多変数の微分積分学１ 練習問題 No.1　(2013 年 4 月 15 日出題、4 月　日提出)

__ 年 16 組 ____ 番　氏名 ______________

問１　I を $\mathbf{R}$ の区間、$\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^n$, $\vec{g}\colon I \to \mathbf{R}^n$ とする。
(1) $\vec{f}$ と $\vec{g}$ がともに微分可能であるならば

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right) = \left(\vec{f}\,'(t), \vec{g}(t)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}\,'(t)\right) \quad (t \in I)$$

が成り立つことを示せ。
(2) 質点が等速運動するならば (つまり時刻 t における位置を $\vec{f}(t)$ と表すとき、$\left\|\vec{f}\,'(t)\right\|$ が定数関数となる)、速度と加速度はつねに直交することを示せ。

解説

(1) $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} := \vec{f}$, $\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} := \vec{g}$ とするとき、

$$\left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) g_j(t)$$

であるから、(1 変数実数値関数の) 積の微分法を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right) &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} f_j(t)g_j(t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(f_j(t)g_j(t)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(f_j'(t)g_j(t) + f_j(t)g_j'(t)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_j'(t)g_j(t) + \sum_{j=1}^{n} f_j(t)g_j'(t) = \left(\vec{f}'(t), \vec{g}(t)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}'(t)\right).\end{aligned}$$

(2) 仮定から、$\exists C \in \mathbf{R}$ s.t. $\forall \in I$ $\left\|\vec{f}'(t)\right\| = C$. ゆえに

$$\left(\vec{f}'(t), \vec{f}'(t)\right) = \left\|\vec{f}'(t)\right\|^2 = C^2.$$

両辺を t で微分すると、(1) を用いて

$$\left(\vec{f}''(t), \vec{f}'(t)\right) + \left(\vec{f}'(t), \vec{f}''(t)\right) = 0.$$

左辺は $2\left(\vec{f}''(t), \vec{f}'(t)\right)$ であるから、

$$\left(\vec{f}''(t), \vec{f}'(t)\right) = 0.$$

これは $\vec{f}''(t)$ と $\vec{f}'(t)$ が直交することを示す。 ■

(1) の別解　積の微分法の証明を思い出して、それをベクトル値関数化する (この方法は無限次元でも通用する)。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h), \vec{g}(t+h)\right) - \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right)\right] \\ &\quad = \frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h), \vec{g}(t+h)\right) - \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t+h)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t+h)\right) - \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right)\right] \\ &\quad = \frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t), \vec{g}(t+h)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)\right)\right].\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h), \vec{g}(t+h)\right) - \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right)\right] - \left[\left(\vec{f}'(t), \vec{g}(t)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}'(t)\right)\right] \\ &\quad = \left(\frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} - \vec{f}'(t), \vec{g}(t+h)\right) + \left(\vec{f}'(t), \vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)\right) \\ &\quad + \left(\vec{f}(t), \frac{\vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)}{h} - \vec{g}'(t)\right).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h),\vec{g}(t+h)\right)-\left(\vec{f}(t),\vec{g}(t)\right)\right]-\left[\left(\vec{f}\,'(t),\vec{g}(t)\right)+\left(\vec{f}(t),\vec{g}\,'(t)\right)\right]\right| \\
&\qquad \le \left\|\frac{\vec{f}(t+h)-\vec{f}(t)}{h}-\vec{f}'(t)\right\|\|\vec{g}(t+h)\|+\left\|\vec{f}'(t)\right\|\|\vec{g}(t+h)-\vec{g}(t)\| \\
&\qquad + \left\|\vec{f}(t)\right\|\left\|\frac{\vec{g}(t+h)-\vec{g}(t)}{h}-\vec{g}'(t)\right\| \\
&\qquad \to 0\cdot\|\vec{g}(t)\|+\left\|\vec{f}'(t)\right\|\cdot 0+\left\|\vec{f}(t)\right\|\cdot 0=0.
\end{aligned}
$$

ただし

- $h \to 0$ のとき $\vec{F}(t+h) \to \vec{A}$ ならば $\left\|\vec{F}(t+h)\right\| \to \left\|\vec{A}\right\|$
- $\vec{g}$ が t で微分可能ならば $\vec{g}(t+h) \to \vec{g}(t)$ $(h \to 0)$

ということを使った (その証明も 1 変数の場合と同様に出来る)。 ■