\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$$

で定義されるパラメーター曲面とみなせる。

$$\varphi_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \phi \\ -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \varphi_\phi = \begin{pmatrix} -(c + r \cos \theta) \sin \phi \\ (c + r \cos \theta) \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\varphi_\theta \times \varphi_\phi = \begin{pmatrix} -(c + r \cos \theta)r \cos \phi \cos \theta \\ -(c + r \cos \theta)r \sin \phi \cos \theta \\ -(c + r \cos \theta)r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

これから

$$\|\varphi_\theta \times \varphi_\phi\|^2 = (c + r \cos \theta)^2 r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + (c + r \cos \theta)^2 r^2 \sin^2 \theta = (c + r \cos \theta)^2 r^2$$

であるから  $\|\varphi_\theta \times \varphi_\phi\| = (c + r \cos \theta)r$ . ゆえに

$$\mu_c(S) = \iint_{\substack{\theta \in [0, 2\pi] \\ \phi \in [0, 2\pi]}} (c + r \cos \theta)r d\theta d\phi = 2\pi r \int_0^{2\pi} (c + r \cos \theta) d\theta = (2\pi)^2 rc = 4\pi^2 rc. \blacksquare$$



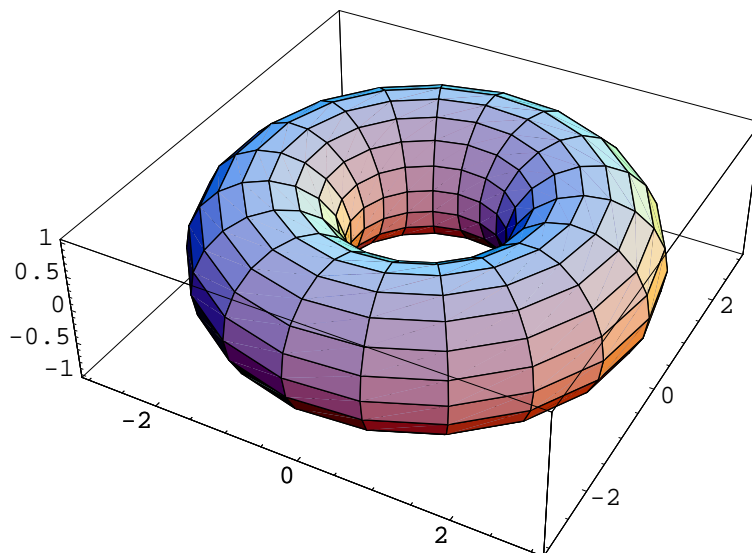


図 3.2: (Mathematica でのトーラスの描画)  $c=2$ ;  $r=1$ ;

`ParametricPlot3D[(c+r Cos[t])Cos[p],(c+r Cos[t])Sin[p], r Sin[t]],{t,0,2Pi},{p,0,2Pi}]`

**注意 3.2.8** パップス<sup>5</sup>・ギュルダン<sup>6</sup>の定理「平面図形を直線軸の回りに回転してできる回転体の体積は、その平面図形の面積に重心の移動距離 (重心とその直線軸との距離の  $2\pi$  倍) の積に等しい」の曲面積バージョン「平面曲線を回転して出来る回転面の面積は、曲線の長さに、曲線の重心の移動距離 (軌跡である円周の長さ) をかけたものに等しい」がある (例えば小林 [8] を見よ)。それを使うと、 $2\pi c \times 2\pi r = 4\pi^2 rc$  となることは明らか。 ■

**問 回転放物面** (paraboloid of revolution)  $z = x^2 + y^2$  ( $x^2 + y^2 \leq 1$ ) の曲面積を求めよ。(答:  $\pi(5\sqrt{5} - 1)/6$ )

### 3.2.2 パラメーターの取り方によらないこと、曲面の向き

線積分は曲線のパラメーターの取り方によらないという定理があったが、面積分でもそれに相当する事実がある。曲面にも「向き」があることを示唆する結果でもあって重要である。

<sup>5</sup>アレキサンドリアのパップス (Pappus of Alexandria, 320 年頃) には、“Synagoge of Mathematical collection (数学集成, 全 8 巻, 325 年頃)” という著作がある。三角形の中線定理にも名を残しているし、射影幾何学の発端となった定理でも有名である。

<sup>6</sup>Paul Guldin (1577–1643). 1640 年に Guldin の定理を発表した (Pappus の結果を知っていたかどうかは不明)。

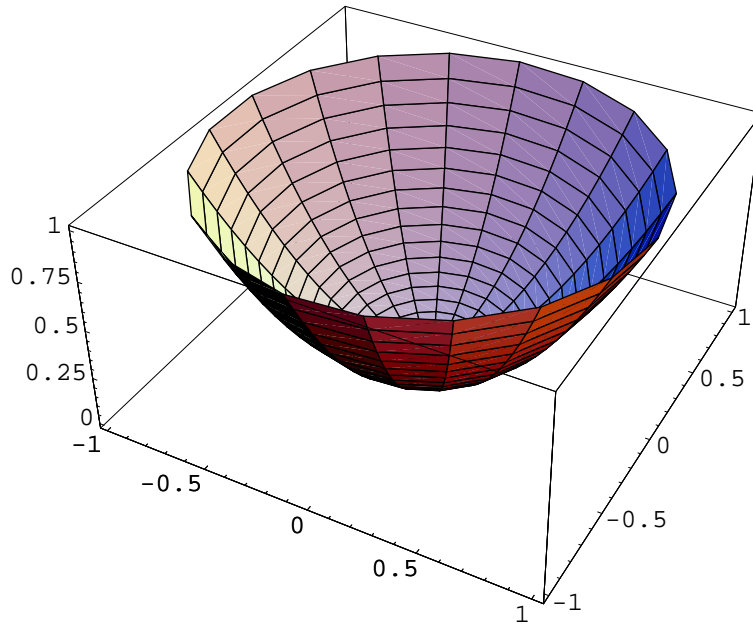


図 3.3: 回転放物面  $z = x^2 + y^2$  ( $x^2 + y^2 \leq 1$ )

(Mathematica で) `ParametricPlot3D[{r Cos[t], r Sin[t], r*r}, {r, 0, 1}, {t, 0, 2Pi}]`

**命題 3.2.9**  $S: \mathbf{r} = \varphi(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) と  $\tilde{S}: \mathbf{r} = \tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v})$  ( $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D}$ ) を  $C^1$  級正則パラメーター曲面で、その像は等しい ( $S^* = \tilde{S}^*$ ) とするとき、次の (1), (2) が成り立つ。

(1)  $\Phi: \tilde{D} \ni (\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (u, v) = \varphi^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v})) \in D$  とその逆写像  $\Phi^{-1}$  はともに  $C^1$  級で、

$$(3.8) \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{v}} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

このヤコビアン  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}$  ( $= \det \Phi'$ ) は  $\tilde{D}$  上で定符号である (すなわち、つねに  $\det \Phi' > 0$  であるか、またはつねに  $\det \Phi' < 0$ )。

(2) さらに  $D$  と  $\tilde{D}$  が有界 Jordan 可測な閉領域であるならば、任意の連続関数  $f: S^* \rightarrow \mathbf{R}$  に対して

$$\int_S f \, d\sigma = \int_{\tilde{S}} f \, d\sigma.$$

特に  $S$  と  $\tilde{S}$  の曲面積は等しい。

### 証明

(1)  $\varphi: D \rightarrow S^*$ ,  $\tilde{\varphi}: \tilde{D} \rightarrow \tilde{S}^*$  はともに全単射であるから、 $\Phi := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}: \tilde{D} \rightarrow D$  が定義でき、全単射である。また  $\Phi^{-1} = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ 。逆関数定理を用いてこれらは  $C^1$  級であることが証明できる<sup>7</sup>。

<sup>7</sup>証明のアウトライン: 定義域の各点で  $\varphi_u \times \varphi_v \neq \mathbf{0}$  であるから、 $\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$ ,  $\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$ ,  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$  のいずれか一つは 0 でない。例えば  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$  の場合、逆関数定理によって、局所的に  $(u, v)$  は  $(x, y)$  の  $C^1$  級関数として解ける:  $\exists \psi$  s.t.  $(u, v) = \psi(x, y)$ 。このとき  $\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \psi(\tilde{\varphi}_1(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{\varphi}_2(\tilde{u}, \tilde{v}))$  となるので  $\Phi$  は  $C^1$  級である。

さて、チェイン・ルールによって

$$\mathbf{r}_{\tilde{u}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \mathbf{r}_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \mathbf{r}_v, \quad \mathbf{r}_{\tilde{v}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \mathbf{r}_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \mathbf{r}_v$$

であるから、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\tilde{u}} \times \mathbf{r}_{\tilde{v}} &= \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \mathbf{r}_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \mathbf{r}_v \right) \times \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \mathbf{r}_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \mathbf{r}_v \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_u + \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_v \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} - \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \right) \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \\ &= \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v. \end{aligned}$$

$\Phi$  と  $\Phi^{-1}$  はともに  $C^1$  級なので、到るところ  $\Phi'(\Phi^{-1})' = I$  ( $I$  は単位行列). 特に  $\det \Phi' = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \neq 0$  である. 定義域  $\tilde{D}$  は連結であるから、符号は一定である<sup>8</sup>.

(2) 定義より

$$\int_S f \, d\sigma = \iint_D f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv.$$

$(u, v) = \Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v})$  と置換積分すると、積分範囲は  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D}$  になり、

$$du \, dv = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u} \, d\tilde{v}, \quad \tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \varphi(u, v)$$

となるので、

$$\int_S f \, d\sigma = \iint_{\tilde{D}} f(\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v})) \|\varphi_u \times \varphi_v\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u} \, d\tilde{v}.$$

(1) で示したように

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| = \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|$$

であるから、

$$\int_S f \, d\sigma = \iint_{\tilde{D}} f(\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v})) \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u} \, d\tilde{v} = \int_{\tilde{S}} f \, d\sigma. \blacksquare$$

**注意 3.2.10** 上の (2) の証明の議論は (少々形式的ではあるが)、

$$\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u} \, d\tilde{v} = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| \|\varphi_u \times \varphi_v\| \cdot \left| \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \right| du \, dv = \|\varphi_u \times \varphi_v\| du \, dv$$

と 1 行にまとめることも出来るだろう. これから、面積要素

$$d\sigma = \|\varphi_u \times \varphi_v\| du \, dv$$

はパラメーターの取り方によらない、ということが出来る. ■

**注意 3.2.11** 式 (3.8) の幾何学的意味を説明しておく. まず、 $\varphi_u \times \varphi_v$  と  $\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}$  は、ともに一つの曲面の接平面の法線ベクトルであるから、方向が同じことは明らかである. 長さについては、

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\| &= \text{“}uv \text{ 平面の微小図形を } \mathbf{R}^3 \text{ に写すときの面積の拡大率”}, \\ \|\varphi_u \times \varphi_v\| &= \text{“}\tilde{u}\tilde{v} \text{ 平面の微小図形を } \mathbf{R}^3 \text{ に写すときの面積の拡大率”} \end{aligned}$$

<sup>8</sup>( $\det \Phi'$ )( $\tilde{D}$ ) は  $\mathbf{R}$  の連結部分集合、すなわち区間であるから、正と負の値を含めば、0 も含むことになり、矛盾が生じる.

であることから、

$$\frac{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = \text{“写像 } (\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (u, v) \text{ の面積拡大率”} = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right|$$

が成り立つことが分かる。以上から、

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}} = \pm \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} (\varphi_u \times \varphi_v)$$

となるが、実は  $\pm$  は単に  $+$  で OK ということである。■

**定義 3.2.12 (正則パラメーター曲面の標準的な単位法線ベクトル)**  $S: \mathbf{r} = \varphi(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) が  $C^1$  級正則パラメーター曲面であるとき、

$$\mathbf{n} := \frac{\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\|} \quad ((u, v) \in D)$$

をパラメーター曲面  $S$  の標準的な単位法線ベクトルと呼ぶ (この文書だけの用語である)。

標準的な単位法線ベクトルは、明らかに  $\varphi(u, v)$  における  $S$  の接平面の法線ベクトルで、長さが 1 である。

像が一致する 2 つの正則パラメーター曲面  $S: \mathbf{r} = \varphi(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ),  $\tilde{S}: \mathbf{r} = \tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v})$  ( $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D}$ ) があるとき、それらの標準的な単位法線ベクトル

$$\mathbf{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}, \quad \tilde{\mathbf{n}} = \frac{\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}}{\|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|},$$

の関係を考えよう。(3.8) から

$$\tilde{\mathbf{n}} = \left( \text{sign} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right) \mathbf{n}$$

が成り立つことが分かる。ここで  $\text{sign}$  は実数の符号を表す記号である:

$$\text{sign } x := \begin{cases} 1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (x < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

$\Phi := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$  とおくと、上の命題で示したように

- (a)  $\det \Phi' > 0$  on  $D$
- (b)  $\det \Phi' < 0$  on  $\tilde{D}$

のいずれか一方が成立する。(a) の場合  $\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{n}}$ , (b) の場合  $\mathbf{n} = -\tilde{\mathbf{n}}$  が成り立つ。

(a) が成り立つとき、2 つのパラメーター曲面  $S$  と  $\tilde{S}$  は同じ向きであるという。また (b) が成り立つとき、 $S$  と  $\tilde{S}$  は反対の向きであるという。

「パラメーター曲面の向き」は、パラメーター曲面の標準的な単位法線ベクトルの (ベクトルとしての) 向きのことだと考えて構わない。

明らかに「同じ向き」という関係は同値関係で、同値類の個数は 2 である。

### 3.3 ベクトル場の法線面積分

前節で述べたように、正則パラメーター曲面  $S: \mathbf{r} = \varphi(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) の標準的単位法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \frac{\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\|}.$$

これから

$$\begin{aligned} \mathbf{n} d\sigma &= \frac{\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)}{\|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\|} \|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\| du dv \\ &= \varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v) du dv. \end{aligned}$$

これを面積要素の記号を太字に替えた  $d\boldsymbol{\sigma}$  で表すことがある:

$$(3.9) \quad d\boldsymbol{\sigma} := \mathbf{n} d\sigma = \varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v) du dv.$$

**定義 3.3.1 (ベクトル場の法線面積分)**  $C^1$  級の正則パラメーター曲面  $S: \mathbf{r} = \varphi(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) において、 $D$  が有界 Jordan 可測な閉領域であるとき、 $S$  の像  $S^*$  において定義された連続なベクトル場  $\mathbf{f}$  に対して、ベクトル場  $\mathbf{f}$  の  $S$  上の法線 (成分の) 面積分を

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_S \mathbf{f} \cdot d\boldsymbol{\sigma} := \iint_D \mathbf{f}(\varphi(u, v)) \cdot (\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)) du dv \quad (\cdot \text{ は内積を表わす})$$

で定める。

$\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$  は、 $\mathbf{f}$  の法線方向の成分である<sup>9</sup>。

**例 3.3.2 (法線面積分の物理的な解釈)** 水 (一般に非圧縮流体で良い) の流れがあり、その速度場を  $\mathbf{f}$  とする。水中におかれた仮想的な曲面  $S$  をよぎって、単位時間に流れ出る水の体積  $V$  を考えよう。

- (1)  $\mathbf{f}$  が定数ベクトル場で、 $S$  は平らかつ  $\mathbf{f}$  に垂直である場合  
 図 3.4 のような柱体 (底面積  $S$ , 高さ  $\|\mathbf{f}\|$ ) の体積であるから、

$$V = \|\mathbf{f}\| S.$$

- (2)  $\mathbf{f}$  が定数ベクトル場で、 $S$  は平らであるが、 $\mathbf{f}$  に垂直とは限らない場合  
 この場合は斜めに傾いた柱体 (底面積  $S$ , 高さ  $\|\mathbf{f}\| \cos \theta$ , ここで  $\theta$  は  $\mathbf{f}$  と曲面  $S$  の法線方向のなす角度) の体積で、

$$V = (\|\mathbf{f}\| \cos \theta) S.$$

ここで、曲面  $S$  の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を導入すると、

$$V = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} S$$

と書き直すことができる。

- (3) 一般の場合  
 曲面  $S$  を  $S = \bigcup_{j=1}^{\ell} S_j$  と分割して、各小部分  $S_j$  はほぼ平らで単位法線ベクトル  $\mathbf{n}_j$ ,  $S_j$  上で  $\mathbf{f}$  はほぼ定数ベクトル  $\mathbf{f}_j$  に等しいとみなせるとすると、

$$V \doteq \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{n}_j S_j$$

<sup>9</sup> $\mathbf{n}$  は単位ベクトルであることに注意する。単位ベクトル  $\mathbf{e}$  とベクトル  $\mathbf{a}$  の内積  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}$  は、 $\mathbf{a}$  の  $\mathbf{e}$  への射影 (成分) を表している。例えば、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j = a_j$  の第  $j$  成分となる。

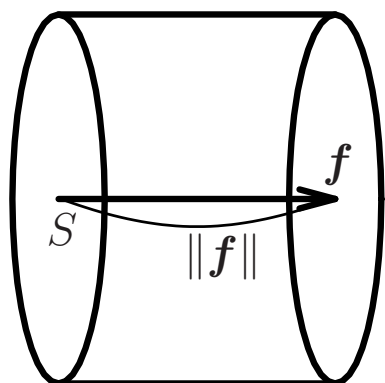


図 3.4:  $V = \|f\|S$

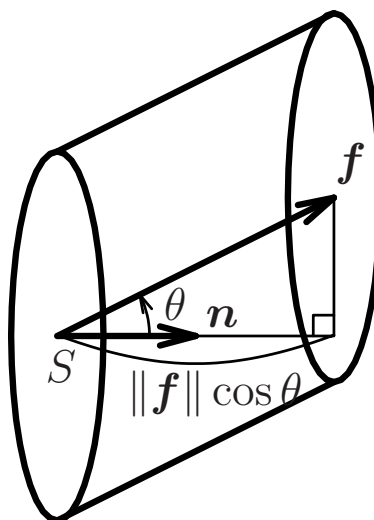


図 3.5:  $V = \|f\| \cos \theta \times S = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} S$

であり、曲面がなめらかであれば、分割を細かくしていくと近似の精度を上げられることが分かるであろう。

適当な条件下で分割を細かくして行った極限では、右辺が

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

に収束することが示せる。これから

$$V = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

が成り立つと考えられる。

応用上は、 $S$  が一つの領域  $\Omega$  の境界  $\partial\Omega$  全体である場合が特に重要で、この場合、法線面積分は  $\Omega$  から水がどれだけ出入りするかを表すことになる。■

参考 3.3.1 (法線面積分の成分による表現)  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$  と書くと、

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_D \left( f_1(\varphi(u, v)) \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u, v)} + f_2(\varphi(u, v)) \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u, v)} + f_3(\varphi(u, v)) \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} \right) du dv.$$

これは微分形式の記法 (この講義では扱わない) を用いると次のように書ける。

$$\iint_D f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

ここで  $\wedge$  は微分形式の外積 (exterior product) を表す。つまり

$$dx_i \wedge dx_j = \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} du dv.$$

次のようにまとめておくと便利かも知れない。

$$\mathbf{n} d\sigma = \mathbf{d}\sigma = \varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v) du dv = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u, v)} \\ \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u, v)} \\ \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} \end{pmatrix} du dv = \begin{pmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \\ dx_1 \wedge dx_2 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

**命題 3.3.3** (法線面積分は向きを変えないパラメーターの取り方によらない) 2つの  $C^1$  級正則パラメーター曲面

$$\begin{aligned} S : \mathbf{r} &= \boldsymbol{\varphi}(u, v) \quad ((u, v) \in D), \\ \tilde{S} : \mathbf{r} &= \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad ((\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D}) \end{aligned}$$

の像  $S^*$ ,  $\tilde{S}^*$  が一致し、かつ同じ向きを持つならば、 $S^*$  上の任意の連続ベクトル場  $\mathbf{f} : S^* \rightarrow \mathbf{R}^3$  について

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\tilde{S}} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \, d\sigma$$

が成り立つ。ただし、 $\mathbf{n}$ ,  $\tilde{\mathbf{n}}$  はそれぞれ  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$  から自然に定まる単位法線ベクトルとする。

**証明** 命題 3.2.9 の証明中の記号をそのまま用いる。

向きが同じという仮定から、

$$\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} > 0 \quad ((u, v) \in D)$$

が成り立つので、

$$d\tilde{u} \, d\tilde{v} = \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \, du \, dv.$$

ゆえに置換積分を実行すると

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{S}} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \, d\sigma &= \iint_{\tilde{D}} \mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{u}, \tilde{v})) \cdot (\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\tilde{u}} \times \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\tilde{v}}) \, d\tilde{u} \, d\tilde{v} \\ &= \iint_D \mathbf{f}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}(u, v))) \cdot \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} (\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v) \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \, du \, dv \\ &= \iint_D \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(u, v)) \cdot (\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v) \, du \, dv \\ &= \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \blacksquare \end{aligned}$$

あるいは、同じ向きを持つという仮定から  $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$  であるから、 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{n}}$  と被積分関数が等しくなるので、命題 3.2.9 を適用して…と言っても良いであろう。

また、もしも  $S$  と  $\tilde{S}$  が逆向きであれば、面積分は符号が異なる

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = - \int_{\tilde{S}} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{n}} \, d\sigma$$

が成り立つことは明らかであろう。

**参考 3.3.2** 一般の曲面、つまり複数のパラメーター曲面を貼り合わせてできる曲面については、「向きづけ可能」という概念がある。向きづけ可能でない曲面の例としては、Möbius<sup>10</sup> の発見した **Möbius の帯** (Möbius strip または Möbius band) が有名である。

— もしこれまで一度も Möbius の帯を作ったことがないなら、紙、ハサミ、糊 (またはセロテープ) を用意して作ってみること。それからお約束の「真ん中の線に沿って切るを2回」してみよう。■

**例 3.3.4 (球面  $S$  上の面積分)**  $S$  を球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  として、次の各ベクトル場  $\mathbf{f}$  の、 $S$  上の法線面積分を求めよ。

(1)  $\mathbf{f}(x, y, z) := (\alpha, \beta, \gamma)^T$  (定数ベクトル場).

<sup>10</sup>August Ferdinand Möbius (1790–1868, 現ドイツの Schulpforta に生まれ、Leipzig にて没する). Gauss の弟子。天文学者かつ数学者であるが、重心座標の導入や射影幾何学の基礎づけなど、数学への貢献が大きい。

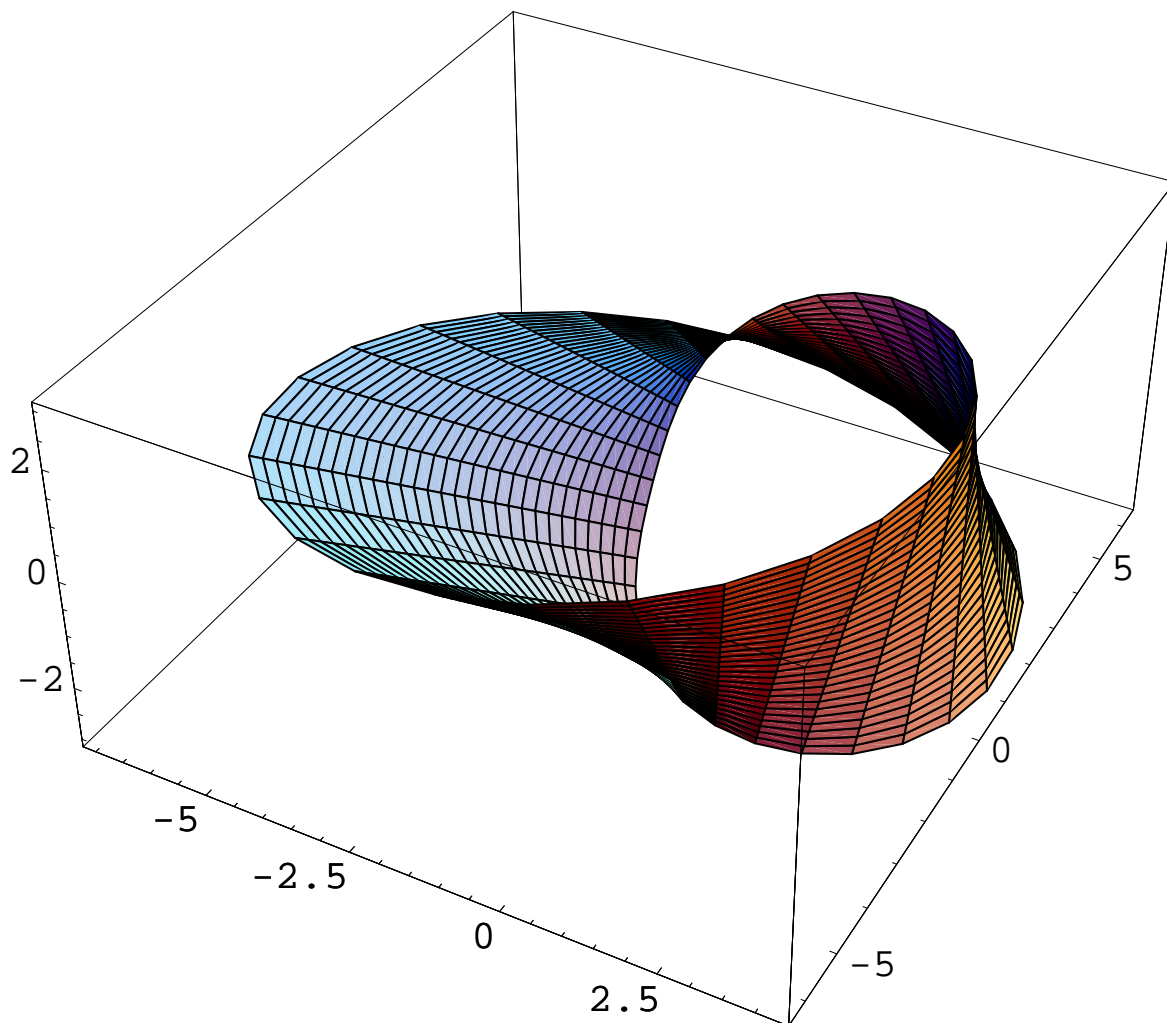


図 3.6: Möbius の帯 (法線ベクトルを考えてみよう)

a=4;b=3;

ParametricPlot3D[

{(a-r Sin[p/2])Cos[p],(a-r Sin[p/2])Sin[p],Cos[p/2]},  
 {r,-b,b},{p,0,2Pi}]



$$(2) \mathbf{f}(x, y, z) := (y, z, x)^T.$$

$$(3) \mathbf{f}(x, y, z) := \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)^T.$$

解答 まず、球面  $S$  を普通の極座標によってパラメータづけしたときの面積要素は

$$(3.10) \quad d\sigma = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

であったが (注意 3.1.4)、それを導出したところで、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} = R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

という計算をしてあった。これから

$$(3.11) \quad \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \phi} \, d\theta \, d\phi = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

という  $\mathbf{n} \, d\sigma$  を表す公式が得られる。

この結果は、 $S$  上の点  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  における外向き単位法線ベクトルを

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

のように求めても得られる (向きのチェックは必要であるが…)

$$(1) \mathbf{f} \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ (定数ベクトル場) であれば、}$$

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{\substack{\theta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi]}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \dots = 0.$$

$$\left( \int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\phi = \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \, d\theta = 0 \text{ などを使った。} \right)$$

$$(2) \mathbf{f} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \text{ であれば、}$$

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= \iint_{\substack{\theta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi]}} \begin{pmatrix} R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \\ R \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \iint_{\substack{\theta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi]}} R^3 (\sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + \cos \theta \sin \theta \sin \phi + \cos \theta \sin \theta \cos \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \dots = 0. \end{aligned}$$

(3)  $\mathbf{f} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  のとき、 $S$  上  $\mathbf{f} = \frac{1}{R^2} \mathbf{n}$  であるから、

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{1}{R^2} \int_S d\sigma = 4\pi.$$

これらの計算を自分でやってみると、面積分の計算はたとえ結果が簡単であっても、途中の計算は結構面倒であると感じる人もいるであろう。実はこれらの問題は、次節で紹介する Gauss の発散定理を用いると簡単に計算できる。Gauss の発散定理の威力を示すためのサクラの問題<sup>11</sup>いや、領域を囲むような「閉曲面」上の面積分がとりわけ重要で、その場合は Gauss の定理が登場するのは極めて自然ということであり、それほどズルいことをしているわけではない。■

### 3.4 Gauss の発散定理

応用上非常に重要な「閉曲面<sup>11</sup>」上の面積分は「三重積分に変換できる」。もう少し一般に、有限個の曲面で囲まれる領域に拡張することもできる。すなわち、次の定理が成り立つ。

**定理 3.4.1 (Gauss の発散定理)**  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^3$  の有界領域、 $S = \partial\Omega$  は有限個の  $C^1$  級正則曲面からなるとするとき、 $\bar{\Omega}$  の近傍で定義された  $C^1$  級のベクトル場  $\mathbf{f}$  に対して

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

ただし  $\mathbf{n}$  は  $S$  の外向き単位法線ベクトルである。

**参考 3.4.1 (Gauss の発散定理の別の表現)** 上の定理のように「ベクトル場の発散の積分」に関する定理として書いてある本が多いが、

$$(3.12) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx = \int_S u n_i \, d\sigma \quad (1 \leq i \leq 3)$$

の形の公式で書く流儀もある ( $n_i$  は  $\mathbf{n}$  の第  $i$  成分である—古い本では、 $n_1, n_2, n_3$  の代わりに、法線方向余弦<sup>12</sup>  $l, m, n$  を使って定理が書かれている)。見掛けは異なるが<sup>13</sup>数学的には同等であることを各自確かめてみよう。後述の (3.13) を証明するには、この形の公式 (3.12) の方が便利である。■

**注意 3.4.2 (簡単?それとも難しい?)** Gauss の定理に代表される積分定理は、きちんと述べて証明するのが大変だという評判がある。これはある意味で本当だが、大変さの大部分は「きちんと述べる」部分にあり、証明自体は実はそれほど難しくない (人によっては「簡単だ」と言う)。ここでは、 $\Omega$  が縦線領域

$$\Omega = \{(x, y, z); (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) < z < \varphi_2(x, y)\}$$

である場合に、証明のさわりを見てみよう。Fubini の定理と微分積分学の基本定理によって、

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial f_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz &= \iint_D \left( \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy \\ &= \iint_D (f_3(x, y, \varphi_2(x, y)) - f_3(x, y, \varphi_1(x, y))) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

<sup>11</sup>閉曲面の定義と、その基本的な性質については、付録 A.6 を見よ。

<sup>12</sup>法線が  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸となる角をそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき、 $l = \cos \alpha, m = \cos \beta, n = \cos \gamma$  である。実は  $l = n_1, m = n_2, n = n_3$  であり、単位法線ベクトルという言葉が普及した現在、「方向余弦」という言葉はあまり使われない。

<sup>13</sup>この違いを強調する人もいるが、ようするに同じである、と言って構わないと思う。

この右辺の第1項、第2項がそれぞれ  $\partial\Omega$  の上側、下側における面積分になる:

$$\int_{S_{\uparrow}} f_3 n_3 d\sigma = \iint_D f_3(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy, \quad \int_{S_{\downarrow}} f_3 n_3 d\sigma = - \iint_D f_3(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy.$$

ゆえに

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f_3}{\partial z} dx dy dz = \int_S f_3 n_3 d\sigma.$$

後は同じことを  $f_1, f_2$  について行えば Gauss の発散定理が得られる。■

**問 27.** (後始末)  $z = \varphi(x, y)$  を自然にパラメーター曲面とみなすとき、

$$\mathbf{n} d\sigma = \begin{pmatrix} -\varphi_x \\ -\varphi_y \\ 1 \end{pmatrix} dx dy, \quad n_3 d\sigma = dx dy$$

となることを示せ。

**参考 3.4.2 (物理的な解釈)** 前節の例 3.3.2 で説明した、ベクトル場を流体の速度場とみなす解釈では、

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

の左辺は  $\Omega$  内にある湧き出しの総量、右辺は  $S$  を通って  $\Omega$  の外部に流れ出す流体の**流束 (flux)** とみなせる<sup>14</sup>。

ベクトル場を水の流れの速度場でイメージすると、この面積分はつねに 0 になると思うかもしれない。実際、水は非圧縮流体であるので、 $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$  が成り立ち、 $\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$  となる<sup>15</sup>。

しかし、 $\Omega$  の内部で発生したり、消滅したりするようなものの流れの場合は、値が 0 になるとは限らない。例えば熱の流れの場合、化学反応 (例えば燃焼) により熱が発生したり、あるいは逆に消滅することもありうるので、 $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$  とは限らない。また、静電場を考えると、 $S$  の内部に電荷が存在すると、 $\operatorname{div} \mathbf{E}$  は  $\mathbf{0}$  にはならなくなる。実際、 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \text{“電荷密度”}$  が成り立つ。特に原点に単位電荷が置かれた場合は、 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \delta$  ( $\delta$  は Dirac のデルタ関数) が成り立つ。■

(そのうち図を載せよう。授業では、ノートに絵を用意して、黒板に大きく描くこと。)

**注意 3.4.3 (微積分の基本定理の一般化であること)** 3次元の場合の定理を書いたが、何次元でも成立する。2次元の場合は、先に説明した Green の定理である。1次元の場合は、 $\mathbf{f} = F, \Omega = (a, b)$  として、

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

となるが、右辺が 1次元の場合の  $\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  に相当する。 $\partial\Omega = \{a, b\}$  であり、

$$\mathbf{n} = \begin{cases} 1 & (x = b) \\ -1 & (x = a) \end{cases}$$

となることを注意しよう。このことから分かるように、Gauss の発散定理は、微分積分学の基本定理の一般化である。上で見たように証明の本質的部分にも、1変数の微分積分学の基本定理が使われることを思い出すと、

<sup>14</sup>電磁気学を学んだ人は、電束 (electric flux), 磁束 (magnetic flux) という言葉になじみがあるかもしれない。

<sup>15</sup>2次元の速度場 (浅い川の水の流れ) であれば、上からホースで水を撒いたり、川底から水を逃がしたりして、 $\operatorname{div} \mathbf{f} \neq 0$  でない状況が無理なく生じる。3次元では、何か SF 的な想定でもしないと  $\operatorname{div} \mathbf{f} \neq 0$  とはできない。

## 発散定理 = 微分積分学の基本定理

と言って構わないと思う。■

**例 3.4.4 (例 3.3.4 の見直し)** 例 3.3.4 (1), (2) の計算は、 $\Omega = B(0; R)$  に対して Gauss の定理を適用し簡単になる。

(1)  $\mathbf{f}$  が定数ベクトル場であれば、明らかに  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ 。ゆえに

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 0.$$

(2)  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$  であれば、暗算で  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ 。ゆえに

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 0.$$

(3)  $\mathbf{f} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  のとき、 $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$  となるが、 $\mathbf{f}$  は原点で定義されていないので、 $S$  が囲む領域 (すなわち球の内部) では Gauss の定理は成り立たない。その代わりに原点を包み込む任意の閉曲面  $S'$  に対して

$$\int_{S'} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

が同じ値 (既に計算した結果から  $4\pi$ ) を持つという不思議な結果が得られる。■

**余談 3.4.1** 上の例の (3) で得られた、原点を包み込む任意の閉曲面  $S$  に対して

$$\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 4\pi$$

という結果は、電磁気学の **Gauss の法則**<sup>16</sup> に相当している。「クーロンの法則から Gauss の法則を導くこと」を実行したことになる。

電磁気学の本では、Gauss の法則を説明するところで、**電気力線** というものを導入する。電束  $\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  は、 $S$  を貫く電気力線の本数となる。このことと電気力線についてのいくつかの性質を認めると、Gauss の法則は当たり前のことのようにも見えてくる。人によっては、Gauss の法則を証明するために Gauss の発散定理は不要であると勘違いするかもしれない。しかし、電荷の存在しないところで、増えも減りもしない電気力線の性質を保証してくれるのは、実は上の例で述べた (示した)  $\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  の不変性に他ならず、クーロンの法則からそれを導くには Gauss の発散定理のお世話になる必要がある。もっとも、一度それを確かめてしまえば、電気力線は便利な思考の道具である。

何か理論の基礎固めをするには数学が必要だが、それが十分こなれてくると、「いくつかの法則 (これは天下りに認める<sup>17</sup>) と簡単な数学 (人によっては、電気力線は数学とも考えないだろう) で使えるようになる」ということだろうか (脚注に書いた “Gauss の法則の発見者達 = 積分定理の発見者達” というのは、面白い事実だと感じている)。■

<sup>16</sup> 同じ人の名前がついているため、混同しかねないので、並べて区別を強調しておく、Gauss の発散定理というのはベクトル場の法線面積分に関する数学の定理であり、Gauss の法則というのは静電場に関する電磁気学の法則である。ちなみに、太田 [3] によると、Gauss の法則を発見したのは、Gauss, Green, Kelvin であるという。ベクトル解析の積分公式の発見者と言われる 3 人が並んでいるのは偶然ではないのだろう (Kelvin は Stokes の定理の発見者である)。

<sup>17</sup> 何でも「なぜだ?」と考える人には数学の存在が見えて、そうでない人には数学が見えない。

**例 3.4.5 (静電場の Gauss の法則の微分形と積分形の同値性)** 静電場  $\mathbf{E}$  に関する Gauss の法則には、二通りの表し方がある。

**微分形**  $\mathbf{E}$  は次の微分方程式を満たす。ここで  $\rho$  は電荷密度である。

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0.$$

**積分形** 任意の閉曲面  $S$  に関し、 $S$  を貫く電気力線の本数は  $Q/\epsilon_0$  である。ここで  $Q$  は  $S$  の内部にある総電荷量である。

Gauss の法則の微分形と積分形は同値な法則である。例えば、微分形から積分形を導くには、電気力線は接ベクトルが  $\mathbf{E}$  と同じ方向で密度 (単位面積当りの本数) が  $\|\mathbf{E}\|$  と比例していることから、 $d\sigma$  を貫く本数は  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  で、Gauss の発散定理を利用して、

$$\begin{aligned} S \text{ を貫く電気力線の本数} &= \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \frac{\rho}{\epsilon_0} dx dy dz = \frac{\rho \mu_3(\Omega)}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

とすればよい。■

**例 3.4.6 (アルキメデスの浮力の原理)** 重力場の下で水中にある物体  $\Omega$  は水圧を受ける。 $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in S = \partial\Omega$  における微小面積  $d\sigma$  の受ける力は

$$-p(\mathbf{x}) \mathbf{n} d\sigma.$$

ここで  $p(\mathbf{x})$  は水圧であるが、一様な重力場の場合は

$$p(\mathbf{x}) = -\rho g z + C$$

となる。ただし、 $\rho$  は水の密度、 $g$  は重力加速度、 $C$  は積分定数である。

$\Omega$  の全表面  $S$  にかかる水圧による力の総和

$$\mathbf{P} := \int_S -p \mathbf{n} d\sigma$$

がいわゆる浮力となる。実はすぐ後で示すように

$$(3.13) \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \mu_3(\Omega) g \end{pmatrix}$$

となる。つまり、方向は鉛直上向きで、大きさは物体が押し上げる水の重さ<sup>18</sup>である (アルキメデスの浮力の原理)。

**(3.13) の証明**  $(P_1, P_2, P_3)^T := \mathbf{P}$  とおく。

$$P_j = - \int_S p n_j d\sigma \quad (j = 1, 2, 3)$$

であるが、以下  $P_3$  を計算する。 $\mathbf{f} := (0, 0, p)^T$  とおくと

$$\begin{aligned} P_3 &= - \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} dx dy dz = \iiint_{\Omega} \rho g dx dy dz = \rho g \iiint_{\Omega} dx dy dz \\ &= \rho g \mu_3(\Omega). \end{aligned}$$

<sup>18</sup>体積  $\mu_3(\Omega)$  に水の密度  $\rho$  をかけたものが押し上げる水の質量で、それに重力加速度  $g$  をかけて重さ (重力) になる。

同様にして  $P_1 = P_2 = 0$  となることが分かる。

もちろん紀元前の人であるアルキメデスが上のような議論をしたはずがない<sup>19</sup>。物体のしめる領域を、物体のかわりに水で満たしてみればつりあうのは物理的に「明らか」であるから、「浮力 =  $\Omega$  をみたく水にかかる圧力」である。

(…でも、この発散定理を使う証明は魅力的だと私は思います。) ■

### 3.5 Stokes の定理

空間内の閉曲線上の接線積分を、その閉曲線を「ふち」に持つ曲面の上での法線面積分に変換できることを主張するのが **Stokes の定理** である。Green の定理の拡張とみなせる。

**定理 3.5.1 (Stokes の定理, 回転量定理)**  $C: \mathbf{r} = \psi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) は、 $\mathbf{R}^2$  内の区分的  $C^1$  級 Jordan 閉曲線で、 $C$  が囲む閉領域を  $D$  とする。 $C$  の向きは、進行方向の左手に  $D$  を見る向きであるとする。 $S: \mathbf{r} = \varphi(u, v)$  ( $(u, v) \in D$ ) を  $\mathbf{R}^3$  内の  $C^2$  級正則パラメーター曲面で、その像  $S^* = \varphi(D)$  を含むある開集合上の  $C^1$  級ベクトル場  $\mathbf{f}$  に対して、

$$\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

が成り立つ。ただし  $\mathbf{n}$  は正則パラメーター曲面  $S$  の標準的な単位法線ベクトルで、 $\partial S$  は  $\mathbf{r} = \varphi(\psi(t))$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) で与えられる閉曲線とする。

応用上は、 $\varphi$  と  $\psi$  は与えられずに、図形としての曲面と曲線のみが与えられていることがあり、向きのチェックが問題になるが、「閉曲線  $\partial S$  の向きに従って右ネジを回すとき、ネジが進む方向を  $S$  の単位法線ベクトルの向きとする」というルールで解決できる。

この定理の証明は、補足 C.5 にまわす。

#### 例 3.5.2 曲面

$$S: z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

は、 $z$  軸の正の側を表とする ( $n_3 > 0$  となるように  $\mathbf{n}$  の向きを選ぶ)。このとき  $\mathbf{f} = (z^3 - y^3, x^3 - z^3, xyz)$  に対して  $\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  を求めよ。

(解)  $S$  の縁の閉曲線  $\partial S$  は  $xy$  平面上の単位円周で、

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T \quad (t \in [0, 2\pi])$$

で与えられる。向きも問題の条件に適合していることが分かる。ストークスの定理を適用して

$$\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

$\mathbf{f}(\varphi(t)) = (-\sin^3 t, \cos^3 t, 0)^T$ ,  $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)^T$  より

$$\mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sin^4 t + \cos^4 t = \frac{1}{4} \cos 4t + \frac{3}{4}$$

となるので、

$$\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = 2\pi \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi. \blacksquare$$

<sup>19</sup>とはいえ、アルキメデス (シラクサイの Archimedes, BC 287 頃–BC 212, 現イタリア (シチリア島) の Syracuse に生まれ、Syracuse にて没す) は面積、体積、重心を計算する達人であった。放物線が囲む図形の面積や、球の体積、表面積を厳密に求めたことは名高い。

例 3.5.3 (ファラデーの電磁誘導の法則の微分形と積分形の同値性) マクスウェルの方程式の1つである

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

はファラデーの電磁誘導の法則の微分形ともよばれる。これに対して

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

を積分形とよぶ。ストークスの定理を用いると両者の同値性が導ける。 ■

## 参考書案内

2年生ともなれば、一冊の本を独力で読むことにチャレンジしてはどうだろうか。

初めてベクトル解析を学ぶ人のための独習書としては、小林 [8] を奨めたい。ただし計算問題の解き方が載っているわけではない。

何か良く分からないことを調べる目的で本を読む場合には、やはりまずは杉浦 [13], [14] を見るべきであろう。誠実に書かれている。

岩堀 [1] は、今となっては記号が古かったり ( $dx \wedge dy$  でなく  $[dx, dy]$  と書くとか…これは微分形式の創始者である Cartan の流儀らしいが) するが、変に抽象が過ぎるところがなく、基本的なところからゆったりと書かれてあって、良い本である (最近の学生には地味に感じられてしまいそうな気がするが)。ベクトル解析の力学への応用に、相当なページ数を割いてあるのが、今となっては一つの大きな特徴かもしれない (私は色々とお世話になった)。

最近出版された本のうちで、清水 [12] は面白いと感じた。比較的コンパクトな分量のうちに微分形式まで説明してある。またベクトル解析の構築に寄与した数学者の紹介もされていて、楽しい読み物になっている (似たことをやりたかったのだが、先を越された感じがする)。

私自身はベクトル解析を電磁気の講義で学んだ。その際に参考書に指定されて以来お世話になっているファイマン他 [20] は非常に良い本であると思う。数学書ではないが数学科の学生にもお勧め<sup>20</sup>。もちろん古典的なベクトル解析の流儀で書かれている。

授業では、ついつい、物理と幾何学を線分の両端であるかのようにしゃべってしまうことがあるのだが、もちろんそんなことはない。深谷 [21] は、幾何学者の書いた電磁気学 (とベクトル解析) の本である。読んでみると色々な面白いことが出て来てわくわくする。

志賀 [11] も幾何学者が書いただけあって、微分形式の微積分としてのベクトル解析を解説した本になっている。共変テンソル場としての微分形式の親切でていねいな説明は出色である。ベクトル解析の計算をばりばりこなせるようになるぞ、という目的で読む本ではないが、お奨めできる (ただし、どちらかという、少し地力のついた3年生以上向けかもしれない)。

小松 [10] は珍しく解析学者の書いたベクトル解析の本である。歴史や、色々な分野への応用について言及され、また気になる人はとても気になるような事項の説明が満載されていて、私はとても面白く読めた。ベクトル解析について展望を得たい、という人は必読と言ってよい (ただし入門書とは言えないかもしれない…)。

宮島 [24] は最近出版された本で、幾何学以前の微分積分学としてのベクトル解析を、ページ数を惜しまずに解説してある。

---

<sup>20</sup>最近気付いたことだが、物理学の本には、数学者がさほど抵抗なく読めるものと、到底受け入れられないものがある。この『ファイマン物理学』は前者である。



## 関連図書

- [1] 岩掘 長慶, ベクトル解析 — 力学の理解のために —, 裳華房 (1960).
- [2] 太田 浩一, マクスウェル理論の基礎 — 相対論と電磁気学, 東京大学出版会 (2002).
- [3] 太田 浩一, マクスウェルの渦 アインシュタインの時計, 現代物理学の源流, 東京大学出版会 (2005).
- [4] 岡本 久, 知られざるグリーン, 数学セミナー, 2003 年 7 月号, 45–49.
- [5] ドナル・オシア著, 糸川洋訳, ポアンカレ予想を解いた数学者, 日経 BP 社 (2007).  
Donal O’Shea, The Poincaré Conjecture: In Search of the Shape of the Universe, Walker Publishing Company, Inc. (2007) の邦訳.
- [6] 垣田 <sup>かきた</sup>高夫, 柴田 <sup>よしひろ</sup>良弘, ベクトル解析から流体へ, 日本評論社 (2007).
- [7] 桂田 祐史, 多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 1 部, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf>.
- [8] 小林 昭七, 続 微分積分読本 — 多変数 — 第 2 版, 裳華房 (2002).
- [9] 小林 <sup>りょう</sup>亮・高橋 大輔, ベクトル解析入門, 東京大学出版会 (2003).
- [10] 小松 <sup>ひこさぶろう</sup>彦三郎, ベクトル解析と多様体 I, II, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1994, 1995).
- [11] 志賀 浩二, ベクトル解析 30 講, 朝倉書店 (1990).
- [12] 清水 勇二, 基礎と応用 ベクトル解析, サイエンス社 (2006).
- [13] 杉浦 光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会 (1980).
- [14] 杉浦 光夫, 解析入門 II, 東京大学出版会 (1985).
- [15] マイケル・スピヴァック著, 齋藤正彦訳, 多変数解析学, 東京図書 (1972).  
昔、参考書指定したら、購入できないものを指定するなど某筋からお叱りが来ました。てやんでい。2007 年復刊されたので (『スピヴァック 多変数の解析学』という書名になった)、しばらく入手可能か。
- [16] 中尾 <sup>みつひろ</sup>慎宏, 微分積分学, 近代科学社 (1987).
- [17] 一松 信, 解析学序説 上, 下, 裳華房 (1962, 1963).
- [18] 一松 <sup>ひとつまつ しん</sup>信, 微分積分学入門第一～四課, 近代科学社 (1989, 1990, 1990, 1991).  
2 次元ベクトル解析は第三課、3 次元ベクトル解析は第四課で扱われている。
- [19] 一松 信, ベクトル解析入門, 森北出版株式会社 (1997).
- [20] ファインマン, レイトン, サンズ著, 宮島 龍興 訳, ファインマン物理学 III 電磁気学, 岩波書店 (1986).

- [21] 深谷 賢治, 電磁場とベクトル解析, 岩波書店 (2004).
- [22] 藤野清次, ヘブライ語の Nebel (豎琴) を語源に持つナブラ  $\nabla$  について, 情報処理学会 研究報告「人文科学とコンピュータ」, No. 057, pp. 73–80 (2002), ネットで公開されている。
- [23] 溝畑 茂, 数学解析 (上, 下), 朝倉書店 (1976).
- [24] 宮島 静雄, 微分積分学としてのベクトル解析, 共立出版 (2007).
- [25] 森田 茂之, 微分形式の幾何学, 岩波書店 (2005).
- [26] 遠山 <sup>ひらく</sup> 啓, 数学入門 (下), 岩波新書 G5, 岩波書店 (1960).
- [27] Georges de Rham, Variétés Différentiables, Hermann, Paris (1955, 1960).  
G. ド・ラーム著, 高橋恒郎訳, 微分多様体: 微分形式・カレント・調和形式, 東京図書 (1974).  
(翻訳は現在は入手困難 — 東京図書だから)
- [28] J. W. Gibbs and E. B. Wilson, Vector Analysis, Yale Univ. Press (1901).
- [29] G. Green, An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, 1828. — ノティンガムのプロムリーハウス図書館で私費出版された。W. Thomson によって 1840 年にクレレ・ジャーナルに再版される。  
George Green, Mathematical Papers: Edited by N. M. Ferrers, Dover Publications (January 27, 2005) に収録されている。
- [30] Oliver Heaviside, Electromagnetic Theory, Vol. I, The Electrician, London, 1893.  
(現在でも出版社は違うけれども入手可能)
- [31] J. C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism, Clarendon Press (1873).  
(現在でも出版社は違うけれども入手可能)

# 付録 A 細かな補足

## A.1 区分的に $C^k$ 級

「区分的に  $C^k$  級」という言葉は良く出て来るが、正確な説明をさぼられることも多い。この「多変数の微分積分学 2」では「 $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  が区分的  $C^k$  級の曲線」という形で登場する。この場合、「曲線」という言葉の中に「連続」という条件が含まれているので、

$$\exists \ell \in \mathbf{N}, \exists \{t_j\}_{j=0}^{\ell} \text{ s.t. } \forall j \in \{1, 2, \dots, \ell\} \quad \varphi|_{[t_{j-1}, t_j]} \in C^k([t_{j-1}, t_j])$$

と簡潔に説明できる。

ここでは念のため、連続とは限らない場合にも通用する定義を書いておく。

**定義 A.1.1**  $k$  は 0 以上の整数または  $\infty$  を表すとす。  $I = [a, b]$ ,  $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}^n$  とするとき、 $\varphi$  が  $I$  で区分的に  $C^k$  級であるとは、

$$\exists \ell \in \mathbf{N}, \exists \{t_j\}_{j=1}^{\ell} \text{ s.t. } \begin{cases} a = t_0 < t_1 < \dots < t_{\ell} = b \\ \varphi|_{(t_{j-1}, t_j)} \text{ は } C^k \text{ 級} \\ i = 0, 1, 2, \dots, k \text{ について } \lim_{t \rightarrow t_{j-1}+0} \varphi^{(i)}(t) \text{ と } \lim_{t \rightarrow t_j-0} \varphi^{(i)}(t) \text{ が存在} \end{cases}$$

あるいは  $j = 1, 2, \dots, \ell$  に対して  $\varphi_j$  を

$$\varphi_j(t) := \begin{cases} \varphi(t) & (t \in (t_{j-1}, t_j)) \\ \varphi(t_{j-1} + 0) & (t = t_{j-1}) \\ \varphi(t_j - 0) & (t = t_j) \end{cases}$$

で定めるとき  $\varphi_j \in C^k([t_{j-1}, t_j])$  と言っても同じことである。

**注意 A.1.2** • 一般に  $\varphi(a+0)$ ,  $\varphi(b-0)$  はそれぞれ  $\lim_{x \rightarrow a+0} \varphi(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow b-0} \varphi(x)$  を表す記号である。

- 上の定義の中の  $\varphi$  が  $I$  で連続であるときは、 $\varphi_j := \varphi|_{[t_{j-1}, t_j]}$  となる。
- 区間の端点で微分可能というときは片側微分係数を考えている。例えば  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  に対して  $\varphi'(a)$ ,  $\varphi'(b)$  は

$$\varphi'(a) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}, \quad \varphi'(b) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{\varphi(b+h) - \varphi(b)}{h}$$

で定義される。高階の微分についても同様である

- 上の定義中の言い換えは次の補題により正当化される。

**補題 A.1.3**  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  が  $c \in [a, b]$  を除いて微分可能で、

$$\lim_{t \rightarrow c} \varphi'(t) = A$$

が存在するならば、 $\varphi$  は  $c$  でも微分可能で

$$\varphi'(c) = A.$$

**証明**  $n = 1$  としてよい。平均値の定理より、 $c + h \in [a, b]$  となるような任意の  $h \neq 0$  に対して、 $c$  と  $c + h$  の間にある  $\xi_h$  が存在して、

$$\frac{\varphi(c+h) - \varphi(c)}{h} = \varphi'(\xi_h).$$

$h \rightarrow 0$  とするとき、 $\xi_h \rightarrow c$  であるから、補題の仮定より右辺は  $A$  に収束する。ゆえに  $\varphi$  は  $c$  で微分可能で

$$\varphi'(c) = A. \blacksquare$$

**系 A.1.4**  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$  が  $[a, b]$  で  $k - 1$  回微分可能で、 $c \in [a, b]$  を除いて  $k$  回微分可能かつ

$$\lim_{t \rightarrow c} \varphi^{(k)}(t) = A$$

が存在するならば、 $\varphi^{(k-1)}$  は  $c$  でも微分可能で

$$\varphi^{(k)}(c) = A.$$

## A.2 連結性

連結性についてはあちこちで学んでいるであろう。「常識」をいくつか並べておく。

- 位相空間  $X$  が**連結** (connected) であるとは、 $X$  の開集合の組  $U_1, U_2$  で  $X = U_1 \cup U_2$  かつ  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  を満たすものは  $U_1 = X, U_2 = \emptyset$  か、 $U_1 = \emptyset, U_2 = X$  のいずれかに限られることをいう。
- 位相空間  $X$  が**弧連結** (弧状連結) であるとは、 $X$  内の任意の二点が  $X$  内の連続曲線で結べる ( $\forall x, y \in X, \exists \varphi: [0, 1] \rightarrow X$  s.t.  $\varphi$  は連続かつ  $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$ ) ことをいう。
- $\mathbf{R}$  の部分集合  $I$  が連結であるためには、 $I$  が区間であることが必要十分である。
- 連結な位相空間の連続写像による像は連結である。弧連結な位相空間の連続写像による像は弧連結である。
- 弧連結な空間は連結である。
- 連結かつ**局所弧連結**な空間は弧連結である。特に  $\mathbf{R}^n$  の連結な開集合は弧連結である。

さて、この「多変数の微分積分学 2」の本文中で次の命題を用いている。

**命題 A.2.1**  $\mathbf{R}^n$  の連結な開集合の任意の二点は区分的に  $C^1$  級の曲線で結べる。

これは上に掲げた「常識」の中に入っていないが (位相空間論の本にも書かれていないことが多い)、「連結かつ局所弧連結ならば弧連結」という定理の証明を眺めれば簡単に解決する。ここではその  $\mathbf{R}^n$  の開集合バージョンを述べよう。

**命題 A.2.2**  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^n$  の連結な開集合とすると、 $\Omega$  内の任意の 2 点  $a, b$  は  $\Omega$  内の曲線で結ぶことができる。

**証明**

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega; a \text{ と } x \text{ は } \Omega \text{ 内の曲線で結べる } \},$$

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega; a \text{ と } x \text{ は } \Omega \text{ 内の曲線で結べない } \}$$

とおくと、明らかに

$$\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega, \quad \Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset, \quad a \in \Omega_0.$$

実は  $\Omega_0$  は開集合である。実際、任意の  $x \in \Omega_0$  に対して、 $x \in \Omega$  かつ  $\Omega$  は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x; \varepsilon) \subset \Omega.$$

$B(x; \varepsilon)$  内の任意の点  $y$  は  $x$  と結べるので、 $a$  とも結ぶことができる ( $a$  と  $x$  を結ぶ曲線に  $x$  と  $y$  を結ぶ曲線をつなげばよい)。ゆえに  $y \in \Omega_0$ 。すなわち  $B(x; \varepsilon) \subset \Omega_0$  であるから、 $\Omega_0$  は開集合である。

同様にして  $\Omega_1$  は開集合である。実際、任意の  $x \in \Omega_1$  に対して、 $x \in \Omega$  かつ  $\Omega$  は開集合であるから、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x; \varepsilon) \subset \Omega.$$

$B(x; \varepsilon)$  内の任意の点  $y$  は  $x$  と結べるので、 $a$  とは結ぶことができない (もし  $y$  と  $a$  が結べれば、その曲線を  $y$  と  $x$  を結ぶ曲線につないで  $a$  と  $x$  を結ぶことになり矛盾する)。ゆえに  $y \in \Omega_1$ 。すなわち  $B(x; \varepsilon) \subset \Omega_1$  であるから、 $\Omega_1$  は開集合である。

$\Omega$  が連結であるから、 $\Omega_0 = \Omega$  かつ  $\Omega_1 = \emptyset$ 。ゆえに  $a$  は  $\Omega$  内の任意の点と結ぶことができる。 ■

この証明で「 $\Omega$  内の曲線」というところを、「 $\Omega$  内の  $C^1$  級の曲線」、「 $\Omega$  内の区分的に  $C^1$  級の曲線」、「 $\Omega$  内の正則な  $C^1$  級の曲線」、「 $\Omega$  内の座標軸に平行な線分からなる折線」などで置き換えても証明はまったくそのまま通用する (開球  $B(x; \varepsilon)$  内の任意の点はその中心と良い性質を持った曲線で結べることにもとづいている)。

### A.3 単連結性

**定義 A.3.1** 位相空間  $X$  が**単連結 (simply connected)** であるとは、任意の連続閉曲線  $\varphi: I = [\alpha, \beta] \rightarrow X$  (つまり  $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ ) に対して、次の条件を満たす連続写像  $\Phi: I \times [0, 1] \rightarrow X$  が存在することをいう。

(i)  $\Phi(\cdot, 0) = \varphi$ 。すなわち

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \quad \Phi(t, 0) = \varphi(t).$$

(ii)  $\forall s \in [0, 1]$  に対して  $\Phi(\cdot, s)$  は閉曲線である。すなわち

$$\forall s \in [0, 1] \quad \Phi(\alpha, s) = \Phi(\beta, s).$$

(iii)  $\Phi(\cdot, 1)$  は定数写像 (像が 1 点である曲線) である。すなわち

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \quad \Phi(t, 1) = \Phi(\alpha, 1).$$

**注意 A.3.2** この定義で  $\varphi$  の定義域を単位区間  $[0, 1]$  に限定しても同じことである。 ■

余談 A.3.1 (いくつかの言い換え) • 基本群を学んだ人へ: 任意に  $a \in \Omega$  を固定したとき、基本群  $\pi_1(\Omega, a)$  が単位元のみからなっていることと、 $\Omega$  が単連結であることは同値である。

- $\mathbf{R}^2$  の領域  $\Omega$  については、 $\Omega$  が単連結であることと、 $\mathbf{R}^2 \setminus \Omega$  が compact な連結成分 (直観的には「穴」) を持たないことは同値である。■

$\mathbf{R}^2$  の領域 (連結開集合) の単連結性については、多くの複素関数論の教科書に述べられている。

## A.4 Jordan の曲線定理

初等的な数学において、Jordan の曲線定理 (Jordan curve theorem) の占める位置はどうもしっくり来ないと感じている。「常識である」という空気もある一方で、講義で証明されることが実質的になく、岩波数学辞典に書かれている形の定理 (後述) の証明を探すのも結構面倒である。一方で「要らない」という人もいる (複素関数論で有名なアールフォースの教科書の中でそう断言されている)。

Jordan の曲線定理 (岩波数学辞典からの引用)

平面  $\mathbf{R}^2$  内の任意の Jordan 閉曲線  $C$  は、 $\mathbf{R}^2$  を内と外の二つの領域に分ける。詳しく言えば、 $\mathbf{R}^2 \setminus C$  はちょうど二つの領域  $\Omega_1, \Omega_2$  の直和:

$$\mathbf{R}^2 \setminus C = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

となり、 $C$  は  $\Omega_1, \Omega_2$  の共通の境界、 $\Omega_i$  の一方は有界、他方は非有界、となる。なおこのとき  $p$  を  $C$  の任意の一点とすれば、 $p$  を端点とする Jordan 曲線で、 $p$  以外の部分は  $\Omega_i$  に含まれるものが存在する ( $i = 1, 2$ )。

比較的入手が容易な本で、証明まで述べられている希少な本として

一楽 重雄、「位相幾何学」、朝倉書店 (1993)

を推薦しておく。■

(工事計画: 岩波数学辞典 p. 534 から正確に引用すること)

上の定理で有界な方の領域を Jordan 閉曲線  $C$  で囲まれる領域とよぶ。

領域  $\Omega$  が Jordan 領域であるとは、Jordan 閉曲線  $C$  が存在して、 $\Omega$  が  $C$  で囲まれる領域となることをいう。

一般に Jordan 領域は単連結領域であるが、逆は真でない (例えば、正方形領域の境界からスリットを入れると、単連結であるが、Jordan 領域ではない)。

Jordan 領域でない単連結領域について、領域内部の点とは結べないような境界上の点が存在することがある (有名な例がある)。

Jordan 領域は Jordan 可測 (面積確定) であるとは限らない。

Riemann の写像定理 (複素平面  $\mathbf{C}$  内の任意の単連結領域  $\Omega$  で  $\mathbf{C}$  と異なるものは、単位円盤  $\{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$  に双正則写像で写される) により、任意の単連結領域は円盤領域と同相である。特に Jordan 領域は、(Carathéodory の定理により) 閉包が (自然に) 閉円盤と同相である。

Jordan の曲線定理の高次元版の紹介もしたい…

## A.5 一般の正則曲面の定義

3.1.2 で示唆したように、パラメーター曲面だけでは不十分である。一口に言うと、

一つの関数で「曲面」全体を表現するのに不自由なことがある

例 3.1.4 にあげた球面  $S = \{(x, y, z)^T; x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$  について詳しく見てみよう。まず、明らかに球面全体を 1 つの関数のグラフとして表すことはできない。また、極座標を用いたパラメーター表現 (3.1) にも問題がある。それは  $(\theta, \phi) \mapsto (x, y, z)^T$  が 1 対 1 の写像ではないことである ( $\theta = 0$  のとき、 $\phi$  が何であっても  $(x, y, z)^T = (0, 0, R)^T$ )。

3.1.1 で (a), (b), (c) の「同等性」を示した議論で、「ローカルには」という断り書きが曲者なのである。そこで現代の数学ではどうやってこれらの問題を解決しているかというと、

### 上の素朴な方法で定義された小さな曲面を はりあわせたもの を曲面として定義する

#### 正則な曲面

$\mathbf{R}^3$  の部分集合  $S$  が  $C^k$  級の正則な曲面であるとは、任意の  $x \in S$  に対して、 $\mathbf{R}^3$  の開集合  $U$  で、次の 2 条件を満たすものが存在することをいう。

- (i)  $x \in U$
- (ii)  $U \cap S$  は  $C^k$  級の正則パラメーター曲面である

幾何学で学ぶ多様体 (manifold) の言葉を用いると、 $S$  は  $\mathbf{R}^3$  の 2 次元  $C^k$  級正則部分多様体である、ということになる。

例えば球面  $S = \{(x, y, z)^T; x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$  について、 $z > 0$  の範囲なら  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  で、 $z < 0$  の範囲なら  $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  で、 $x > 0$  の範囲なら  $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$  で、 $x < 0$  の範囲なら  $x = -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$  で、 $y > 0$  の範囲なら  $y = \sqrt{R^2 - z^2 - x^2}$  で、 $y < 0$  の範囲なら  $y = -\sqrt{R^2 - z^2 - x^2}$  で、それぞれ関数のグラフとして表現できる (ゆえに正則なパラメーター曲面である)。ゆえに球面  $S$  は  $C^\infty$  級の正則な曲面である。

以上で  $\mathbf{R}^3$  の曲面の定義は一応できたわけであるが、この曲面上でベクトル場の法線面積分を定義するためには、まず「向きのついた曲面」を定義することが必要になる。それは決して難しいものではないが、少々準備が必要になるので、この「多変数の微分積分学 2」の講義では (残念ながら) 省略する。

この講義では、曲面上での積分を主たる問題とするので、「小さい」集合を無視したり<sup>1</sup>、比較的素朴に曲面を切り貼りすることで「正しい」値を計算で求めることが可能である。我々は正則パラメーター曲面上で面積分を定義することで満足することにしよう。

## A.6 閉曲面の常識

(私の現時点での結論は、ベクトル解析の入門講義では、「閉曲面」という言葉を使わずに済みます (べきである)、というものであるが、世の中の本に「閉曲面」は (定義をさぼりつつ) あふれている。読めないと困るので、少し説明しておく。)

曲面とは、2 次元多様体のことである。

コンパクトかつ連結な境界のない 2 次元多様体を閉曲面 (closed surface) と呼ぶ (連結性を仮定しないこともあるようである)。

有名な **ホイットニーの定理**により、任意の曲面 (2 次元多様体) は  $\mathbf{R}^4$  に埋め込まれる。コンパクトな曲面は、向きづけ可能か、空でない境界を持つならば、 $\mathbf{R}^3$  に埋め込むことができる。特に向きづけ可能な閉曲面は  $\mathbf{R}^3$  に埋め込むことができる。

逆に  $\mathbf{R}^3$  内の閉曲面は向きづけ可能であり、標準的な向きが存在する。 $S$  が  $\mathbf{R}^3$  内の閉曲面であるとき、 $\mathbf{R}^3 \setminus S$  は 2 つの連結成分からなる (つまり Jordan の曲線定理の類似が成立する)。

有名な **クラインの壺**は、向きづけ不能な閉曲面であって、 $\mathbf{R}^3$  に埋め込むことはできない。

<sup>1</sup>例えば球面から一本の子午線を抜いた球面は、一対一という性質を保って極座標を用いたパラメーター表現ができる

閉曲面は次のように分類できる (位相同型で、もし微分可能多様体ならば微分同型で)。

1.  $g$  重トーラス (球面に  $g$  個のハンドルをつけたもの — 人呼んで  $g$  人乗りの浮き輪)  
オイラー標数が  $2 - 2g$  で、向きづけ可能である。  
 $g \geq 0$  というのでしょうか?
2. 球面に  $k$  個の射影平面をつけたもの  
オイラー標数が  $2 - 2k$  で、向きづけ不能である。  
 $k \geq 1$  というのでしょうか?

そこで、 $\mathbf{R}^3$  内に埋め込まれた閉曲面に限って言えば、「閉曲面とは  $g (\geq 0)$  人乗りの浮き輪である」。

少々脱線になるが、「単連結な 3 次元閉多様体は  $S^3$  に同相である」という有名なポアンカレ予想 (ペレルマンの定理?) の 2 次元バージョンは「単連結な閉曲面は  $S^2$  に同相である」となって、上に書いた事実を認めれば明らかである。ポアンカレ予想は、幾何学の素養のない人に説明するのが少々難しい定理であると思うが、この話につきあってくれた人には、手が届きそうな距離まで来ている…最近出版されたオシア『ポアンカレ予想を解いた数学者』 [5] は世間一般の人達には読みやすいとは言えないが、数学科学生は読破にチャレンジしてみるべき本であると思う。



# 付録 B 単連結領域におけるポテンシャルの存在

$C^1$  級のベクトル場  $f$  がポテンシャルを持つための必要条件

$$(B.1) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{in } \Omega \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

が単連結領域では十分条件になることの証明を与える。

この議論は小松 [10] の第 2 章 5 節を参考にした。なお、杉浦 [14] には少し違った証明が載っている (折れ線上の線積分を持ち出す)。もっとも B.1 で証明する「球におけるポテンシャルの存在」がキーとなるのは同じで、本質的には同じ証明と言えるのかも知れない。暇があったら、その証明も収録しようと考えている。

## B.1 ステップ 1: 球におけるポテンシャルの存在

まず球領域では (B.1) がポテンシャル存在のための十分条件であることを示す。二通りの証明を与える。

### B.1.1 証明 1: 区間の「辺」からなる折れ線に沿う線積分と積分定理を利用

球の中心と  $x$  を結ぶ曲線  $C_x$  に対して

$$F(x) := \int_{C_x} f \cdot dr$$

とおく。ただし  $C_x$  を  $a$  と  $x$  を頂点とする  $\mathbf{R}^n$  の閉区間  $(\prod_{j=1}^n [a_j, b_j])$  の形の集合) の「辺」を結んでできる折れ線に限定する。そう限定しても折れ線の取り方は複数あるが、その選び方によらずに線積分の値が定まることが、積分定理 (2 次元の場合は区間における Green の定理) から容易に証明できる<sup>1</sup>。

$\text{grad } F = f$  の証明は、本文中の定理 2.4.7 の証明と同様である。

ゆえに球においては、(B.1) はポテンシャルが存在するための十分条件である。

(上の証明のあらすじは小松 [10] に載っていたもので、そこでは 2 次元限定の話だったので、積分路としても選択肢が二つしかなく、積分定理とは言っても長方形上の Green の定理でほぼ自明であるので、簡単明瞭であるが、多次元になると少し面倒に感じられる。そこで別証明を以下に示す。ぎょうぎょうしい計算だが、多次元になってもすっきりしている点は気持ちが良いと思う。)

### B.1.2 証明 2: 球の中心と結んだ線分に沿う線積分を利用

やはり

$$F(x) := \int_{C_x} f \cdot dr$$

<sup>1</sup>積分定理を持ち出すのは大げさのようだが、何と言っても区間バージョンなので Fubini の定理によって自明に近い。

とおくが、 $C_{\mathbf{x}}$  としては、

$$\varphi(t) := \mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (t \in [0, 1])$$

を用いる。すると

$$F(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) dt = \sum_{j=1}^N (x_j - a_j) \int_0^1 f_j(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) dt.$$

積分記号下の微分と条件 (B.1) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N \delta_{jk} \int_0^1 f_j(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) dt + \sum_{j=1}^N (x_j - a_j) \int_0^1 \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \cdot t dt \\ &= \int_0^1 f_k(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) dt + \sum_{j=1}^N (x_j - a_j) \int_0^1 \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \cdot t dt. \end{aligned}$$

( $\delta_{jk}$  は Kronecker のデルタである)

この右辺第 2 項を合成関数の微分法と部分積分で変形すると

$$\begin{aligned} \text{右辺第 2 項} &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f_k(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))) \cdot t dt \\ &= [f_k(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \cdot t]_0^1 - \int_0^1 f_k(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) dt \\ &= f_k(\mathbf{x}) - \int_0^1 f_k(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) dt. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}). \blacksquare$$

## B.2 ステップ 2: 連続曲線に沿う線積分の導入

次のステップ 3 で、区分的  $C^1$  級とは限らない、ただの連続曲線に対して線積分を定義する必要性が生じる。これについて準備しておこう。

$\mathbf{R}^n$  の開集合  $\Omega$  上の条件 (B.1) を満たすベクトル場  $\mathbf{f}$  と、 $\Omega$  内の曲線  $C: \mathbf{r} = \varphi(t)$  ( $t \in I = [\alpha, \beta]$ ) に対して、線積分  $\mathcal{L}(\mathbf{f}; C)$  を定義するのが目標である。ただし  $C$  が区分的に  $C^1$  級の場合には、既に定義してあるものと一致する、すなわち

$$\mathcal{L}(\mathbf{f}; C) = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

が成り立つようにする。既に定義してあった線積分の性質の多くは保存される<sup>2</sup>。

$\Omega$  内の曲線  $C: \mathbf{r} = \varphi(t)$  ( $t \in I = [\alpha, \beta]$ ) について、次の条件を考える。

$E(C)$

曲線  $C$  が  $E(C)$  を満たすとは、 $C$  の像  $\varphi(I)$  を含む連結な開集合  $U$  と、 $U$  で定義された  $C^1$  級の関数  $F$  で  $\text{grad } F = \mathbf{f}$  in  $U$  を満たすものが存在することをいう。

$C$  が条件  $E(C)$  を満たすとき、 $\mathbf{f}$  の  $C$  に沿った接線線積分を

$$(B.2) \quad \mathcal{L}(\mathbf{f}; C) := F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

<sup>2</sup>あぶなさそうに見える  $\left| \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \right| \leq \int_C \|\mathbf{f}\| ds$  も、 $C$  が長さを持たない場合に右辺 =  $\infty$  と解釈すれば大丈夫？

で定める。この式の右辺が  $(U, F)$  の取り方によらずに定まるとは以下のようにしてわかる。 $(\tilde{U}, \tilde{F})$  も同じ条件を満たす、すなわち  $\tilde{U}$  は  $\varphi(I)$  を含む連結な開集合で、 $\text{grad } \tilde{F} = \mathbf{f}$  in  $\tilde{U}$  が成り立つとする。このとき  $U \cap \tilde{U}$  で

$$\text{grad}(F - \tilde{F}) = \text{grad } F - \text{grad } \tilde{F} = \mathbf{f} - \mathbf{f} = 0.$$

ゆえに  $F - \tilde{F}$  は、 $U \cap \tilde{U}$  の各連結成分上で定数となる。特に  $\varphi(I)$  を含む連結成分上で定数であることから、

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \tilde{F}(\varphi(\beta)) - \tilde{F}(\varphi(\alpha))$$

が成り立ち、(B.2) の右辺は  $(U, F)$  の選び方によらずに確定する。

$C$  が条件  $E(C)$  を満たし、かつ区分的に  $C^1$  級であるとき既に定義した接線線積分も考えられるが、両者は一致することが分かる。

次に  $C$  が条件  $E(C)$  を満たさない場合を考えよう。このとき次が成り立つ。

主張

$C$  を  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_N$  と分解して、各  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) が条件  $E(C_j)$  を満たすようにできる。

**証明** 曲線  $C$  の像  $\varphi(I)$  (これはコンパクト) と、 $\Omega$  の補集合  $\mathbf{R}^n \setminus \Omega$  (これは閉集合) との距離を  $d$  とすると、 $d > 0$  である (共通部分のないコンパクト集合と閉集合の距離は真に正)。 $\varphi$  はコンパクト集合  $I$  上で連続だから一様連続である。それゆえ

$$\exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad (\forall t, t' \in I : |t - t'| \leq \delta) \quad \|\varphi(t) - \varphi(t')\| < d.$$

$I$  の分割  $\Delta = \{t_j\}_{j=0}^N$  を  $|\Delta| < \delta$  を満たすようにとる。 $C_j$  を  $\varphi|_{[t_{j-1}, t_j]}$  として、 $V_j := B(\varphi(t_{j-1}); d)$  とおくと、 $\varphi([t_{j-1}, t_j]) \subset V_j \subset \Omega$  であるから、 $C_j$  の像は  $V_j$  に含まれ、 $V_j$  は連結な開集合、そしてステップ 1 で述べたことから、 $V_j$  で  $\mathbf{f}$  のポテンシャル  $F_j$  が存在する。もちろん  $C = \sum_{j=1}^N C_j$  である。(主張の証明終了)

$C_j$  は  $E(C_j)$  を満たすので、(B.2) によって線積分を定義する:

$$\mathcal{L}(\mathbf{f}; C_j) = F_j(\varphi(t_j)) - F_j(\varphi(t_{j-1})) \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

後は  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_N$  であるから

$$(B.3) \quad \mathcal{L}(\mathbf{f}; C) := \sum_{j=1}^N \mathcal{L}(\mathbf{f}; C_j) = \sum_{j=1}^N (F_j(\varphi(t_j)) - F_j(\varphi(t_{j-1})))$$

と定義する (こうすれば曲線が区分的  $C^1$  級曲線であった場合に矛盾しない)。

この定義が意味を持つことを示すには、区間  $I$  の分割の仕方によらずに (B.3) の右辺の値が定まることが確かめる必要がある。 $\Delta_1, \Delta_2$  をともに  $|\Delta_1| < \delta, |\Delta_2| < \delta$  を満たす分割とする。このとき  $\tilde{\Delta}$  を  $\Delta_1, \Delta_2$  の共通の細分とすると、 $\Delta_i$  についての和が  $\tilde{\Delta}$  についての和に等しいことを示せば良いが、それは  $\tilde{\Delta}$  の各小区間の開近傍における局所的なポテンシャルとして、 $\Delta_i$  の小区間の像の開近傍における局所的なポテンシャルが使えることに注意すればよい。

### B.3 ステップ 3: 単連結領域におけるポテンシャルの存在

単連結領域  $\Omega$  におけるベクトル場  $\mathbf{f}$  が (B.1) を満たすと仮定する。 $\Omega$  内の任意の区分的に  $C^1$  級の閉曲線  $C$  に対して

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が成り立つことを示せばよい。これが成り立たないと仮定しよう。曲線  $C$  の定義域は  $[0, 1]$  としてよい。単連結性の仮定から次の条件 (i)–(iv) を満たす連続写像  $\Phi: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  が存在する。

(i)  $\Phi(\cdot, 0) = \varphi$ . すなわち

$$\forall t \in [0, 1] \quad \Phi(t, 0) = \varphi(t).$$

(ii)  $\forall s \in [0, 1]$  に対して、 $\Phi(\cdot, s): [0, 1] \ni t \mapsto \Phi(t, s)$  は閉曲線である。すなわち

$$\forall s \in [0, 1] \quad \Phi(0, s) = \Phi(1, s).$$

(iii)  $\Phi(\cdot, 1)$  は定数写像 (像が 1 点である曲線) である。すなわち

$$\forall t \in [0, 1] \quad \Phi(t, 1) = \Phi(0, 1).$$

このとき曲線  $\tilde{C}$  を

$$\psi(r) := \begin{cases} \Phi(r, 0) & (r \in [0, 1]) \\ \Phi(1, r-1) & (r \in [1, 2]) \\ \Phi(3-r, 1) & (r \in [2, 3]) \\ \Phi(0, 4-r) & (r \in [3, 4]) \end{cases}$$

で定めると、 $\tilde{C} = C + \gamma + \Gamma + (-\gamma)$  となる。ここで  $\gamma, \Gamma, -\gamma$  は、それぞれ

$$r = \Phi(1, s) \quad (s \in [0, 1]),$$

$$r = \Phi(1-t, 1) \quad (t \in [0, 1]),$$

$$r = \Phi(0, 1-s) = \Phi(1, 1-s) \quad (s \in [0, 1]),$$

で定まる曲線である ( $\Gamma$  の像は 1 点である)。ゆえに

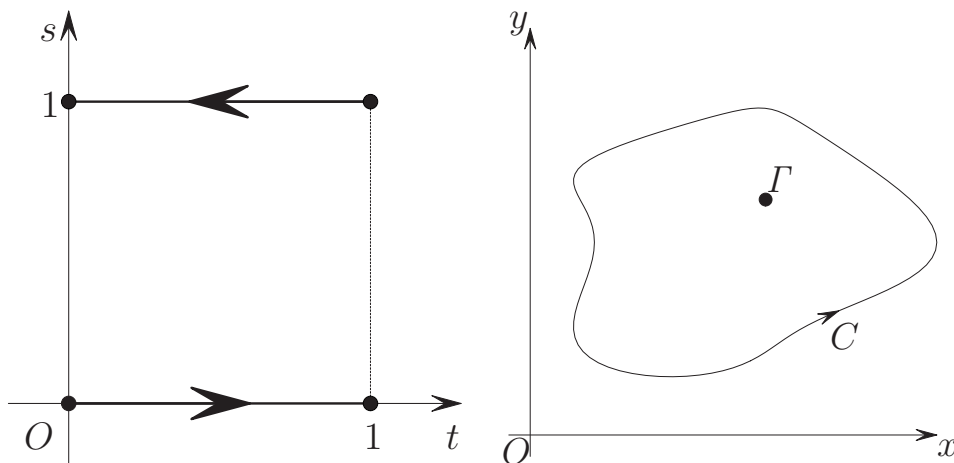


図 B.1: 曲線  $C$  と定数曲線  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{C}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \mathcal{L}(\mathbf{f}, \tilde{C}) = \mathcal{L}(\mathbf{f}, C) + \mathcal{L}(\mathbf{f}, \gamma) + \mathcal{L}(\mathbf{f}, \Gamma) + \mathcal{L}(\mathbf{f}, -\gamma) \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{f}, C) + \mathcal{L}(\mathbf{f}, \gamma) + 0 - \mathcal{L}(\mathbf{f}, \gamma) \\ &= \mathcal{L}(\mathbf{f}, C) = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \neq 0. \end{aligned}$$

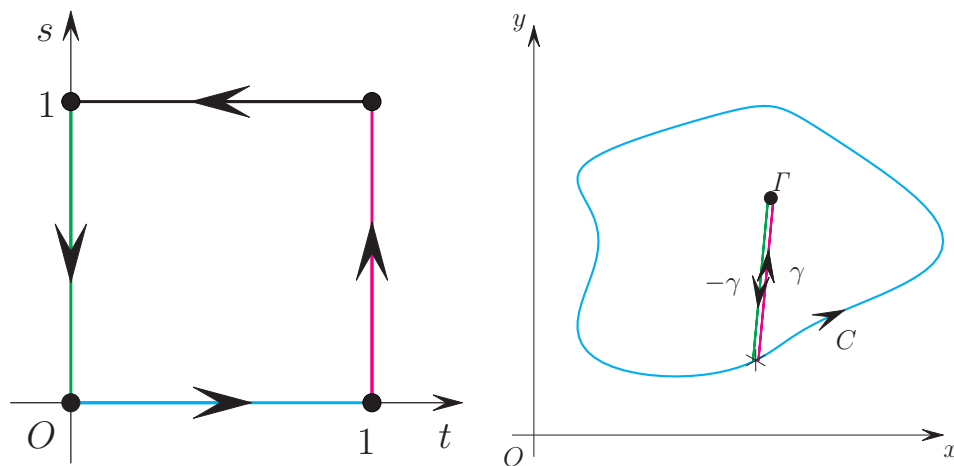


図 B.2:  $\tilde{C} = C + \gamma + \Gamma + (-\gamma)$

Cauchy の積分定理の Goursat による証明 (高木貞治『解析概論』などを見よ) と同様にして、 $ts$  平面で 2次元の区間縮小法を行なうと、正方形  $[0, 1] \times [0, 1]$  内の減少する正方形列  $\{S_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  で、

$$\exists \mathbf{a} \in [0, 1] \times [0, 1] \quad \text{s.t.} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{\mathbf{a}\},$$

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathcal{L}(f, C_n) \neq 0 \quad (C_n \text{ は } \Phi(\partial S_n) \text{ を正の向きに一周する曲線})$$

をみたすものが得られる。

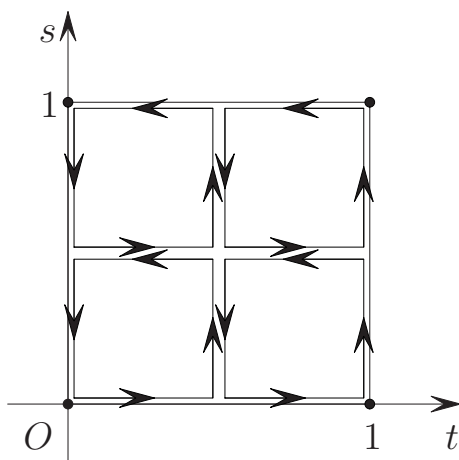


図 B.3: 正方形を 4 分割して

$\mathbf{a}$  を中心とする十分小さな半径の球を取ると、それは  $\Omega$  に含まれる。十分大きな  $n$  を取ると  $\Phi(S_n)$  はその球に含まれる。すると、その球におけるポテンシャル  $F$  を用いて

$$\mathcal{L}(f, C_n) = F(C_n \text{ の終点}) - F(C_n \text{ の始点}) = 0.$$

これは矛盾なので  $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$  でなければならない。■

# 付録C Gauss の定理, Green の定理, Stokes の定理の補足

## C.1 縦線集合である領域における Green の定理

定理 C.1.1 ( $y$  軸方向に縦線集合である領域での Green の定理)  $\mathbb{R}^2$  の領域  $D$  が

$$D = \{(x, y); x \in (a, b), \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$$

と表されたとする。ここで  $\varphi_j$  は  $[a, b]$  上定義された区分的に  $C^1$  級の関数で、

$$\forall x \in (a, b) \quad \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$$

を満たすとする。このとき、 $D$  の閉包で定義された  $C^1$  級の実数値関数  $P, Q$  に対して

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

が成り立つ。ただし  $C$  は次で定義される  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を結んで出来る閉曲線とする。

$$\begin{aligned} C_1 : \mathbf{r} &= (t, \varphi_1(t))^T & (t \in [a, b]), & & C_2 : \mathbf{r} &= (b, t)^T & (t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]), \\ -C_3 : \mathbf{r} &= (t, \varphi_2(t))^T & (t \in [a, b]), & & -C_4 : \mathbf{r} &= (a, t)^T & (t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]). \end{aligned}$$

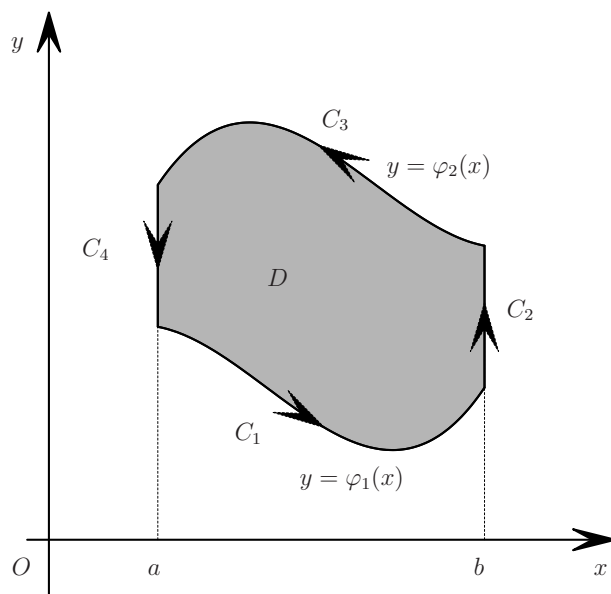


図 C.1: Green の定理の領域  $D$

**証明** 以下の内容は杉浦 [14] による。まず定理 2.5.2 の証明と同様にして、

$$\iint_D \left( -\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P(x, y) dx$$

が得られる。

今

$$F(x, u, v) := \int_u^v Q(x, y) dy$$

とおくと、

$$F_x(x, u, v) = \int_u^v \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy, \quad F_u(x, u, v) = -Q(x, u), \quad F_v(x, u, v) = Q(x, v)$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} Q(x, y) dy \right) \\ &= \frac{d}{dx} (F(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))) \\ &= F_x(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) + F_u(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))\varphi_1'(x) + F_v(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))\varphi_2'(x) \\ &= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy - Q(x, \varphi_1(x))\varphi_1'(x) + Q(x, \varphi_2(x))\varphi_2'(x). \end{aligned}$$

移項して、 $x$  について  $[a, b]$  で積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy \right) dx \\ &= \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} Q(x, y) dy \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b Q(x, \varphi_1(x))\varphi_1'(x) dx - \int_a^b Q(x, \varphi_2(x))\varphi_2'(x) dx \\ &= \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} Q(b, y) dy - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} Q(a, y) dy + \int_a^b Q(x, \varphi_1(x))\varphi_1'(x) dx \\ &\quad - \int_a^b Q(x, \varphi_2(x))\varphi_2'(x) dx. \end{aligned}$$

この右辺が

$$\int_{C_2} Q(x, y) dy + \int_{C_4} Q(x, y) dy + \int_{C_1} Q(x, y) dy + \int_{C_3} Q(x, y) dy = \int_C Q(x, y) dy$$

に等しいことを示せば証明は完了する。

曲線  $C_2$  は  $\mathbf{r} = (b, t)^T$ ,  $t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$  と表せるので、 $dx/dt = 0$ ,  $dy/dt = 1$  で、

$$\int_{C_2} Q(x, y) dy = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} Q(b, t) \cdot 1 dt = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} Q(b, y) dy.$$

同様にして

$$\int_{C_4} Q(x, y) dy = - \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} Q(a, y) dy.$$

一方、曲線  $C_1$  は  $\mathbf{r} = (t, \varphi_1(t))^T$ ,  $t \in [a, b]$  と表せるので、 $dx/dt = 1$ ,  $dy/dt = \varphi_1'(t)$  で、

$$\int_{C_1} Q(x, y) dy = \int_a^b Q(t, \varphi_1(t)) \cdot \varphi_1'(t) dt = \int_a^b Q(x, \varphi_1(x))\varphi_1'(x) dx.$$

同様にして

$$\int_{C_2} Q(x, y) dy = - \int_a^b Q(x, \varphi_2(x)) \varphi_2'(x) dx$$

が得られる。以上の4つの式を辺々加えれば求める等式を得る。■

**余談 C.1.1 (Green の定理の仮定を緩める)** 上では  $P$  と  $Q$  が  $C^1$  級としたが、 $Q_x, P_y$  が存在して  $Q_x - P_y$  が連続とするだけでよい (**Goursat-Bochner の定理**)。これは一松先生の本には大抵書いてある。■

## C.2 三方向に縦線集合である領域における Gauss の定理

一般性の高い (条件が緩い) Gauss の定理は、証明はもちろん定理を述べることも自体がこの講義のレベルでは無理である。参考書としては、やはり杉浦 [14] をあげておく。

ここでは簡単のため、Green の定理でやったように、すべての方向 (ここでは三次元なので  $x, y, z$  軸方向の三方向) に縦線集合であるような滑らかな領域に限って Gauss の定理を述べて証明することにする。

**補題 C.2.1**  $D$  は  $\mathbf{R}^2$  内の有界領域で、その境界は区分的  $C^1$  級 Jordan 閉曲線  $C$  であるとする。ただし  $C$  の向きは、 $C$  上の各点において進行方向の左側に  $D$  を見るようになっているとする。 $\varphi_1, \varphi_2$  は  $\bar{D}$  を含む開集合で定義された  $C^1$  級の関数で、 $\varphi_1 < \varphi_2$  (on  $D$ ) をみたすものとして、

$$\Omega := \{(x, y, z); (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) < z < \varphi_2(x, y)\}$$

とおく。このとき  $\bar{\Omega}$  を含む開集合で定義された  $C^1$  級の任意の関数  $f$  に対して、 $\mathbf{f} := (0, 0, f)^T$  とおくと、

$$(C.1) \quad \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad \left( = \int_S f dx \wedge dy \right).$$

ただし  $\int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma$  は、以下に定義する3つの曲面  $S_T, S_B, S_S$  上の面積分の和とする。

- (i)  $S_T$  は  $\varphi(u, v) := (u, v, \varphi_2(u, v))^T$  ( $(u, v) \in D$ ) で定義されるパラメーター曲面とする。
- (ii)  $S_B$  は、その裏返し  $-S_B$  を  $\varphi(u, v) := (u, v, \varphi_1(u, v))^T$  ( $(u, v) \in D$ ) で定義する。
- (iii)  $S_S$  は、 $C$  を  $\mathbf{r} = (\xi(t), \eta(t))^T$  ( $t \in [a, b]$ ) とするとき、 $\varphi(t, s) := (\xi(t), \eta(t), s)$  ( $(t, s) \in \{(t, s); t \in [a, b], \varphi_1(\xi(t), \eta(t)) \leq s \leq \varphi_2(\xi(t), \eta(t))\}$ ) で定義されるパラメーター曲面とする。

**証明**  $D$  は縦線集合であるから、

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz &= \iint_D \left( \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_D f(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy - \iint_D f(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

$S_T$  では

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left( -\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, -\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, 1 \right)^T$$

であるから、 $\mathbf{f} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = f(u, v, \varphi_2(u, v))$ 。ゆえに

$$\int_{S_T} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_D f(u, v, \varphi_2(u, v)) du dv.$$



同様に  $-S_B$  では、 $\mathbf{f} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = f(u, v, \varphi_1(u, v))$  であるから、

$$\int_{-S_B} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_D f(u, v, \varphi_1(u, v)) \, du \, dv.$$

$S_S$  では

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} \xi'(t) \\ \eta'(t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta'(t) \\ -\xi'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、 $\mathbf{f} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \times \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) = 0$ . ゆえに

$$\int_{S_S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0.$$

以上より

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iint_D f(u, v, \varphi_2(u, v)) \, du \, dv - \iint_D f(u, v, \varphi_1(u, v)) \, du \, dv + 0 \\ &= \int_{S_T} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - \int_{-S_B} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{S_S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\ &= \int_{S_T} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{S_B} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{S_S} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \blacksquare \end{aligned}$$

この補題の条件をみたま  $\Omega$  を「 $z$  方向に縦線集合である滑らかな領域」と呼ぶことにする。同様に  $x$  方向、 $y$  方向に縦線集合である滑らかな領域が定義できる。 $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向のいずれにも縦線集合である滑らかな領域  $\Omega$  に対しては

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \int_S f \, dy \wedge dz + g \, dz \wedge dx + h \, dx \wedge dy.$$

$\mathbf{f} := (f, g, h)^T$  とおくと、

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

が得られる。

**余談 C.2.1** …証明を読み切るのが大変であることには我慢するにしても、十分な一般性がある形の Gauss の定理を、厳密かつ明瞭に証明している本は非常に少ない、というのが私の率直な感想である。コンパクトに書いてあるものは、大抵 (私の経験上はすべて) の場合に、私には埋められない穴が見つかる。Bourbaki が有名な数学原論を書き始めた動機だとされている「“Stokes の定理” の満足行く証明を書く」ことは今もって教科書執筆者達の大きな課題であると思う。

私が信じている数学書の法則「証明と証明の所在のどちらも書いていない定理は間違っている」を適用すると、Gauss の定理の記述そのものが不完全な本が多いということになる。ずいぶん悲観的なことを書くようで気が引けるので、まったく根拠のないことを言っているわけではないことを分かってもらうために<sup>1</sup>、手近な例を一つ引こう。例えば上にあげた補題の元ネタでは  $\varphi_1, \varphi_2$  は連続としか書いていなかった。それでは面積分の定義すらできないのでは? … $\mathbf{f} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$  の計算結果  $f(u, v, \varphi_j(u, v))$  そのものに  $\varphi_j$  の導関数は現れないから、 $\varphi_j$  の微分可能性は不要のように見えるかも知れないが…変でしょう? ■

<sup>1</sup>間違いをあげて本を非難することが目的ではないので、どの本であるかは書かない。

### C.3 Green の公式

応用上頻出する重要な公式群であるが、「多変数の微分積分学2」の講義では省略する(必要になったときに学ぶという姿勢で十分である)。

**定理 C.3.1 (Green の積分公式)**  $\Omega$  は Gauss の発散定理が成り立つような  $\mathbf{R}^n$  の有界領域で、 $\Gamma$  はその境界とする。

(1)  $u, v$  が  $\bar{\Omega}$  の近傍でそれぞれ  $C^2$  級,  $C^1$  級ならば

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma - \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx.$$

(2)  $u, v$  が  $\bar{\Omega}$  の近傍で  $C^2$  級ならば

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma.$$

特に  $u, v$  が調和関数である場合は  $\int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma = 0$ .

(3)  $u$  が  $\bar{\Omega}$  の近傍で  $C^2$  級ならば

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.$$

特に  $u$  が調和関数である場合は  $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0$ .

#### 証明

(1)  $\mathbf{f} := v \text{grad } u$  とおくと

$$\text{div } \mathbf{f} = \text{grad } v \cdot \text{grad } u + v \Delta u$$

となることに注意して、Gauss の発散定理を用いる。

(2) (1) と (1) で  $u$  と  $v$  を入れ換えた式を並べて辺々引き算すればよい。

(3) (1) で  $v \equiv 1$  とおく。■

### C.4 Gauss の発散定理の物理への応用

並べてみると同じような議論をしていることがよく分かる(熱量、質量、運動量の保存で式を立てて、発散定理を使って、被積分関数が一致する、で方程式を導出する)。

**例 C.4.1 (Fourier の熱伝導の法則, 熱方程式)** 「熱の流れの速度(単位時間に通過する単位面積当りの熱量)は温度勾配に比例する」という法則が、Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830, フランス) によって発見された。温度を位置と時刻の関数  $u = u(x, y, z, t)$  とするとき、熱流の速度は  $\text{grad } u = (u_x, u_y, u_z)^T$  に比例する、ということである。考えている領域内の任意の小領域  $V$  において、熱量の保存則から、熱量の時間変化率が熱流の流束に等しいとして、

$$\frac{d}{dt} \iiint_V C u \, dx \, dy \, dz = \int_S k \text{grad } u \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

が得られる<sup>2</sup>。ここで  $C$  は比熱容量、 $k$  は Fourier の法則に現れる比例定数、 $S$  は  $V$  の境界、 $\mathbf{n}$  は  $S$  の外向き単位法線ベクトルである。左辺に積分記号下の微分、右辺に Gauss の発散定理を適用すると

$$(C.2) \quad \iiint_V C u_t \, dx \, dy \, dz = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) \, dx \, dy \, dz.$$

$V$  の任意性から

$$(C.3) \quad C u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$$

が得られる<sup>3</sup>。これを**熱(伝導)方程式 (heat equation)**と呼ぶ。特に  $C$  や  $k$  が定数である場合には、公式  $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \Delta$  より

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u, \quad \kappa := \frac{k}{C}$$

となる (普通数学で熱方程式というときはこちらの方程式を指す)。■

**例 C.4.2 (流体に関する連続の方程式と非圧縮条件)** (「準備中」改め 2016/7/10 加筆) 流体の密度を  $\rho(\mathbf{x}, t)$ 、流体の速度場を  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  とするとき、**連続の方程式**と呼ばれる次式がつねに成り立つ。

$$(C.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

**証明** 質量保存を仮定すると、任意の領域  $V$  内の流体の質量の変化は、 $V$  の境界から出入りする質量に等しい。

$$(C.5) \quad \frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

左辺に微分と積分の順序交換、右辺に Gauss の発散定理を用いて

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx \, dy \, dz = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dx \, dy \, dz.$$

これが任意の  $V$  について成り立つことから、(C.4) を得る。(証明終)

$$(C.6) \quad \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

で定義される **Lagrange 微分 (物質微分, material derivative)** を用いると、(C.4) は次のようにも書き表せる。

$$(C.7) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

密度の Lagrange 微分  $\frac{D\rho}{Dt}$  は、流体粒子とともに移動するときの、密度の時間変化率を意味する。つねに  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  が成り立つとき、流体は非圧縮であるという。この条件は

$$(C.8) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

と同値である。この方程式を**非圧縮条件**と呼ぶ。■

<sup>2</sup>境界  $S$  から入ってきた熱量の分だけ、 $V$  内の熱量が増加する、ということである。

<sup>3</sup>例えば、領域内の任意の点  $\mathbf{x}$  に対して、 $V$  として  $\mathbf{x}$  を中心とする球を取り、等式 (C.2) の両辺をその球の体積で割ってから球の半径を 0 に近づける極限を取ると、 $\mathbf{x}$  において (C.3) が成り立つことが得られる (「多変数の微分積分学 2」第 1 部「重積分」[7] の例 B.3.1 「平均の極限として密度を得る」を見よ)。

流体の流れに沿って運動する粒子の、時刻  $t$  での位置を  $\mathbf{x}(t)$  とするとき、

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t), t) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j} \dot{x}_j(t) + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = \frac{Df}{Dt}.$$

**例 C.4.3 (粘性流体の運動方程式, Navier-Stokes 方程式)** 領域  $\Omega (\subset \mathbf{R}^3)$  内に満たされた流体の速度場を  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  ( $\mathbf{x} \in \Omega, t \in \mathbf{R}$ ), 密度を  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  とすると、**運動量保存則**から、 $\Omega$  内の任意の部分領域  $V$  (ただし  $\bar{V}$  は  $\Omega$  に含まれるコンパクト集合とする) について、

$$(C.9) \quad \int_V \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{P} \mathbf{n} d\sigma$$

が成り立つ。ただし  $\frac{D}{Dt}$  は

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

で定義されるいわゆる**物質微分** (material derivative, Lagrange 微分とも呼ぶ) であり、 $\mathbf{P} = (p_{ij})$  は**応力テンソル** (stress tensor)、 $\mathbf{n}$  は  $V$  の境界上の点における外向き単位法線ベクトルである。 $\mathbf{P}$  の第  $i$  行を  $\mathbf{p}_i$  とおくと、

$$\mathbf{P} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{p}_2^T \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{p}_3^T \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

となることに注意すると、Gauss の発散定理から

$$\int_{\partial V} \mathbf{P} \mathbf{n} d\sigma = \begin{pmatrix} \int_{\partial V} \mathbf{p}_1^T \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ \int_{\partial V} \mathbf{p}_2^T \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ \int_{\partial V} \mathbf{p}_3^T \cdot \mathbf{n} d\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V \operatorname{div} \mathbf{p}_1^T d\mathbf{x} \\ \int_V \operatorname{div} \mathbf{p}_2^T d\mathbf{x} \\ \int_V \operatorname{div} \mathbf{p}_3^T d\mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

そこで

$$\operatorname{div} \mathbf{P} := \begin{pmatrix} \operatorname{div} \mathbf{p}_1^T \\ \operatorname{div} \mathbf{p}_2^T \\ \operatorname{div} \mathbf{p}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

とおくと、(C.9) は次のように書き直せる。

$$\int_V \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} d\mathbf{x}.$$

$V$  の任意性から

$$(C.10) \quad \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{P} \quad (\text{in } \Omega).$$

多くの等方粘性流体では

$$\mathbf{P} = -pI + 2\mu E$$

と仮定できる。ここで  $p = p(\mathbf{x}, t)$  は流体の圧力、 $I$  は単位テンソル (単位行列)、 $\mu$  は**粘性率** (粘性係数, coefficient of viscosity) であり、また  $E = (e_{ij})$  は

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

すなわち

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

で定義される**歪み速度テンソル** (歪テンソル, 変形速度テンソル) である。簡単な計算で

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\operatorname{grad} p + \mu (\Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v})$$

が得られる。これを (C.10) に代入すると、

$$\frac{D}{Dt} (\rho \mathbf{v}) = -\operatorname{grad} p + \mu (\Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

これが等方粘性流体の運動量保存を表す方程式である。

$\rho$  が定数と仮定し、物質微分の定義  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  を代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu (\Delta \mathbf{v} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

ただし  $\nu := \mu/\rho$  とおいた。 $\nu$  は**動粘性係数**と呼ばれる。 $\rho$  が定数という仮定から、非圧縮性条件  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  が成り立つので、

$$(C.11) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

これが非圧縮粘性流体の運動方程式として有名な <sup>ナビエ・ストークス</sup>**Navier-Stokes の方程式** (Navier-Stokes equation) である<sup>4</sup>。

粘性を無視した

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

を **Euler の方程式** (Euler equation) と呼ぶ。また非線型項を無視した<sup>5</sup>

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

を **Stokes の方程式** (Stokes equation) と呼ぶ。■

(次節は Stokes の定理の証明であるが、Stokes の方程式と Stokes の定理をこんなに近くに並べてある本は珍しいであろう。別に狙ってやったわけではない。)

## C.5 Stokes の定理の証明

Stokes の定理は、Green の定理に帰着して証明できる。

<sup>4</sup>C. L. H. Navier (1823), George G. Stokes (1845).

<sup>5</sup>線形化ではなく、非線型項を「無視」したものであることに注意。

**定理 3.5.1 の証明**  $\varphi \circ \psi: I \rightarrow \mathbf{R}^3$  は、 $\mathbf{R}^3$  内の区分的に  $C^1$  級の曲線となる。それを  $\Gamma$  で表すことにする。線積分の定義により

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(\varphi(\psi(t))) \cdot (\varphi'(\psi(t))\psi'(t)) dt.$$

一般に 2 次元ベクトル  $\mathbf{x}$ ,  $2 \times 3$  行列  $A$ , 3 次元ベクトル  $\mathbf{u}$  に対して、

$$\mathbf{x} \cdot (A\mathbf{u}) = (A\mathbf{u})^T \mathbf{x} = (\mathbf{u}^T A^T) \mathbf{x} = \mathbf{u}^T (A^T \mathbf{x}) = (A^T \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

が成り立つから<sup>6</sup>、

$$(C.12) \quad \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b [\varphi'(\psi(t))^T \mathbf{f}(\varphi(\psi(t)))] \cdot \psi'(t) dt.$$

ベクトル場  $\tilde{\mathbf{f}}$  を

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) := \varphi'(\mathbf{u})^T \mathbf{f}(\varphi(\mathbf{u}))$$

により定義すると (これを  $\varphi$  による  $\mathbf{f}$  の引き戻しと呼ぶことがある)、(C.12) は次のように書き直せる。

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} \tilde{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{r}.$$

すぐ後で確かめるように

$$(C.13) \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{f}} = \text{rot}(\mathbf{f} \circ \varphi) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

が成り立つので、Green の定理を  $\gamma$  で囲まれる領域  $D$  に適用して

$$\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_D \text{rot } \mathbf{f}(\varphi(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) du dv = \iint_D \text{rot } \tilde{\mathbf{f}}(u, v) du dv = \int_{\gamma} \tilde{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{r}.$$

ゆえに

$$\int_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

が成り立つ。これが証明すべき式であった。

(C.13) の証明が残っているが、これは単なる計算である。

$$\begin{aligned} \text{rot } \tilde{\mathbf{f}} &= \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \sum_{i=1}^3 f_i(\varphi(u, v)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \sum_{i=1}^3 f_i(\varphi(u, v)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 f_i(\varphi(u, v)) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u \partial v} + \sum_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} - \sum_{i=1}^3 f_i(\varphi(u, v)) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial v \partial u} - \sum_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u}. \end{aligned}$$

$\varphi$  が  $C^2$  級と仮定してあるので、右辺第 1 項と第 3 項は打ち消し合い

$$\begin{aligned} \text{rot } \tilde{\mathbf{f}} &= \sum_{i \neq j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\varphi(u, v)) \left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \right) \\ &= \sum_{(i,j)=(1,2),(2,3),(3,1)} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\varphi(u, v)) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\varphi(u, v)) \right) \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} \right) \\ &= \text{rot}(\mathbf{f} \circ \varphi) \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

<sup>6</sup>通常の内積の記号で書くと、 $(\mathbf{x}, A\mathbf{u}) = (A^T \mathbf{x}, \mathbf{u})$  となる。常識的な公式である。

## 付録D misc

### D.1 弾性体の方程式から P 波、S 波の方程式を導く

1.3.7 の問の解答を示す。

弾性方程式

$$(D.1) \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{u}).$$

$p := \operatorname{div} \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s} := \operatorname{rot} \mathbf{u}$  とおく。(D.1) の両辺に  $\operatorname{div}$  をほどこし、

$$(D.2) \quad \operatorname{div} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div},$$

$$(D.3) \quad \operatorname{div} \Delta = \Delta \operatorname{div},$$

$$(D.4) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \mu \Delta \operatorname{div} \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= (\lambda + 2\mu) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta p.$$

(D.1) の両辺に  $\operatorname{rot}$  をほどこし、

$$(D.5) \quad \operatorname{rot} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{rot},$$

$$(D.6) \quad \operatorname{rot} \Delta = \Delta \operatorname{rot},$$

$$(D.7) \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} = \mathbf{0}$$

を用いると

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mu \Delta \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mu \Delta \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

ゆえに

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{s}.$$

念のため  $\operatorname{rot} \Delta = \Delta \operatorname{rot}$  を証明しておこう。

$$\operatorname{rot} \Delta \mathbf{f} = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \left( \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \right) \\ \Delta \left( \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \right) \\ \Delta \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \right) \end{pmatrix} = \Delta \operatorname{rot} \mathbf{f}.$$

## 付録E 歴史メモ

「人類の歴史という長い眼から、例えば1万年後の世界から眺めたら、19世紀の一番顕著な事件がマクスウェルによる電磁気法則の発見であったと判断されることはほとんど間違いない。」(ファインマン物理学 [20] より)

### E.1 ベクトル解析の誕生

古典的なベクトル解析は、電気工学者の Oliver Heaviside の [30] (1893) と熱力学で有名な Josiah Willard Gibbs (1839–1903, 米国) (1881, 公刊は以下に示すように 1901) によって整えられた。両者とも、James Clerk Maxwell (1831–1879) により完成された電磁気学 ([31], 1873) を数学的に整理するのが目的であった。

この文書は、かなり Gibbs を袖にしてしまったので (バランスを取るため)、J. W. Gibbs の著作 [28] について、

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gibbs.html>

から引用しておく。

Gibbs' work on vector analysis was also of major importance in pure mathematics. He first produced printed notes for the use of his own students in 1881 and 1884 and it was not until 1901 that a properly published version appeared prepared for publication by one of his students. Using ideas of Grassmann, Gibbs produced a system much more easily applied to physics than that of Hamilton.

(ここに出て来る Hamilton<sup>1</sup>のシステムとは、**四元数 (quaternion)** のことであろう。)

Heaviside について、小松 [10] に色々書いてある。比較的最近出た

Paul J. Nahin, Oliver Heaviside: The Life, Work, and Times of an Electrical Genius of the Victorian Age, The Johns Hopkins University Press (2002)

や、定番らしい

Michael J. Crowe, A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System, Dover Publications (1994).

を見ると良いのだろうが、ようやく入手したものの、ツンドク状態である。

日本語で読めるものとしては、ベクトル解析の歴史と銘打っていないが、電磁気学の発展を追った太田 [3] がある。色々なことが書いてあって面白い。

なお、Green [29], Maxwell [31], Heaviside [30] は入手が容易で、英語であるのでとりあえず読むのは難しくない。こういうの読む暇があれば良いのに。

<sup>1</sup>Sir William Rowan Hamilton (1805–1865, Ireland の Dublin に生まれ、Dublin にて没する) は数学者かつ天文学者で、四元数の発見 (1843) 以外にも解析力学の分野で大きな業績がある。論文が <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Papers.html> から入手可能である。四元数については (色々な本に説明が書いてあるが、ベクトル解析の本ということならば) 例えば一松 [19] や小松 [10] を見よ。



## E.2 Gauss の発散定理

Gauss の発散定理は、普通 C. F. Gauss<sup>2</sup> (1839) の名前を冠されることが多いが、G. Green<sup>3</sup> (1828), M. V. Ostrogradskii<sup>4</sup> (1831) も発見 (かつ発表) していたということである。

G. Green については、岡本 [4]、太田 [3] などを見ると良い。

## E.3 Stokes の定理

George Gabiriel Stokes (1819–1903, アイルランドの Skreen に生まれ、英国の Cambridge にて没する) 宛への William Thomson (1824–1907, Lord Kelvin (Kelvin 卿), アイルランドの Belfast に生まれ、スコットランドの Netherhall にて没する) の手紙 (1850 年 7 月 2 日) の追伸に現れる (つまり発見者は William Thomson である)。公表されたのは、Stokes が実施した数学コンクールの中で出題されたのが初めてであるとか (スピヴァック [15] に書いてある)<sup>5</sup>。

なお、外微分形式を用いると、Green の定理、Gauss の定理、Stokes の定理のいずれも

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

という単一の公式で表現される。この定理のことも Stokes の定理とよばれる。

**参考 E.3.1** James Clerk Maxwell の “A Treatise on Electricity and Magnetism” (初版 1873, 第二版 1881, 第三版 1891) の Preliminary の Article 24 は

THEOREM IV. *A line-integral taken round a closed curve may be expressed in terms of a surface-integral taken over a surface bounded by the curve.*

で始まり、証明らしきものが書いてあって、

..., so that we get finally,

$$\iint (l\xi + m\eta + n\zeta)dS = \int \left( X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds; \quad (11)$$

where the first integral is extended over the surface  $S$ , and the second round the bounding curve  $s$ .

で終わっている。脚注には

This theorem was given by Professor Stokes, *Smith's Prize Examinations*, 1854, question 8.

It is proved in Thomson and Tait's *Natural Philosophy*, §190 ( $j$ ).

と書いてある。■

<sup>2</sup>Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855). 定規とコンパスによる正 17 角形の作図、代数学の基本定理、(自分で編み出した) 最小自乗法を駆使した小惑星セレスの軌道決定、正規分布の発見、非ユークリッド幾何学の発見、微分幾何学の創始 (リーマン幾何学のさきがけ) のような誰でも分かりそうな業績以外にも膨大な発見をした数学史上の巨人。「距離の 2 乗に反比例して作用する引力と圧力に関する一般的定理」という 1839 年の論文で発散定理を使ったとされるが、もっと早く 1813 年の論文にさかのぼれるという人もいる。

<sup>3</sup>George Green (1793–1841, 英国の Sneinton に生まれ、Sneinton にて没する)。

<sup>4</sup>Mikhail Vasilevich Ostrogradski (1801–1862, Ukraine の Poltava に生まれ、Poltava にて没する)。

<sup>5</sup>Ampere が 1825 年に発見したという説もあるので、そのうち調べてみよう。日本のウィキペディアに Kelvin と Stokes を取り違えた説明が書いてあったことがある (今見たら直っていました)。

## 付録F 問の解答

完備化しようと考えている (けれど、もうこの授業は担当しないだろうし、亀の歩みだと思う)。

解答 1.  $e_3, e_1, e_2$ . ■

解答 2.  $a = e_1, b = e_1, c = e_2$  とするとき、 $(a \times b) \times c = 0 \times e_2 = 0, a \times (b \times c) = e_1 \times e_3 = -e_2$  であるから、 $(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$ . ■

解答 3.

$$\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} \times \mathbf{c} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{0}). \blacksquare$$

解答 4. 四面体を OABC とする。 $\mathbf{a} := \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} := \overrightarrow{OB}, \mathbf{c} := \overrightarrow{OC}$  とおくとき、面積ベクトルの和は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b})) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}. \blacksquare \end{aligned}$$

解答 5.  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{a}) = \det(\mathbf{b} \ \mathbf{c} \ \mathbf{a}) = -\det(\mathbf{b} \ \mathbf{a} \ \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})$ . 他の2つも同様である。 ■

解答 6. 成分計算で示すことが出来る (というか、それ以外に上手な方法があるかしらん?)。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - c_2b_3 \\ b_3c_1 - c_3b_1 \\ b_1c_2 - c_1b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - c_1b_2) - (b_3c_1 - c_3b_1)a_3 \\ a_3(b_2c_3 - c_2b_3) - (b_1c_2 - c_1b_2)a_1 \\ a_1(b_3c_1 - c_3b_1) - (b_2c_3 - c_2b_3)a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_2a_2 + c_3a_3)b_1 \\ (c_3a_3 + c_1a_1)b_2 \\ (c_1a_1 + c_2a_2)b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (a_3b_3 + a_1b_1)c_2 \\ (a_1b_1 + a_2b_2)c_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3)b_1 \\ (c_2a_2 + c_3a_3 + c_1a_1)b_2 \\ (c_3a_3 + c_1a_1 + c_2a_2)b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\ (a_2b_2 + a_3b_3 + a_1b_1)c_2 \\ (a_3b_3 + a_1b_1 + a_2b_2)c_3 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \blacksquare \end{aligned}$$

解答 7. Lagrange の等式より

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \\ \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \\ \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}. \end{aligned}$$

この3つの等式を辺々加えればよい。 ■

解答 8. (準備中)

解答 9. (略)

解答 10. (略)

解答 11. (準備中)

解答 12. (準備中)

解答 13. (準備中)

解答 14. (準備中)

解答 15. (準備中)

解答 16. (準備中)

解答 17. (準備中)

解答 18. (準備中)

解答 19. (略)

解答 20. (準備中)

解答 23. (準備中)

解答 24. (準備中)

解答 25. (準備中)

解答 26. (準備中)

解答 27. (準備中)

# 索引

- closed curve, 16
- connected, 75
- conservative force, 31
- contour integral, 18
- curl, 11
- curve, 16
- cycloid, 19
  
- divergence, 11
  
- elliptic function, 21
- elliptic integral, 21
- Euler equation, 92
- exact, 30
- exterior product, 61
  
- flux, 66
  
- gradient, 10
  
- harmonic function, 12
- heat equation, 90
  
- irrotational, 11
  
- Jordan curve, 16
  
- lamellar, 11
- Laplacian, 12
- line integral, 18
  
- manifold, 78
  
- nabla, 10
- Navier-Stokes equation, 92
  
- outer product, 5
  
- path integral, 18
- Poisson equation, 36
  
- rot, 11
- rotation, 11
  
- simply connected, 76
  
- solenoidal, 11
- spur, 16
- Stokes equation, 92
- stream function, 12
  
- $u$  曲線, 49
  
- $v$  曲線, 49
- vorticity, 11
  
- wave equation, 15
  
- アルキメデスの浮力の原理, 68
  
- 渦度, 11
- 渦無し, 11
  
- Euler の方程式, 92
- オイラー標数, 79
- 応力テンソル, 91
- 同じ向き (曲面が), 59
  
- 外積 (3次元ベクトルの), 5
- 外積 (微分形式の), 61
- 回転, 11
- 回転放物面, 56
- 回転面, 54
- Gauss の発散定理, 65
- Gauss の法則, 67
- 角運動量, 9
- 可縮, 35
- 管状, 11
- 完全 (1次微分形式が), 30
  
- 逆向きにした曲線, 17
- 局所弧連結, 75
- 曲面積, 53
  
- 区間縮小法, 84
- 区分的に  $C^m$  級, 17
- クラインの壺, 78
- Green の積分公式, 89
- Green の定理, 39

Kepler の第二法則, 9  
 原始関数, 31  
 勾配, 10  
 Cauchy の積分定理, 45  
 Cauchy-Riemann の方程式, 45  
 弧長, 18  
 弧長パラメーター, 22  
 弧長要素, 18  
 弧連結, 75  
 サイクロイド, 19  
 四元数, 95  
 仕事, 23  
 始点 (曲線の), 16  
 終点 (曲線の), 16  
 ジョルダン曲線, 16  
 Jordan の曲線定理, 77  
 Jordan 領域, 77  
 スカラー三重積, 8  
 ストークスの定理, 69  
 Stokes の方程式, 92  
 正則 (パラメーター曲面), 49  
 正則 (曲線の), 16  
 正則パラメーター曲面, 49  
 静電位, 36  
 静電ポテンシャル, 36  
 正の向き (領域の境界曲線の), 39  
 跡 (曲線の), 16  
 接線線積分, 22  
 線積分, 18  
 線積分 (接線線積分), 24  
 線密度, 18, 27  
 線要素, 18  
 像 (パラメーター曲面の), 49  
 像 (曲線の), 16  
 層状, 11  
 速度場, 11  
 楕円関数, 21  
 楕円積分, 21  
 多様体, 78  
 単位接ベクトル, 25  
 単純曲線, 16  
 弾性波, 15  
 端点, 16  
 単連結, 34, 76  
 中心力場, 9, 14  
 調和関数, 12  
 つないだ曲線, 17  
 電気力線, 67  
 電磁波, 14  
 電磁誘導の法則, 70  
 等値面, 46  
 動粘性係数, 92  
 トーラス, 55  
 凸, 34  
 Navier-Stokes の方程式, 92  
 長さ, 19  
 長さ (曲線の), 18  
 長さを持つ, 19  
 流れ関数, 12  
 ナブラ ( $\nabla$ ), 10  
 Newton 力学の第二法則, 9  
 熱伝導の法則, 89  
 熱伝導方程式, 90  
 熱方程式, 90  
 粘性係数, 91  
 粘性率, 91  
 発散, 11  
 波動方程式, 15  
 Hamilton の微分演算子, 10  
 パラメーター曲面, 49  
 反対の向き (曲面が), 59  
 非圧縮条件, 90  
 非回転, 11  
 光の電磁波説, 15  
 歪み速度テンソル, 92  
 標準的な単位法線ベクトル, 59  
 ファラデー, 70  
 複素線積分, 24  
 物質微分, 90, 91  
 浮力, 68  
 閉曲線, 16  
 閉曲面, 78

閉形式 (1 次微分形式が), 35

ベクトル三重積, 8

ベクトル積, 5

Poisson 方程式, 36

ポアソン方程式, 36

Poincaré の定理, 35

ポアンカレ予想, 79

ホイットニーの定理, 78

法線ベクトル, 50

法線面積分, 60

星型, 34

保存力, 31

ポテンシャル, 30

ポテンシャル・エネルギー, 31

マクスウェルの方程式, 14, 70

向き (パラメーター曲面の), 59

Möbius の帯, 62

面積測度, 9

面積分, 53

面積分 (ベクトル場の法線面積分), 60

面積要素, 53

面要素, 53

Jacobi の等式, 8

Lagrange の公式, 8

Lagrange 微分, 90

ラプラシアン ( $\Delta$ ), 12

Riemann の写像定理, 77

流束, 66

輪環面, 55

レベル・セット, 46

連結, 75

連続の方程式, 90

歪テンソル, 92

湧き出し, 11