2011 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 試験問題

2011 年 7 月 26 日施行, 担当　桂田 祐史

ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義と閉集合の定義を述べよ。(2) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2+y^2 < 1,\ |x|+|y| \le 2\}$ とおくとき、以下の問 (a), (b), (c) に答えよ。

(a) A を図示せよ。(b) A が $\mathbf{R}^2$ の開集合であるかどうか、$\mathbf{R}^2$ の閉集合であるかどうか述べよ。(c) (b) で「…である」と述べたことを証明せよ。証明に使う定理があれば、それを書け。

2. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ について、(a) f は各変数につき偏微分可能, (b) f は連続, (c) f は全微分可能, (d) f は C^1 級, という 4 つの条件を考える。

(1) (d) が成り立つとはどういうことか、定義を書け。

(2) 条件 (a), (b), (c), (d) 間の関係について説明せよ (ある条件から別の条件が一般に導かれるならば、それをすべて指摘せよ)。

(3) 次式で定義される $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ が、条件 (a), (b), (c), (d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}.$$

(4) (3) の f について、$f_{xy}(0,0)$ と $f_{yx}(0,0)$ を調べよ (存在するならばその値を求めよ)。

3. C^2 級の関数 $u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ と正定数 c に対して

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad v(\xi,\eta) = u(x,t), \quad \text{すなわち} \quad v(\xi,\eta) := u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right)$$

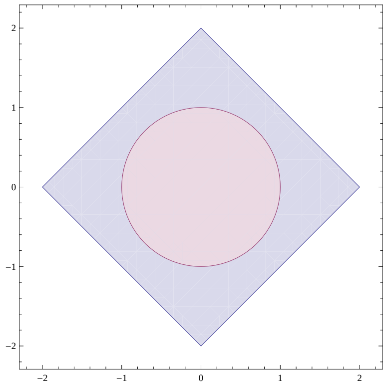
とおくとき、以下のものを v の偏導関数で表せ。(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$　(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$　(3) $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

4. $f(x,y) := (x^3 - x)(y^3 - y)$ について、以下の問に答えよ。
(1) f の gradient $\nabla f(x,y)$ と Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(2) f の極値を求めよ。

5. $f, g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y) := x^2+y^2$, $g(x,y) := 5x^2+6xy+5y^2-8$ で定め、$N_g := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; g(x,y) = 0\}$ とおく。
(1) N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であることを示せ。(2) N_g 上の点 (x_0,y_0) における、N_g の接線の方程式を求めよ。(3) $(x_0,y_0) \in N_g$ が曲線 $f(x,y) = c$ (c はある定数) の上にあり、かつ (x_0,y_0) における $f(x,y) = c$ の接線が、N_g の接線と一致する (つまり N_g と $f(x,y) = c$ が共通の接線を持つ) とき、(x_0,y_0) を求めよ。(4) N_g における f の最大値、最小値を求めよ (厳密な証明は不要)。

略解

1. (1) $A \subset \mathbf{R}^N$ とする。A が $\mathbf{R}^N$ の開集合であるとは、$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon) \subset A$ が成り立つことをいう。A が $\mathbf{R}^N$ の閉集合であるとは、$A^c (= \mathbf{R}^N \setminus A)$ が $\mathbf{R}^N$ の開集合であることをいう。(2) (a) $x^2 + y^2 < 1$ ならば $|x| + |y| = \sqrt{(|x|+|y|)^2} \le \sqrt{2|x|^2 + 2|y|^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{2} < 2$ であるから (一応証明を書いたが、ここは図から分かるとして構わない)、実は $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$. ゆえに原点中心半径 1 の円を描いて、その内部とすれば良い。(b) A は $\mathbf{R}^2$ の開集合であり、閉集合ではない。(c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ は多項式であるから、$f\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbf{R}$ は連続である。ゆえに $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; f(x,y) < 1\}$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。「$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が連続で、$b \in \mathbf{R}$ とするとき、$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である」、「$f(x_1, \dots, x_n)$ が $x_1, \dots, x_n$ の多項式ならば、$f\colon \mathbf{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}$ は連続である」という定理を用いた。 ■



A は二つの共通部分で、結局は開円盤 $\{(x,y); x^2+y^2<1\}$ です。

```
RegionPlot[{Abs[x]+Abs[y]<=2,x^2+y^2<1},{x,-2.2,2.2},{y,-2.2,2.2}]
```

- 合計 20 点
  - (1) $4 + 4 = 8$
  - (2) (a) 4 点
    - (b) 4 点 (「閉集合でない」まで書いて欲しかったが、減点はやめた)
    - (c) 4 点
- (1) の開集合の主語なしは半分の得点とする。「A が開集合であるとは」のように、何が開集合であるか (この場合は A) はっきり書くこと。
- (2-a) 点線と斜線を描いて欲しい。本当は「斜線部の領域、境界は含まない」のような言葉を添えるべきと思うが、こちらも板書でその手の言葉をサボっている手前、それは要求しなかった。
- (2-a) の図が間違っている (例えば円盤の上半分とか) のは、(2-b) 以下採点しない。
- 「開球は開集合」と堂々と言ってくれても良かったと思うけれど (それはそれで多くの人が知っている定理だ)、その証明を書いた人も多かった。もちろん、それでも結構。
- (2-b) は「閉集合でない」まで書いて欲しかったが、減点はやめた。本当は開集合であることは、閉集合でないことを意味しないので、両方について書くべきである。

2.

(1) f の Ω における 1 階偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j=1,\dots,n)$ がすべて存在し、それらが (つまり $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ が) Ω で連続であること。

(2) (d)$\Longrightarrow$(c), (c)$\Longrightarrow$ (b), (c)$\Longrightarrow$ (a) とそれから導かれる (d) $\Longrightarrow$ (a), (d) $\Longrightarrow$ (b) は成立するが、それら以外は一般には成立しない。

(3) この f は実は C^1 級で、(従って) (a), (b), (c), (d) がすべて成立する。f が $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で C^∞ 級であることは明らかなので、問題は $(0,0)$ でどうなるかだが、$f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ が存在して、f_x と f_y は $(0,0)$ で連続なことが分かるので、f は C^1 級である。手短な証明は

$$\begin{aligned}&f_x(x,y)=\frac{y^3(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y(x,y)=\frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\quad((x,y)\neq(0,0)),\\&f_x(0,0)=0,\quad f_y(0,0)=0\end{aligned}$$

から

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f_x(x,y)=f_x(0,0),\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f_y(x,y)=f_y(0,0)$$

を示す (具体的には引き算して不等式評価)、という路線。例えば

$$|f_x(x,y)-f_x(0,0)|=\frac{|y|\cdot|y|^2\left|-x^2+y^2\right|}{(x^2+y^2)^2}\le\frac{|y|\left(x^2+|y|^2\right)\left(|-x^2|+|y^2|\right)}{(x^2+y^2)^2}=|y|\to 0.$$

(4) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ については、宿題の問 5 とほとんど同じ (x と y を入れ替えただけ)。$f_{xy}(0,0)=1$, $f_{yx}(0,0)=0$. ■

- (1)〜(3) で 20 点、(4) は別枠で 20 点。
  - (a) 5 点
  - (b) d → c, c → b, c → a があれば 3 点, 系まで込めて完璧で 5 点
  - (c) 10 点 (偏微分まで 2 点, 偏微分と連続で 4 点, 全微分まで 6 点、間違った主張は 2 点ずつ減点)
  - (d) 正しく $f_{xy}(0,0)=1$, $f_{yx}(0,0)=0$ が出来たら 20 点。
- (1) で「f が微分可能で f' が連続」と書いた人がいるけれど、それは 1 変数の場合の引写しだね。多変数の場合に f' が連続ってどういうこと？もちろん定義できるんだけど、かなりやっかいだから (1 階の場合で行列値関数だし、階数が上がった C^2 級ってどう定義する？)、それを避けるように話が作られているのに (避けずにやっている本は 5% もないと思う)、自分で勝手に作ってはいけません。結局 C^1 級の定義がきちんと書けた人は少数派でした。
- $y=kx$ 作戦では極限が存在することは証明出来ない。(授業中に何度も言ったので、ここで説明は繰り返さない。)

- (3) の証明部分は間違った主張でなければ、説明不足でも正解にした場合がある。でも間違った不等式が多い。結局は証明しないで正しい不等式を書くのは無理ということか？「不等式は必ず証明しなさい」 と言うべきなのかも。

- 間違った不等式を「証明つきで」使う人も少なくなかった。任意の x, y に対して $\dfrac{1}{x^2+y^2} \leq 1$ とも限らないし、$xy \geq 0$ とも限らない。$\dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{y^2}$ みたいなことをする人もいたが (分母を小さくすれば大きくなる、というつもりだろう)、$(x, y) \neq (0, 0)$ であるからと言って $y \neq 0$ とは限らないので、やってはいけない評価だ。

3. 宿題の問 8 の解き方のうち、$\dfrac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx}$ を計算していって、$-4v_{\eta\xi}$ に等しくなることを示す、というのをして下さい、ということ。

$$\xi_x = 1, \quad \xi_t = -c, \quad \eta_x = 1, \quad \eta_t = c.$$

chain rule によって

$$\begin{aligned}
u_t &= v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = -cv_\xi + cv_\eta, \\
u_{tt} &= -c(v_{\xi\xi}\xi_t + v_{\xi\eta}\eta_t) + c\,(v_{\eta\xi}\xi_t + v_{\eta\eta}\eta_t) = c^2 v_{\xi\xi} - c^2 v_{\xi\eta} - c^2 v_{\eta\xi} + c^2 v_{\eta\eta} \\
&= c^2\left(v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}\right), \\
u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + c_\eta, \\
u_{xx} &= v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}.\blacksquare$$

- 合計 20 点
- 8+8+4 と配点。
- u の偏導関数を v で書く、v の偏導関数を u で書く、両方やっておいたのに、片方しか「覚えていない」人がいるみたい。複数のやり方を見せるのは、どちらも重要だからで、何か一つやり方を覚えておしまいというのは心掛けが悪いです。そもそもこの問題は合成関数の微分法を理解してもらうための問題であって、違う問題が出ても解けるようにならないと。逆方向はお手上げでは困る。
- $u_t = -cv_\xi + cv_\eta$ だけで止った人にも 4 点進呈。

4. (1) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}(3x^2-1)(y^3-y)\\(3y^2-1)(x^3-x)\end{pmatrix}$, $H(x,y) = \begin{pmatrix}6x(y^3-y) & (3x^2-1)(3y^2-1)\\(3x^2-1)(3y^2-1) & 6y(x^3-x)\end{pmatrix}$

(3) $\nabla f(a,b) = 0$ を満たす点 (停留点) は、$(a,b) = (0,0), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\pm(1,1)$, $\pm(1,-1)$, $\pm(1,0)$, $\pm(0,1)$ の 13 個。$H(a,b)$ の符号を調べて、$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき $H(a,b) = \begin{pmatrix}-4/3 & 0\\0 & -4/3\end{pmatrix}$ は負値なので極大値 $\frac{4}{27}$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき $H(a,b) = \begin{pmatrix}4/3 & 0\\0 & 4/3\end{pmatrix}$ は正値なので極小値 $-\frac{4}{27}$ を取る。他の点では $\begin{pmatrix}0 & 4\\4 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -2\\-2 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ など不定符号なので極値は取らない。 ■

- 合計 20 点
  (1) 3+3=6 点
  (2) $\nabla f(x,y) = 0$ をちゃんと解いて 5 点, 極大・極小・不定符号 $3 \times 3 = 9$ 点で、合計 14 点

- $f(x,y)$ の式を展開してから微分した人が結構いました。「微分する」のような目的の前に、それが簡単になるような式変形をすることはあります。場合によっては因数分解してから微分するということだってあるでしょう。「まずは展開して」はちょっと拙いですね。そうやると、かなり面倒な問題になってします。

- 解が 13 個ない解答がかなり多かった。論理の計算が弱いというか、しないんでしょうね (答案ではいきなり間違った答に飛んでしまっている)。

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) = 0 &\iff \big(3x^2-1=0 \quad \text{or} \quad y^3-y=0\big) \quad \text{and} \quad \big(3y^2-1=0 \quad \text{or} \quad x^3-x=0\big)\\ &\iff (3x^2-1=0 \text{ and } 3y^2-1=0) \text{ or } (3x^2-1=0 \text{ and } x^3-x=0)\\ &\qquad \text{or } (y^3-y=0 \text{ and } 3y^2-1=0) \text{ or } (y^3-y=0 \text{ and } x^3-x=0)\\ &\iff (x,y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{or} \quad \text{解なし} \quad \text{or} \quad \text{解なし}\\ &\qquad \text{or} \quad (x,y) = (-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1).\end{aligned}$$

- $\begin{pmatrix}0 & a\\a & 0\end{pmatrix}$ は不定符号という定理を作って使った人がいた。偉い。そういうようにやるものです。たくさんの場合があるわけだけど、きれいに解決。

5.

(1) $g(x,y)$ は x と y の多項式であるから、$g\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto g(x,y) \in \mathbf{R}$ は連続である。ゆえに $N_g = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; g(x,y) = 0\}$ は $\mathbf{R}^2$ の閉集合である。さて、任意の $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対して、

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 \geq 2(x^2 + y^2)$$

が成り立つ。実際、

$$\text{左辺} - \text{右辺} = 3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x+y)^2 \geq 0.$$

これから $(x,y) \in N_g$ ならば、

$$8 = 5x^2 + 6xy + 5y^2 \geq 2(x^2 + y^2) \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

ゆえに $N_g \subset \overline{B}\,((0,0);2)$. これは N_g が有界であることを示している。

(2) $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 10x + 6y \\ 6x + 10y \end{pmatrix}$ であるから、(x_0, y_0) における接線の方程式は

$$(10x_0 + 6y_0)(x - x_0) + (6x_0 + 10y_0)(y - y_0) = 0.$$

これから

$$(10x_0 + 6y_0)x + (6x_0 + 10y_0)y = 10x_0^2 + 12x_0y_0 + 10y_0^2.$$

$(x_0, y_0) \in N_g$ であるから右辺は 16 である。2 で両辺を割って

$$(5x_0 + 3y_0)x + (3x_0 + 5y_0)y = 8.$$

(3) $f(x,y) = c$ の (x_0, y_0) における接線は、$x_0x + y_0y = c$. これと $(5x_0+3y_0)x+(3x_0+5y_0)y = 8$ が一致するので、

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5x_0 + 3y_0 \\ 3x_0 + 5y_0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

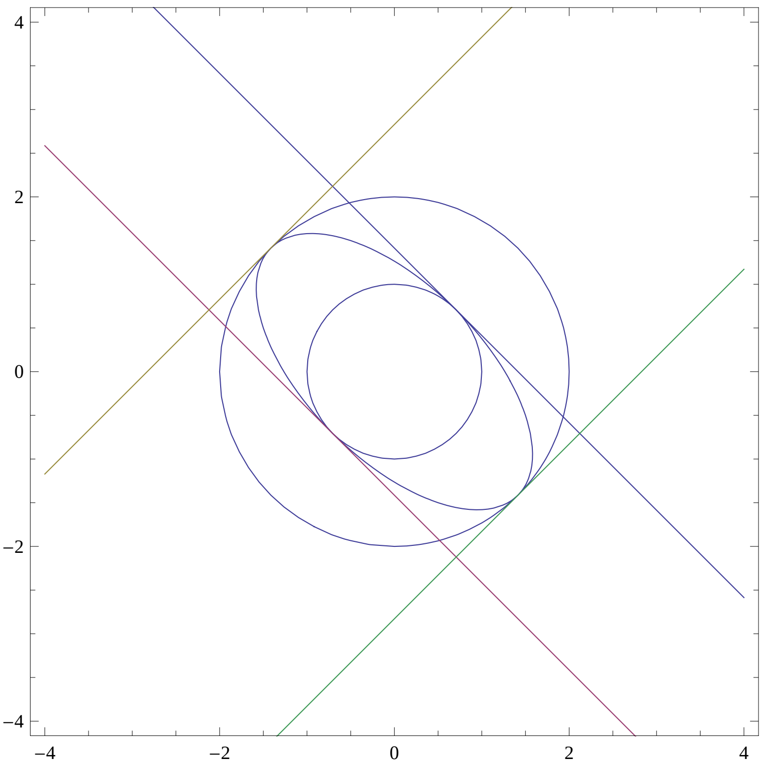
これと $f(x_0, y_0) = c$ あるいは $g(x_0, y_0) = 0$ を連立して解いて、

$$(x_0, y_0, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4\right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right).$$

ちなみに接線の方程式は

$$x_0 + y_0 = \pm\sqrt{2}, \quad x_0 - y_0 = \pm 2\sqrt{2}.$$

(4) f が極値を取るとき、f の等高線 $f(x,y) = c$ の接線は N_g の接線であると考えられる (横断的に交わっている場合は、c を少しずらすことで、f の値を小さくしたり大きくしたり出来るので、極値とはならない)。分かりにくいかも知れないが、図を見ると納得しやすいかも。(3) で求めた c のうち、大きい方が最大値、小さい方が最小値である。$(x,y) = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ のとき最大値 4, $(x,y) = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ のとき最小値 1. ■



- 合計 20 点
  (1) 閉集合に 2 点, 有界に 4 点で合計 6 点。
  (2) 接線の方程式に 4 点。法線ベクトルを計算したら (ちゃんと法線ベクトルと述べたら) 2 点。
  (3) 接点が求まって 6 点。
  (4) 4 点。
- (1) 関数 g と集合 N_g が混ざっていて、「N_g は連続」なんてのは困る。
- N_g の正体が分かると見通しが良いでしょうか。2 変数 2 次多項式が 0 だから、2 次曲線というのはすぐに分かります (線形代数で習っているかなあ…)。だから例外的な状況 (空集合、1 点、直線のようなもの) を除いて円錐曲線 (楕円、放物線、双曲線) というものになります。(1) で有界と判定されるので、楕円であるということが分かります。
- (1) $x^2 + y^2 \leq 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ から $\|(x, y)\| \leq 2\sqrt{2}$ としている人が多いような気がするけれど、最初の不等号は何故？有界性の証明で、正しい不等式だが証明さぼりは、半分の 2 点。$4x^2 + 4y^2 \leq 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ とか $5x^2 + 5y^2 \leq 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ というのもあったが、これらは成立しない不等式。
- (2) だけど、$10x + 6y + 6xy' + 10yy' = 0$ から、$y' = -\dfrac{10x + 6y}{6x + 10y}$ という式を出して、$y = -\dfrac{5x_0 + 3y_0}{3x_0 + 5y_0}(x - x_0) + y_0$ とした人がいた。なるほど。でも分母が 0 になったらどうするの。まあ 4 点あげよう。

- (3) で $\exists\lambda \in \mathbf{R}$ s.t. $\nabla f(x,y) = \lambda\nabla g(x,y)$ が登場しているのに注目。この問題は Lagrange の未定乗数法を知らずに解けるはず。
- (3) は通りすぎて、(4) を Lagrange の未定乗数法で解いた人にも点をあげました。