多変数の微分積分学1 演習問題 (Part 3)

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

2011年7月11日

忘れ物

85 の前半は、問8のように直すべきだったかも。

問8 C^2 級の関数 $u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ と正定数 c があるとき、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad v(\xi,\eta) = u(x,t), \quad \text{すなわち} \quad v(\xi,\eta) := u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right)$$

とおく。このとき次式を証明せよ (左辺、右辺どちらから始めても良い、余裕あれば両方)。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}.$$

次も Part 2 に入れておくべき問題。

90. (**平面波**) $\nu \in \mathbf{R}^n$ は $\|\nu\| = 1$ を満たし、$c > 0$, $U\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は C^2 級の関数とするとき、

$$u(x,t) := U(\nu \cdot x - ct) \quad ((x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$$

で定義される $u\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \triangle\, u(x,t)$$

を満たすことを示せ。ただし、

$$\nu \cdot x = \sum_{j=1}^n \nu_j x_j, \quad \triangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Taylor の定理

(具体的に与えられる多変数関数は、1変数関数から組み立てられるものが多いので[1]、多変数関数の Taylor の定理を用いる場合は少ない。理論的な内容 (例えば極値問題に関する命題の証明) に用いるのが、重要となる。)

[1] これは1変数関数から組み立てられる多変数関数しか登場しないという意味ではない。1変数関数から組み立てられない多変数関数は応用上頻出するが、そういう関数は、「知っている」関数を用いて具体的に表すことは出来ない、ということである。

91.　二項定理を証明せよ (高校数学の復習)。

92.　$n, m \in \mathbf{N}$ に対して

$$(a_1 + \cdots + a_n)^m = \sum_{1 \le i_1, \cdots, i_m \le n} a_{i_1} \cdots a_{i_m} = \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ は非負整数} \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m}} \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$$

が成り立つことを証明せよ。

93.　$n, k \in \Omega$, Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f \colon \Omega \to \mathbf{R}$ が C^k 級, $[a, a+h] := \{a + th; t \in [0,1]\} \subset \Omega$ とするとき、$F(t) := f(a + th)$ $(t \in [0,1])$ とおくと、F は C^k 級で、$\forall m \in \{1, \ldots, k\}$, $\forall t \in [0,1]$ に対して、

$$\begin{aligned} F^{(m)}(t) &= \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_m \le n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} (a + th) h_{i_1} \cdots h_{i_m} \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ は非負整数} \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m}} \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} (a + th) h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ (この事実は授業で証明するけれど、要するに高階微分の計算で、これくらいは自力で出来るのが望ましい)。

94.　以下の関数を $(0,0)$ において 4 階の項 (x, y の 4 次式のところ) まで Taylor 展開せよ (剰余項は求めなくて良い)。

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.$$

95.　(1) $n \in \mathbf{N}$ に対して $f(t) = \log(1 + t)$ の n 階導関数を求め、$f(t)$ を $t = 0$ において Taylor 展開せよ。(2) $g(x) = \log(1 + x^2)$ を $x = 0$ において展開せよ。(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x^2) - x \sin x}{x^4}$ を求めよ。

96.　$f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x + y^2}$ で定まる関数 $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ について、以下の問に答えよ。
(1) f の 2 階までの偏導関数をすべて求めよ。(2) Taylor の定理を用いて、

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|f(x,y) - P(x,y)|}{x^2 + y^2} = 0$$

を満たす多項式 $P(x, y)$ のうちで次数最低のものを求めよ。

97.　$\sqrt{(3.01)^2 + (4.02)^2}$ を小数第 4 位まで正しく求めよ。

行列の符号

問題 1　次の行列が正値であるか、負値であるか、不定符号であるか、そのどれでもないか、判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

答は順に、正値、負値、不定符号、不定符号、正値、負値、どれでもない、どれでもない、である。

問題 2　次の行列が正値であるか、負値であるか、不定符号であるか、そのどれでもないか、判定せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

答は順に、正値、不定符号、正値、負値、正値。

極値問題

98.　$\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された C^1 級の関数 $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ が、$a \in \Omega$ で $\nabla f(a) \neq 0$ を満たすならば、点 a から $\nabla f(a)$ の方向に (少しだけ) 進むとき f は増加することを示せ。

例題 B　$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - zx - z$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

例題 B の略解　$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ 2y - x \\ 2z - x - 1 \end{pmatrix} = 0$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$. この点における Hesse 行列は $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ で、これは正定値。ゆえに極小点で、極小値は $f(1/2, 1/4, 3/4) = -3/8$. ■

例題 C　$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ について、前問と同じ問に答えよ。

例題 C の略解　まず $f_x = 4(x^3 - x + y)$, $f_y = 4(y^3 + x - y)$ より $\nabla f = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. このうち $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ のときは極小で、極小値 -8. $(x,y) = (0,0)$ のときは、Hesse 行列が特異である。ちょっと考えると極値でないことが分かる。 ■

99. 関数 $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ について、以下の問に答えよ。(1) ∇f を求めよ。 (2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) $\nabla f(x,y) = 0$ となる点 (x,y) を求めよ。 (4) f の極値を求めよ。

答 (結果のみ) (3) $(x,y) = (0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$
(4) $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき、極大値 $\frac{1}{2e}$, $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき、極小値 $-\frac{1}{2e}$. ■

100. $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

答 (結果のみ) (3) $\nabla f(x,y) = 0$ となるのは、 $(x,y) = (0,0)$, $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. $(x,y) = (1,0), (-1,0)$ で極大値 $\frac{1}{e}$. $(x,y) = (0,1), (0,-1)$ で極小値 $-\frac{1}{e}$.

101. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

答 (結果のみ) (3) $\nabla f(x,y) = 0$ となるのは、$(x,y) = \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$, $(-1,-2)$, $(-1,2)$, $(0,0)$. $(x,y) = \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ で極大値 $\frac{125}{27}$, $(x,y) = (0,0)$ で極小値 0. ■

練習問題 次の関数の極大と極小を求めよ。
(1) $x^2 + xy - 4x + y^2 - 2y$. (2) $x^2 - 8xy + 18y^2 + 6x - 28y$. (3) $(x - y^2)(x - 2y^2)$.
(4) $xy(x^2 + y^2 - 1)$. (5) $x^4 + y^4 + 2x^2y^2$ (6) $xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. (7) $x^3 + y^3$.

練習問題の答 (結果のみ)

(1) $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (2,0)$. 極小点であることが分かり、極小値 $f(2,0) = -4$.

(2) $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (1,1)$. 極小点であることが分かり、極小値 $f(1,1) = -11$.

(3) $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$. Hesse 行列の行列式は 0 で、2 階導関数を調べても分からない。十分小さい正の数 ε に対して、$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0$, $f\left(\frac{3\varepsilon}{2}, \sqrt{\varepsilon}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{4} < 0$ であるから、$f(0,0) = 0$ は極値ではない。

(4) $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0),(0,\pm 1),(\pm 1, 0),(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ (複号の組合せは任意). $(1/2, 1/2)$, $(-1/2,-1/2)$ で極小、極小値 $-1/8$. $(1/2,-1/2)$, $(-1/2,1/2)$ で極大、極大値 $1/8$.

(5) $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$. ここで極小になり、極小値 $f(0,0) = 0$.

(6) $\nabla f(x,y)=0 \Leftrightarrow (x,y)=(1,1)$. ここで極小になり、極小値 $f(1,1)=3$.

(7) $\nabla f(x,y)=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$. Hesse 行列は特異なので、2 階導関数だけ調べても分からない。ε を任意の正数とするとき、$f(\varepsilon,0)=\varepsilon^3>0$, $f(-\varepsilon,0)=-\varepsilon^3<-$ であるから、$f(0,0)=0$ は極値ではない。ゆえに極値は存在しない。■

102. $K=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$ とおき、$f\colon K\to\mathbf{R}$ を $f(x,y)=3x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$ で定義するとき、f の最大値と最小値を求めよ。

答 (結果のみ) $(x,y)=\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ のとき、最小値 $\dfrac{2}{5}$. $(x,y)=(1,0)$ のとき最大値 2. ■

103. $f(x,y):=2x^3+xy+4x^2+y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の (x,y) における Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。 (4) (3) で求めた極値は、最大値でも最小値でもないことを示せ。

答 (結果のみ) (3) $\nabla f(x,y)=0$ となるのは $(x,y)=(0,0)$, $\left(-\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{8}\right)$. $(x,y)=(0,0)$ で極小値 0 を取る。(4) $\lim_{x\to\infty} f(x,0)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x,0)=-\infty$ であり、f はいくらでも大きな値、いくらでも小さな値を取るので、最大値、最小値は存在しない。■

104. $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を $f(x,y)=x^2-2xy^2+2y^2$ で定めるとき、以下の問に答えよ。
(1) f のグラフ $z=f(x,y)$ の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式を求めよ。(2) $\nabla f(x,y)=0$ となる点 (x,y) を求めよ。(3) f の点 (x,y) における Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(4) f の極値を求めよ。

答 (結果のみ) (1) $z=2(a-b^2)x+4b(1-a)y-a^2-2b^2+4ab^2$ (2) $(x,y)=(0,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$. (4) $(x,y)=(0,0)$ で極小値 0. ■

105. $\mathbf{R}^2$ を定義域とする関数 $f(x,y)=x^3+y^3-3x-3y$ について以下の問に答えよ。(1) f のグラフ $z=f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における接平面の方程式を求めよ。 (2) $\nabla f(x,y)=0$ となる (x,y) をすべて求めよ。(3) f の極値をすべて求めよ。

答 (結果のみ) (1) $z=-3x-3y$ (2) $(x,y)=(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$. (3) $(x,y)=(1,1)$ で極小値 -4, $(x,y)=(-1,-1)$ で極大値 4. ■

106. 関数 $f(x,y)=x^4+y^4-2(x^2+y^2)$ について以下の問に答えよ。
(1) f の極値を求めよ。(2) f のすべての極値点を含む範囲で等高線を描け (概形でよい)。

答 (結果のみ) (1) $\nabla f(x,y)=0$ となるのは、$(x,y)=(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)$. このうち $(x,y)=(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$ で極小値 -2, $(x,y)=(0,0)$ で極大値 0. ■

107. $f(x,y) := 4x^3 - 6x^2y + 3xy^2 + 3y^3 - 27x + 3y$ について、以下の問に答えよ。

(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。
(4) f のグラフ $z = f(x,y)$ の、$(x,y) = (1,-1)$ における接平面の方程式を求めよ。

答 (結果のみ) (3) $\nabla f(x,y) = 0$ となるのは、$(x,y) = (2,1), (-2,-1), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$. このうち $(x,y) = (2,1)$ で極小値 -34, $(x,y) = (-2,-1)$ で極大値 34 (4) $z = -20$. ■

108. $f(x,y) := \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} + 2x^2y + y^2 - \dfrac{4}{3}$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

答 (結果のみ) (3) $\nabla f(x,y) = 0$ となるのは $(x,y) = (0,0)$, $(0,-2)$, $(\pm 2,-2)$, $(\pm\sqrt{3},-3)$. $(x,y) = (0,0)$ 以外は Hesse 行列の符号で判定できる。$(x,y) = (0,-2)$ で極大値 0, $(x,y) = (\pm 2,-2)$ で極小値 -4, $(x,y) = (\pm\sqrt{3},-3)$ で Hesse 行列は不定符号なので極値を取らない。$f(0,0) = -\dfrac{4}{3}$ であるが、

$$f(0,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{3} + \varepsilon^2 - \frac{4}{3} > -\frac{4}{3} = f(0,0),$$

$$f(\varepsilon,-\varepsilon^2) = \varepsilon^4\left(-\frac{3}{4} + \frac{\varepsilon^2}{6}\right) - \frac{4}{3} < -\frac{4}{3} = f(0,0)$$

であるから、$(x,y) = (0,0)$ では極値を取らない。■

陰関数定理と逆関数定理

109. $F(x,y) := x^3 + y^3 - 2xy$, $P = (1,1)$ とする。$F(x,y) = 0$ の点 P の近くにおける陰関数 $y = \varphi(x)$ の存在を示し、その点における微分係数の値を求めよ。

110. 方程式 $F(x,y,z) = x^2 + (x - y^2 + 1)z - z^3 = 0$ は点 $(0,0,1)$ の近傍で z について解けることを示せ。また、その点における $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ の値を求めよ。

111. 変数 x, y, z, u, v の間に $xy + uv = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2$ の関係があるとする。点 $(x,y,z,u,v) = (\sqrt{2},-\sqrt{2},1,1,2)$ の近傍において、これを u, v について解けることを示せ。さらに $(x,y,z) = (\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$ における $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial z}$ の値を求めよ。

112. $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix}$, $F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $F_2(x,y,z) = x + y + z$ によって $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を定めるとき、$y \neq z$ なる点の近くでは、$F(x,y,z) = 0$ が $y = \varphi_1(x)$, $z = \varphi_2(x)$ と y, z について解けることを示し、φ_1', φ_2' を求めよ。

113. $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $F_1(x,y) = x^2 - y^2$, $F_2(x,y) = 2xy$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で F の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の近傍における F の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

114. $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $F_1(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $F_2(x,y) = 3x^2y - y^3$ で定める。原点以外の任意の点の近傍で F の逆写像が存在することを示せ。特に $(1,0)$ の近傍における F の逆写像の Jacobi 行列を求めよ。

115. $F(x,y) := x(x-1)^2 - y^2$ とするとき、以下の問に答えよ。 (1) 方程式 $F(x,y) = 0$ で定義される xy 平面内の曲線の概形を描け。 (2) $F(x,y) = 0$ から定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ について、記した陰関数定理が適用できない点 (その点の近傍での陰関数 $y = \varphi(x)$ の存在が定理から主張できない点) を求めよ。

116. $F(x,y) := y^2 - y^4 - x^2$, $N_F := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; F(x,y) = 0\}$ とおく。N_F 上の点 $P = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ の十分小さな近傍で、$F(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、P における接線の方程式を求めよ。また、N_F 上の点で、陰関数定理の仮定が満たされないもの (全部で 5 個ある) をすべて求めよ

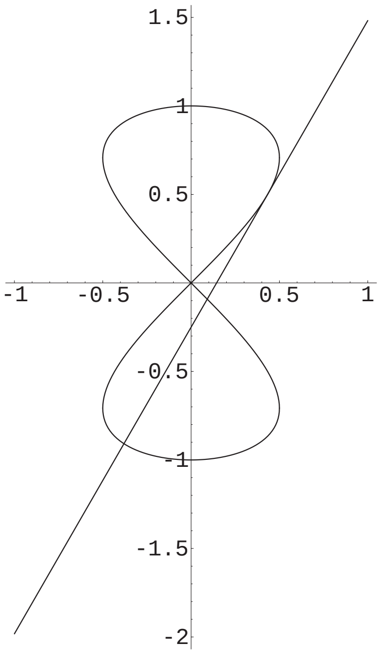

図 1: $y^2 - y^4 - x^2 = 0$ と接線

117. a を正定数とし、$F \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を $F(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \\ x^2 + y^2 - ax \end{pmatrix}$ で定める。$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ を満たす点 (α, β, γ) の点の近傍で、$F(x,y,z) = 0$ を (y,z) について解くことを考える。(a)

陰関数定理の仮定の成り立たない点を求めよ。(b) 陰関数定理の仮定が成り立つ点の近傍で、$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ を求めよ。

条件付き極値問題

最初に有界閉集合上の連続関数の性質について復習する問題を2つ。これを理解しておかないと、以下の多くの問題が理解できない。

118. $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ と $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は連続関数とする。$N_g := \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) = 0\}$ とおくとき、以下の (1), (2) が成り立つことを示せ。

(1) N_g は閉集合である。

(2) N_g が空でない有界集合ならば、f は N_g 上で、最大値と最小値を持つ。

119. $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}^n$, $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は連続とする。$N_g := \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) = 0\}$ とおくとき $N_g \neq \emptyset$ と仮定する。このとき、$f(x) := \|x - a\|^2$ は N_g 上で最小値を持つことを示せ。

以下は Lagrange の未定乗数法の問題である。

120. $f(x,y) := x^2 + y^2$, $g(x,y) := x^2 - 6xy + y^2 + 2$, $N_g := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; g(x,y) = 0\}$ とする。

(1) N_g 上で f が (x_0, y_0) で極値を取るとはどういうことか、説明せよ。

(2) N_g 上で $\nabla g \neq 0$ であることを示せ。

(3) Lagrange の未定乗数法により、N_g 上での f の最小値を求めよ。

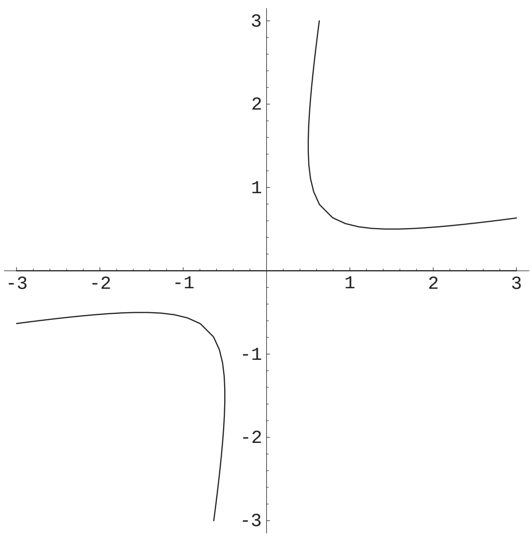

図 2: $x^2 - 6xy + y^2 + 2 = 0$

121. 点 (x, y, z) が方程式 $\dfrac{(x-1)^2}{1}+\dfrac{(y-2)^2}{4}+\dfrac{(z-3)^2}{9}=1$ で表わされる $\mathbf{R}^3$ の部分集合 E の上を動くときの、関数 $f(x, y, z)=x+y+z$ の値について考える。
(1) f は E で最大値、最小値を持つことを示せ。(2) f の E における最大値、最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ。(3) f が (x_0, y_0, z_0) で最大値 k を取るとき、方程式 $x+y+z=k$ で表わされる集合と E はどういう関係にあるか。

122. $\mathbf{R}^3$ において、曲面 $xyz=1$ 上の点で原点に最も近いものを求めよ。

123. 条件 $x^2+y^2-1=0$ のもとで、関数 $f(x, y)=x^2+3xy+y^2$ の最大値、最小値を求めよ。(**注意:** どういう手段で解いても良い。)

124. $a_1, a_2, \cdots, a_n, b \in \mathbf{R}$, $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ とするとき、条件 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b=0$ のもとで、$f(x)={x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2$ の最小値を求めよ。

125. $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $F(x, y) \overset{\text{def.}}{=} x^3-3xy+y^3=0$ で定義するとき、以下の問に答えよ。

(i) $F(a, b)=0$ を満たす点 (a, b) の十分近くで、$F(x, y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在を陰関数定理で保証するための、(a, b) についての条件 (なるべく簡単なもの) を求めよ。

(ii) (i) の条件が成り立つとき、陰関数定理で存在が保証された陰関数 φ に対して $\varphi'(x_0)=0$ となる点 x_0 を求め、$\varphi''(x_0)$ の符号を調べて、φ が極値を取るかどうか答えよ。

126. 条件 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$ のもとでの $f(x_1, \cdots, x_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^3$ の最大値と最小値を求めよ。

127. $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ と $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を $f(x, y, z):=x^2y^2z^2$, $g(x, y, z):=x^2+y^2+z^2-1$ で定め、$N_g:=\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; g(x, y, z)=0\}$ とおく。

(1) f は N_g 上で正の最大値を取ることを示せ。

(2) Lagrange の未定乗数法を用いて、f の N_g における最大値を求めよ。

(3) 上の結果を用いて、任意の正数 a, b, c について、不等式 $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ。