多変数の微分積分学1 第8回

桂田 祐史

2013年6月10日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/

1 問7の解説

6 全微分 (続き)

6.5 微分の意味

授業では、行きがかり上、順番を入れ替えて、6.5.2 から先に説明した。

6.5.1 線形化写像は元の関数を近似する $f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a)$

まず「全微分」の定義を復習しよう。f が a で全微分可能であるとは、

$$\exists A \in M(m,n;\mathbf{R}) \quad \text{s.t.} \quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}\left(f(a+h)-f(a)-Ah\right)=0$$

が成り立つことをいい (Ah は行列 A とベクトル h の積を意味していることに注意する)、一意的に定まる行列 A のことを f の a における全微分係数と呼び、$f'(a)$ で表す。

これから、f が a で全微分可能ならば

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}\left(f(a+h)-f(a)-f'(a)h\right)=0$$

が成り立つ。$h\to 0$ のとき、分母は 0 に収束するので、分子はそれよりも速く 0 に収束する、ということである。このことを

$$f(a+h)-f(a)-f'(a)h = o\left(\|h\|\right) \quad (h\to 0)$$

と書く (Landau の little “o” notation)。

不正確な書き方になるが[1]、$\|h\|$ が十分小さいとき、

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

が成り立つ。言い方を変えると、x が a に十分近いとき、

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$$

が成り立つ。この右辺の式で表される写像、すなわち

$$\Omega \ni x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a) \in \mathbf{R}^m$$

を f の (a における) **線形化写像** (**1次近似**) と呼ぶ (これはちゃんとした定義である)。

[1] $\fallingdotseq$ というのは、数学語ではない。

6.5.2 $\mathrm{grad}\, F$ はレベルセットの法線ベクトル

ここは 6/3 の授業で途中まで説明した。

以下、Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は C^1 級とする。$c \in \mathbf{R}$ に対して、

$$L_c := \{x \in \Omega; F(x) = c\}$$

とおき、F のレベル c の**レベル・セット**と呼ぶ。

$L_c = \emptyset$ となることもありうるが、$a \in \Omega$ のとき、$c := F(a)$ とおくと、$a \in L_c$ が成り立つので、$L_c \neq \emptyset$ である。

例 6.1 (円はレベル・セットとして扱える) $\Omega = \mathbf{R}^2$, $F(x,y) := x^2 + y^2$ とするとき、L_1 は原点中心半径 1 の円周, L_2 は原点中心半径 $\sqrt{2}$ の円周, L_0 は原点 1 点からなる集合 $\{(0,0)\}$, $L_{-1} = \emptyset$. ■

例 6.2 (等高線とレベル・セット) Ω をある地図、$(x,y) \in \Omega$ に対して、$F(x,y)$ は (x,y) という地点の標高とするとき、L_c は高さ c の**等高線** (**contour**) である。 ■

実は、**$\nabla F(a)$ は、L_c の点 a における法線ベクトル**と呼ぶにふさわしいものである。実際、

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\|x-a\|}\left(F(x) - F(a) - F'(a)(x-a)\right) = 0$$

が成り立つが、$c := F(a)$ とするとき、$\forall x \in L_c$ に対して $F(x) = c$ であることと、$F'(a)(x-a) = (\nabla F(a), x-a)$ であることから、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|x-a\|}\left(F(x) - F(a) - F'(a)(x-a)\right) &= \frac{1}{\|x-a\|}\left(c - c - (\nabla F(a), x-a)\right) \\
&= -\frac{1}{\|x-a\|}(\nabla F(a), x-a) \\
&= -\left(\nabla F(a), \frac{x-a}{\|x-a\|}\right)
\end{aligned}$$

となるので、

$$\lim_{\substack{x\in L_c \\ x\to a}} \left(\nabla F(a), \frac{x-a}{\|x-a\|}\right) = 0.$$

(以上 (と以下) の議論は「考察」であり、「証明」ではない。盲目的に信じ込まれても困るので、少し疵を指摘しておくと、L_c がどういう集合であるか、一般には良く分からない。そもそも L_c をたどって、a に近づくことが出来るのかも分からない。後で「陰関数定理」という定理を学ぶとこのあたりのことが解決される。)

$\nabla F(a) \neq 0$, $x \neq a$ であるとき、$\nabla F(a)$ と $x - a$ のなす角 $\theta(x) \in [0, \pi]$ が

$$(\nabla F(a), x-a) = \|\nabla F(a)\|\ \|x-a\| \cos\theta(x)$$

により定義できる。このとき

$$\lim_{\substack{x\in L_c \\ x\to a}} \cos\theta(x) = 0$$

であるから

$$\lim_{\substack{x\in L_c \\ x\to a}} \theta(x) = \frac{\pi}{2}. \tag{$\angle R$}$$

(注意: $x \to a$ のとき $\dfrac{x-a}{\|x-a\|}$ 自身が何かあるベクトルに収束するというわけではなく、収束が保証出来るのは角度だけである。)

6/10 の授業はここからです。

以上の考察を背景に、次のように定義する。

定義 6.3 Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon \Omega \to \mathbf{R}$ が C^1 級の開集合、$a \in \Omega$, $\nabla F(a) \neq 0$ とする。このとき、

$$\{x \in \mathbf{R}^n; (\nabla F(a), x-a) = 0\}$$

を、L_c の a における**接超平面** ($n=3$ のときは単に接平面), $\nabla F(a)$ を L_c の a における**法線ベクトル** (normal vector) と呼ぶ。

また点 a を通り $\nabla F(a)$ を方向ベクトルとする直線を、L_c の a における**法線** (normal line) と呼ぶ。

現時点で ($\angle R$) は、根拠にあいまいなところがあるので、「∇F が法線ベクトル」というのは**定義したこと**である。この点、何かずるいと感じられるかも知れないが[2]、後で陰関数定理を学ぶと、($\angle R$) が根拠を持った主張として浮上して来る。

さて、c を変化させて、それぞれの値に対して L_c を描いてみよう。こうして出来た図を地図とみなすと、次のことが分かる。

$\nabla F(a)$ は点 a において傾斜が最も急な方向を表す。

証明もどき

$$F(a+h) - F(a) = (\nabla F(a), h) + o(\|h\|) \quad (h \to 0).$$

右辺の第 2 項は h より高位の無限小だから、右辺第 1 項が F の増分の主部といえる。h と $\nabla F(a)$ のなす角を $\theta(x) \in [0,\pi]$ とすると、

$$|(\nabla F(a), h)| = \|\nabla F(a)\|\ \|h\| \cos\theta(x)$$

が成り立ち、

$$-\|\nabla F(a)\|\ \|h\| \le (\nabla F(a), h) \le \|\nabla F(a)\|\ \|h\|\,.$$

左の不等号の等号は、$\theta(x) = \pi$, すなわち $\exists\lambda \le 0$ s.t. $h = \lambda \nabla F(a)$ のとき、右の不等号の等号は、$\theta(x) = 0$, すなわち $\exists\lambda \ge 0$ s.t. $h = \lambda\nabla F(a)$ のとき、成立する。つまり、$\nabla F(a)$ の方向に移動すると、高さの増加が最も大きい。 ■

例 6.4 (平面内の直線の接線) $A, B \in \mathbf{R}^2$, $(A,B) \neq (0,0)$ とするとき、

$$F(x,y) := Ax + By$$

は C^∞ 級の $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を定める。$\forall x \in \mathbf{R}$ に対して、F の高さ c のレベルセット

$$L_c = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; F(x,y) = c\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; Ax + By = c\right\}$$

はベクトル $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ に垂直な直線である、ということは良く知られている。$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ であり、確かに ∇F は L_c の法線ベクトルである。

[2] この辺の事情は、曲線の弧長の定義のそれと少し似ている。

$(a,b)\in L_c$ とする $(Aa+Bb=c)$。このとき、接超平面は

$$A(x-a)+B(y-b)=0.$$

$Aa+Bb=c$ であるから、

$$Ax+By=c.$$

つまり接超平面は接線で、L_c 自身に一致する。■

例 6.5 (平面内の円の法線ベクトルと接線) $F(x,y):=x^2+y^2$ とすると、$\nabla F(x,y)=\begin{pmatrix}F_x\\F_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$. $R>0$ とするとき、$L_{R^2}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; F(x,y)=R^2\}$ は、原点中心、半径 R の円周である。$(a,b)\in L_{R^2}$ とするとき、

$$\nabla F(a,b)=\begin{pmatrix}2a\\2b\end{pmatrix}$$

であるが、これは確かに (a,b) における法線ベクトルである (円周上の点 (a,b) を通る円の半径は、円の接線と直交するので、円の中心から (a,b) に向うベクトル $\begin{pmatrix}2a\\2b\end{pmatrix}$ は L_c の法線ベクトルである)。

(a,b) における接超平面 (これも 2 次元なので接線) は

$$\nabla F(a,b)\cdot\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}=0.$$

すなわち

$$2a(x-a)+2b(y-b)=0.$$

$a^2+b^2=R^2$ を用いて整理すると $ax+by=R^2$. これは接線の方程式である。■

例 6.6 (2 変数関数のグラフの接線) Ω は $\mathbf{R}^2$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbf{R}$ とするとき、f のグラフ $\operatorname{graph} f=\{(x,y,z);(x,y)\in\Omega,\ z=f(x,y)\}$ は、

$$F(x,y,z):=f(x,y)-z\quad((x,y,z)\in\Omega\times\mathbf{R})$$

のレベル 0 のレベルセットである。(a,b,c) (ただし $c=f(a,b)$) における接平面は

$$\begin{pmatrix}f_x(a,b)\\f_y(a,b)\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}=0.$$

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+(-1)(z-c)=0.$$

$c=f(a,b)$ であるから、

$$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b).$$

これは

$$z=f'(\boldsymbol{a})\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{a})$$

と書ける。つまり、f の線形化写像のグラフである。■

例題 6.1 楕円 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (a, b は正定数) 上の点 (x_0,y_0) における接線の方程式を求めよ。

解　$F(x,y) := x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$ とおくと、楕円は $F(x,y) = 0$ となり、

$$\nabla F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0/a^2 \\ 2y_0/b^2 \end{pmatrix}.$$

これが 0 にならないから ($\because (x_0, y_0) \neq (0,0)$)、$(x_0, y_0)$ における楕円の接線の法線ベクトルとなる。したがって、接線の方程式は

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0.$$

これを整理すると

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

点 (x_0, y_0) が楕円上の点であるから、$\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ が成り立つので、

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad \blacksquare$$

問 8　(1) 関数 $f(x,y) := \sqrt{17 - 5x^2 - 4y^2}$ のグラフの $(-1, 1, 2\sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ。

(2) 関数 $F(x,y,z) := \dfrac{(x+1)^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{(z-1)^2}{9}$ のレベルセット $L_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; F(x,y,z) = 1\}$ について、次の問に答えよ。(a) $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, 3\right) \in L_1$ における、L_1 の接平面の方程式と法線を求めよ。(b) 平面 $x + y + z = k$ (k は実定数) が L_1 の接平面になるように、k の値を求めよ。

問 (2-b) を解くための例題。楕円 $F(x,y) := x^2/4 + y^2/3 = 1$ に直線 $x + y = k$ が接するような k を求めよ。もちろん高校数学的に判別式を考えても解ける。(a,b) が $F(x,y) = 1$ 上にあり、$\nabla F(a,b) \parallel (1,1)$ となるように

$$F(a,b) = 1 \quad \wedge \quad \exists t \in \mathbf{R} \quad \nabla F(a,b) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から $(a,b) = \pm\left(\frac{4}{\sqrt{7}}, \frac{3}{\sqrt{7}}\right)$. これから $k = a + b = \pm\sqrt{7}$.

7　合成関数の微分法

非常に重要であるが、一つの難所である。簡単のようでいて難しいところがある。

- 公式そのものは、1 変数の場合の素直な拡張とみなせるので、覚えるのは簡単である。
- 具体的な合成関数を微分するのは簡単、というか、ひょっとすると不要なのかもしれない。使わずに解ける問題が実は多い。(要は、多変数関数でも、偏微分を計算すれば良いので、結局は 1 変数関数の問題になってしまう場合が多い。)
- 具体的な関数でない場合にとても重要なものが多く (例えば微分方程式を変数変換する)、しかも計算が非常に面倒というのが少なくない。
- 具体的な計算問題のドリルをこなしてマスターする、という学校数学の勉強法は通用しない。

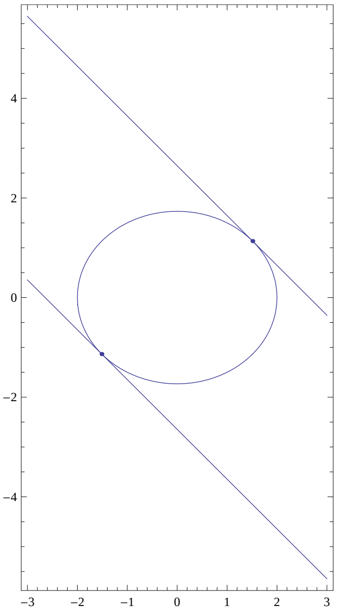

図 1: 楕円と接線

7.1　定理と証明

1 変数の場合

$y = f(x)$, $z = g(y)$ がいずれも微分可能であれば、合成関数 $z = g(f(x))$ も微分可能で、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

つまり

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) \quad (\text{ただし } b = f(a))$$

である。

これは多変数の場合にも、自然に拡張できる。右辺をヤコビ行列の積とみなせばよい。

定理 7.1 (合成関数の微分法, chain rule (連鎖律)) Ω, D はそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の開集合で、$a \in \Omega$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$, $g\colon D \to \mathbf{R}^\ell$, $f(\Omega) \subset D$, $b = f(a)$, f は a で微分可能、g は b で微分可能ならば、$g \circ f$ は a で微分可能で、

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a).$$

$y = f(x)$, $z = g(y)$ と書けば、上式の (i, j) 成分は

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \quad (1 \le i \le \ell,\ 1 \le j \le n).$$

A　高校数学の補足

直線 $Ax + By = c$ は、$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ に垂直である。

証明　直線上の点 $\mathrm{C}(x_0, y_0)$ を一つ取る ($Ax_0 + By_0 = c$ が成り立つ)。

直線上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して、$Ax + By = c$ が成り立つが、辺々引き算して $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$ これは $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} = 0$ と書き直せるので、$\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ を示している。 ■

点 $\mathrm{C}(x_0, y_0)$ を通り、$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ に垂直な直線の方程式は、$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$

証明　$\mathrm{P}(x, y)$ が直線上にあるための条件は、$\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ である。書き直すと $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$ ■