多変数の微分積分学1 演習問題 (Part 2)

桂田 祐史

2011年6月6日

位相がらみの細かい話はカットする (その部分を Part 1 と呼ぶことにするが配布しない)。Taylor の定理〜最後までを Part 3 と呼ぶ (これは準備でき次第配布する)。

多変数関数の極限・連続性

28. 次の各関数が $\mathbf{R}^2$ で連続であることを示せ (理由を述べよ)。

(1) $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6$ (2) $g(x,y)=\exp(3x+2y+1)$

(3) $h(x,y)=\dfrac{2x+1}{x^2+y^2+1}$ (4) $\varphi(x,y)=\log(1+x^2+y^2)$ (5) $\psi(x,y)=\sin\sqrt[3]{x}$

(6) $F(x,y)=\begin{pmatrix}x^2-y^2\\2xy\end{pmatrix}$

29. 連続関数 $f\colon(-1,1)\to\mathbf{R}$ が $f(0)>0$ を満たすとする。このとき次の (1),(2) が成り立つことを示せ。

(1) $\delta>0$ が存在して

$$f(x)>0\quad(|x|<\delta)$$

が成り立つ。

(2) $\varepsilon>0$, $\delta>0$ が存在して、

$$f(x)\ge\varepsilon\quad(|x|<\delta)$$

が成り立つ。

(先に (2) を示すことも出来て、そうすれば (1) は明らかである。)

ヒント 連続関数の定義を思い出そう。■

30. つぎの極限値が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2-y^2)$. (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$. (3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}$. (4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}$.

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$. (6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. (8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}$.

解答 (結果のみ) (1) -3 (2) 1 (3) ∞ (4) 0 (5) 存在しない (6) 存在しない (7) 0 (8) 1 ■

31. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ は、(x,y) が直線に沿って $(0,0)$ に近づくとき 0 に近づくが、(x,y) が放物線 $y^2 = x$ に沿って $(0,0)$ に近づくとき $1/2$ に近づくことを示せ (従って、この f は $(0,0)$ において極限値を持たない)。

ヒント 方針に従って計算するだけ。

32. つぎの関数が原点 $(0,0)$ で連続かどうか調べよ。

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$ (2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$ (4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\log(x^2+y^2)} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & (x+y \neq 0) \\ 0 & (x+y = 0). \end{cases}$

解答 (結果のみ) (1) 連続である (2) 連続である (3) 連続でない (4) 連続である (5) 連続でない

連続関数の逆像は開集合, 開集合＆閉集合の判定

33. U, V をそれぞれ $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ の開集合、$f\colon U \to V$ を連続関数とする。このとき $W \subset V$ なる任意の開集合 W に対して、$f^{-1}(W) := \{x \in U; f(x) \in W\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合となることを証明するため、以下の空欄を埋めよ。「任意の $a \in$ $\boxed{\text{ア}}$ をとると、$a \in U$ かつ $f(a) \in$ $\boxed{\text{イ}}$. $\boxed{\text{イ}}$ は $\boxed{\text{ウ}}$ であるから、$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(f(a);\varepsilon) \subset$ $\boxed{\text{イ}}$ (ここで $B(\alpha; r)$ は中心 α, 半径 r の開球を表す記号). f の連続性から $\boxed{\text{エ}}$ $\delta > 0$ s.t. $\|x-a\| < \delta \Longrightarrow x \in U$ かつ $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. ゆえに $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) \subset W$ となるが、これから $B(a;\delta) \subset$ $\boxed{\text{オ}}$. ゆえに $f^{-1}(W)$ は開集合である。」

ヒント 状況を示す図を描いてみると (ここが初心者には思いつかない?)、穴に埋めるべきものは割とすぐに浮かんで来て、それが正しいことを確認するのも難しくない。

$m = 1$, $U = \mathbf{R}^n$, $V = \mathbf{R}^m = \mathbf{R}$, $W = (a, \infty)$ とすると、$f^{-1}(W) = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$ となり、何度も使った定理の別証明となる。 ■

34. 任意の連続関数 $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ に対して、$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > 0\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合であることを用いて、任意の連続関数 $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ に対して、以下の A, B, C が開集合であること、D, E, F が閉集合であることを示せ。

(1) $A = \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) < 0\}$ (2) $B = \{x \in \mathbf{R}^n; 1 < g(x) < 2\}$ (3) $C = \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) \neq 0\}$
(4) $D = \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) \geq 0\}$ (5) $E = \{x \in \mathbf{R}^n; 1 \leq g(x) \leq 2\}$ (6) $F = \{x \in \mathbf{R}^n; g(x) = 3\}$

ヒント f をうまく取ると、$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > 0\}$ のように表せる場合がある。それから「U_1, U_2 が開集合ならば、$U_1 \cup U_2$ と $U_1 \cap U_2$ も開集合」、「F_1, F_2 が閉集合ならば、$F_1 \cup F_2$ と $F_1 \cap F_2$ も閉集合」ということを使う。■

35. $F \subset \mathbf{R}^n$ で $f\colon F \to \mathbf{R}$ が連続とする。(1) $\{x \in F; f(x) \geq 0\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合とは限らないことを示せ。(2) F が $\mathbf{R}^n$ の閉集合であるとき、$\{x \in F; f(x) \geq 0\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合であることを示せ。

R^n の有界閉集合上の連続関数, 最大値・最小値の存在

(これは授業では後まわしにしている。)

36. K を $\mathbf{R}^N$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbf{R}^m$ を連続とするとき、$f(K)$ は $\mathbf{R}^m$ の有界閉集合であることを示せ。

37. 連続関数 $f\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$ が

$$f(x) \geq 0 \quad (\forall x \in [-1,1]), \qquad f(0) > 0$$

という性質を満たすとするとき

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx > 0$$

となることを示せ。

38. $I = [0,1]$ とする。I 上の連続関数 $f\colon I \to \mathbf{R}$ がいたるところ $f > 0$ を満たすとき、

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in I) \quad f(x) \geq \varepsilon \tag{$\star$}$$

が成り立つことを示せ。

39. I を $\mathbf{R}$ の区間とする。I 上の連続関数 $f\colon I \to \mathbf{R}$ がいたるところ $f > 0$ を満たすとき、

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in I) \quad f(x) \geq \varepsilon$$

は必ずしも成立しない。$I = (0,1]$ の場合、$I = [0,\infty)$ の場合のそれぞれに条件を満たさない f の例をあげよ。

40. 曲線 $\varphi\colon [0,1] \to \mathbf{R}^N$ の像 $\{\varphi(t); t \in [0,1]\}$ は $\mathbf{R}^N$ の有界閉集合であることを示せ。

中間値の定理

41. $\varphi\colon [0,1] \to \mathbf{R}^2$ は連続な曲線で、$\varphi(0) = (0,0)$, $\varphi(1) = (1,1)$ とする。この曲線は円 $x^2 + y^2 = 1$ と必ず共有点を持つことを示せ。

42. I を $\mathbf{R}$ の有界な閉区間 (つまり $a < b$ なる実数 a, b を用いて $I = [a,b]$ と表される)、$f\colon I \to \mathbf{R}$ を連続関数とするとき、$f(I)$ も $\mathbf{R}$ の有界な閉区間であることを示せ。

(発展) 点と集合の距離、集合と集合の距離

(微積分の授業ではここまで扱えないが、後でしばしば必要になり、分類してみると、微積分のこのあたりに置くのが適当、という内容であるが、参考までに紹介しておく。)

43. (点と閉集合の距離) $\mathbf{R}^n$ の閉集合 A と、$x \in \mathbf{R}^n$ に対して、

$$d(x,A) := \inf_{y \in A} \|x-y\|$$

とおく (点 x と集合 A との距離という)。このとき、以下の (1)〜(3) を証明せよ。

(1) 任意の A, x に対して、$d(x,A) = 0 \iff x \in A$.

(2) A を任意に固定するとき、$\mathbf{R}^n \ni x \to d(x,A) \in \mathbf{R}$ は連続関数である。

(3) A を任意に固定するとき、$\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\exists a \in A$ s.t. $d(x,A) = \|x-a\|$.

ヒント (2) 実は、任意の $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対して、$|d(x,A) - d(y,A)| \le \|x-y\|$ が成り立つ。この不等式を証明しよう。それが出来れば、考えている関数の連続性は明らかである。(3) $R := d(x,A)$, $K := \overline{B}(x; R+1) \cap A$ とおくと (図を描こう)、K は有界閉集合なので (なぜ？)、連続関数 $K \ni y \mapsto \|x-y\| \in \mathbf{R}$ の最小値 $\|x-a\|$ $(a \in A)$ が存在する。$A \setminus \overline{B}(x; R+1)$ 上の任意の点 y において、$\|x-y\| > R+1$ に注意すると、$\|x-a\| = \min_{y \in A} \|x-y\| = d(x,A)$ が成り立つ (なぜ？)。

44. (閉集合と閉集合の距離) $\mathbf{R}^n$ 内の閉集合 A, B に対して、

$$d(A,B) := \inf_{x \in A, y \in B} \|x-y\| \quad (= \inf\{\|x-y\|\,; x \in A,\ y \in B\})$$

とおくとき、以下の (1), (2) に答えよ。

(1) $A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow d(A,B) = 0$ は明らかであるが、逆は必ずしも真でないことを示せ。

(2) A または B の一方が有界閉集合であれば、「逆」 $d(A,B) = 0 \Longrightarrow A \cap B \neq \emptyset$ が成立することを示せ。

ヒント (1) いわゆる反例探しをすればよい。具体的な例を 1 つだけ見つければ十分。次の (2) を見ると、A も B も有界でないような場合を探す必要があることが分かる。

多変数関数のグラフ

45. 次の関数のグラフ $z = f(x, y)$ の概形を描け。

(0) $f(x, y) = x^2 + y^2$ $(x^2 + y^2 \leq 2)$

(1) $f(x, y) = 1 - x - y$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$

(2) $f(x, y) = -x^2$ $(-\infty < x < \infty,\ y \leq 0)$

(3) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 < x < 1,\ y \leq 0)$

(4) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(x^2 + y^2 \leq 2)$

(5) $f(x, y) = x^2 - y^2$ $(-1 < x < 1,\ -1 < y < 1)$

ヒント 平面 $y = c$ との交わりは、xz 平面内の曲線 $z = f(x, c)$ で、これは1変数関数のグラフなので考えやすい。それが c を変えたときどうなるか調べると様子が分かる。同じことを平面 $x = c$ との交わりでやってみる。などなど。 ■

偏微分

46. つぎの関数の 1 階偏導関数をすべて求めよ。(1) $5x^2+8xy^2+y^3$ (2) $\dfrac{xy}{x+y}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ (4) $\log\dfrac{x+y}{x-y}$ (5) $y\sin x + \cos(x-y)$ (6) $\sin(\cos(x+y))$ (7) xye^{x+2y} (8) a^{xy} (a は正の定数) (9) $\sin(xy)$ (10) $\cos(x^2+y)$ (11) $\cos(x^3+xy)$ (12) $\tan^{-1}(x^2-2xy)$ (13) $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ (14) $\log\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$ (15) $\cos^{-1}\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$ (16) $\log\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$ (17) $\log\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解答 (結果のみ) (1) $f_x = 10x + 8y^2,\ f_y = 16xy + 3y^2$ (2) $f_x = \dfrac{y^2}{(x+y)^2},\ f_y = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}$ (3) $f_x = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2},\ f_y = -\dfrac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$ (4) $f_x = -\dfrac{2y}{x^2-y^2},\ f_y = \dfrac{2x}{x^2-y^2}$ (5) $f_x = y\cos x - \sin(x-y),\ f_y = \sin x + \sin(x-y)$ (6) $f_x = f_y = -\sin(x+y)\cos(\cos(x+y))$ (7) $f_x = y(1+x)e^{x+2y},\ f_y = x(1+2y)e^{x+2y}$ (8) $f_x = (y\log a)a^{xy},\ f_y = (x\log a)a^{xy}$ (9) $f_x = y\cos(xy),\ f_y = x\cos(xy)$ (10) $f_x = -2x\sin(x^2+y),\ f_y = -\sin(x^2+y)$ (11) $f_x = -(3x^2+y)\sin(x^3+xy),\ f_y = -x\sin(x^3+xy)$ (12) $f_x = \dfrac{2(x-y)}{1+(x^2-2xy)^2},\ f_y = -\dfrac{2x}{1+(x^2-2xy)}$ (13) $f_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2},\ f_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ (14) $f_x = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-y^2}},\ f_y = -\dfrac{2x}{y\sqrt{x^2-y^2}}$ (15) $f_x = \dfrac{1}{1+x^2},\ f_y = \dfrac{1}{1+y^2}$ (16) $f_x = -\dfrac{y}{x^2-y^2},\ f_y = \dfrac{x}{x^2-y^2}$ (17) $f_x = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f_y = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

47. 次の関数の1階偏導関数を求めよ。(1) xyz (2) e^{xyz} (3) $\log(x^2+y^2+z^2)$ (4) $\sin(xyz)$ (5) a^{xyz}, $a>0$ (6) $\sin(x+y+z)+\cos z$ (7) $x\cos y+\sin^{-1} z$ (8) $\sqrt{xyz}$ (9) $e^{\sin(xyz)}$ (10) $e^{\cos(xyz)}$ (11) $\tan\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)$ (12) $x\cos^{-1}(y-3z)+\sin^{-1}(xy)$ (13) $\sin(xy)+\cos(zx)$ (14) $x^2\sin^{-1}(yz)$ (15) $\tan^{-1}\frac{xy}{z}$ (16) $e^{xy}\cos(xyz)$ (17) $\log\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$ (18) $\log\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}-\frac{xy}{z}$

解答 (結果のみ) (1) $f_x=yz$, $f_y=zx$, $f_z=xy$ (2) $f_x=yze^{xyz}$, $f_y=zxe^{xyz}$, $f_z=xye^{xyz}$ (3) $f_x=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}$, $f_y=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$, $f_z=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$ (4) $f_x=yz\cos(xyz)$, $f_y=zx\cos(xyz)$, $f_z=xy\cos(xyz)$ (5) $f_x=(\log a)\,yz\,a^{xyz}$, $f_y=(\log a)\,zx\,a^{xyz}$, $f_z=(\log a)\,xy\,a^{xyz}$ (6) $f_x=\cos(x+y+z)$, $f_y=\cos(x+y+z)$, $f_z=\cos(x+y+z)-\sin z$ (7) $f_x=\cos y$, $f_y=-x\sin y$, $f_z=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ (8) $f_x=\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}}$, $f_y=\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}}$, $f_z=\frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}}$ (9) $f_x=yz\cos(xyz)\,e^{\sin(xyz)}$, $f_y=zx\cos(xyz)\,e^{\sin(xyz)}$, $f_z=xy\cos(xyz)\,e^{\sin(xyz)}$ (10) $f_x=-yz\sin(xyz)\,e^{\cos(xyz)}$, $f_y=-zx\sin(xyz)\,e^{\cos(xyz)}$, $f_z=-xy\sin(xyz)\,e^{\cos(xyz)}$ (11) $f_x=\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)\sec^2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)$, $f_y=\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)\sec^2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)$, $f_z=\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)\sec^2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)$ (12) $f_x=\cos^{-1}(y-3x)+\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $f_y=-\frac{x}{\sqrt{1-(y-3x)^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $f_z=\frac{3z}{\sqrt{1-(y-3z)^2}}$ (13) $f_x=y\cos(xy)-z\sin(zx)$, $f_y=x\cos(xy)$, $f_z=-x\sin(zx)$ (14) $f_x=2x\sin^{-1}(yz)$, $f_y=\frac{x^2z}{\sqrt{1-y^2z^2}}$, $f_z=\frac{x^2y}{\sqrt{1-y^2z^2}}$ (15) $f_x=\frac{yz}{z^2+x^2y^2}$, $f_y=\frac{zx}{z^2+x^2y^2}$, $f_z=-\frac{xy}{z^2+x^2y^2}$ (16) $f_x=ye^{xy}\cos(xyz)-yze^{xy}\sin(xy(z)$, $f_y=xe^{xy}\cos(xyz)-zxe^{xy}\sin(xyz)$, $f_z=-xye^{xy}\sin(xyz)$ (17) $f_x=\frac{1}{x}$, $f_y=-\frac{y}{y^2+z^2}$, $f_z=-\frac{z}{y^2+z^2}$ (18) $f_x=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{z}$, $f_y=\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}-\frac{x}{z}$, $f_z=\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{xy}{z^2}$

48. $f(x,y):=y^2+\tan\left(ye^{\frac{1}{x}}\right)$ とするとき、次式を示せ。

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=2y^2.$$

49. $f(x,y):=x\sin\left(\frac{x}{y}\right)+2y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$ とするとき、次式を示せ。

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=f.$$

50. $f(x,y,z):=x^3+y^3+z^3-3xyz$ とするとき、次式を示せ。

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=3f.$$

51. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad ((x,y)\in\mathbf{R}^2)$ は原点で偏微分不可能であることを示せ。

全微分

52. 次の関数の微分を求めよ。(1) $f(x,y,z)=\tan^{-1}(x+y+z)$ (2) $f(x,y)=\begin{pmatrix} xy \\ x^2+y^3 \end{pmatrix}$

(3) $f(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+y+z \\ (x+y)e^z \\ (y+z)\sin x \end{pmatrix}$.

解答（結果のみ） (1) $f'(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{1+(x+y+z)^2}\ \dfrac{1}{1+(x+y+z)^2}\ \dfrac{1}{1+(x+y+z)^2}\right)$.

(2) $f'(x,y)=\begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 3y^2 \end{pmatrix}$. (3) $f'(x,y,z)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^z & e^z & (x+y)e^z \\ (y+z)\cos x & \sin x & \sin x \end{pmatrix}$. ■

53. 次の関数のヤコビ行列を求めよ。

(1) $F(x,y)=\begin{pmatrix} xye^{x+2y} \\ \tan^{-1}(x^2-2xy) \end{pmatrix}$ (2) $F(x,y)=\begin{pmatrix} \tan^{-1}\dfrac{x}{y} \\ x \end{pmatrix}$ (3) $F(x,y)=\begin{pmatrix} \log\dfrac{x+y}{x-y} \\ \log\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} \end{pmatrix}$

(4) $F(x,y)=\begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ (5) $F(x,y)=\begin{pmatrix} \cos(x^2+y) \\ \cos(x^3+2xy) \end{pmatrix}$ (6) $F(x,y)=\begin{pmatrix} e^{xy} \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$

(7) $F(x,y)=(\sinh(xy),\cosh(xy))$

解答 (結果のみ) (1) $\begin{pmatrix} (x+1)ye^{x+2y} & x(1+2y)e^{x+2y} \\ \dfrac{2(x-y)}{1+x^2(x-2y)^2} & \dfrac{-2x}{1+x^2(x-2y)^2} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2+y^2} & -\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} \dfrac{-2y}{x^2-y^2} & \dfrac{2x}{x^2-y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2-y^2} & \dfrac{x}{x^2-y^2} \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} -2x\sin(x^2+y) & -\sin(x^2+y) \\ -(3x^2+2y)\sin(x^3+2xy) & -2x\sin(x^3+2xy) \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} y\cosh(xy) & x\cosh(xy) \\ y\sinh(xy) & x\sinh(xy) \end{pmatrix}$

54. 次の関数のヤコビ行列を求めよ。

(1) $F(x,y,z)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (2) $F(x,y,z)=\begin{pmatrix} yz^2 \\ zx^2 \\ xy^2 \end{pmatrix}$ (3) $F(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x^2-y^2) \\ xy\cos z \\ xy\sin z \end{pmatrix}$

解答 (結果のみ) (1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}0&z^2&2yz\\2xz&0&x^2\\y^2&2xy&0\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}x&-y&0\\y\cos z&x\cos z&-xy\sin z\\y\sin z&x\sin z&xy\cos z\end{pmatrix}$

55. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された $f\colon \Omega\to\mathbf{R}^n$, $g\colon\Omega\to\mathbf{R}^n$ に対して、$F(x)=(f(x),g(x))$ で $F\colon\Omega\to\mathbf{R}$ を定義するとき、$F'(x)$ を求めよ。

解答 (結果のみ)

$$F'(x)=g(x)^Tf'(x)+f(x)^Tg'(x).\blacksquare$$

56. (これはテキストの例だが、自力で解けるようにしておくこと)

(1) $m\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$, m 次元ベクトル $b=(b_i)$ があるとき、$f\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ を $f(x)=Ax+b$ と定める。このとき f の Jacobi 行列を計算で求めよ。

(2) A を n 次実対称行列、$b\in\mathbf{R}^n$, $c\in\mathbf{R}$ として、$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}(Ax,x)+(b,x)+c$ で定める。この時 $\nabla f(x)$ を求めよ。

結果のみ (1) $f'(x)=A$ (2) $\nabla f(x)=Ax+b$ $\blacksquare$

合成関数

57. 次の合成関数について、( ) 内のものを求めよ。

(1) $f(x,y)=x\sin\dfrac{x}{y}$, $x=1+3t$, $y=\sqrt{1+t^2}$. $\left(\frac{df}{dt}\right)$.

(2) $f(x,y)=x^2y^5+e^{xy}$, $x=t$, $y=\dfrac{1}{1+t^2}$. $\left(\frac{df}{dt}\right)$.

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y}{x^2+y}$, $x=t$, $y=2t-3$. $\left(\frac{df}{dt}\right)$.

(4) $f(x,y)=x^2+2xy$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. (f_r,f_θ).

(5) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{1-xy}$, $x=\sin 2t$, $y=\cos(3t-s)$. (f_t,f_s).

(6) $f(x,y)=x^2+xy-y^2$, $x=t+2s$, $y=s-3t$. (f_t,f_s).

(7) $f(x,y,z)=x^3+3xyz-y^2z$, $x=2t+s$, $y=-t-s$, $z=t^2+s^2$. (f_t,f_s).

(8) $f(x,y,z)=\dfrac{x-y}{1+xyz}$, $x=3t+2s$, $y=3s-4t$, $z=t$. (f_t,f_s).

(9) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $x=t\cos s$, $y=t\sin s$, $z=ts$. (f_t,f_s).

(10) $f(x,y,z)=x^2+xy-y^2$, $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$. (f_r,f_θ,f_φ).

答 (結果のみ) (1) $3\sin\dfrac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(3+9t-\dfrac{t(1+3t)^2}{1+t^2}\right)\cos\dfrac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}}$

(2) $\dfrac{2t(1-4t^2)}{(1+t^2)^6}+\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,e^{\frac{t}{1+t^2}}$ (3) $\dfrac{4t(t-3)}{(t^2+2t-3)^2}$

(4) $f_r(t,\theta)=2r\cos\theta\,(2\sin\theta+\cos\theta)$, $f_\theta(r,\theta)=2r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta-\cos\theta\sin\theta\right)$

(5) $f_t(s,t) = \dfrac{2\left(1+\cos^2(3t-s)\right)\cos 2t - 3\left(1+\sin^2 2t\right)\sin(3t-s)}{\left(1-\sin 2t\cos(3t-s)\right)^2}$,
$f_s(s,t) = \dfrac{(1+\sin^2 2t)\sin(3t-s)}{\left(1-\sin 2t\cos(3t-s)\right)^2}$ (6) $f_t(s,t) = 5s - 22t$, $f_s(s,t) = 5t + 10s$
(7) $f_t(s,t) = 6(2t+s)^2 - 28t^3 - 33t^2 s - 22ts^2 - 11s^3$, $f_s(s,t) = 3(2t+s)^2 - 11t^3 - 22t^2 s - 33ts^2 - 16s^3$ (8) $f_t(s,t) = \dfrac{7 + 168t^3 - 43t^2 s + 2ts^2 + 6s^3}{\left(1 - t\left(12t^2 - ts - 6s^2\right)\right)^2}$, $f_s(s,t) = \dfrac{-1 + t\left(5t^2 - 84ts + 6s^2\right)}{\left(1 - t\left(12t^2 - ts - 6s^2\right)\right)^2}$
(9) $f_t(s,t) = \pm\sqrt{1+s^2}$ ($t > 0$ のとき $+$, $t < 0$ のとき $-$), $f_s(s,t) = \dfrac{|t|s}{\sqrt{1+s^2}}$
(10) $f_r(r,\theta,\phi) = 2r\sin^2\theta\left(\cos\phi - \cos\phi\sin\phi - \sin^2\phi\right)$,
$f_\theta(r,\theta,\phi) = 2r^2\cos\theta\sin\theta\left(\cos^2\phi + \cos\phi\sin\phi - \sin^2\phi\right)$,
$f_\phi(r,\theta,\phi) = r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\phi - 4\cos\phi\sin\phi - \sin^2\phi\right)$

58. 2 次元の極座標変換を考える。つまり $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ($r \geq 0$, $\theta \in \mathbf{R}$) とするとき、以下の問に答えよ。

(1) 以下のものを求めよ。

(a) x_r, x_θ, y_r, y_θ

(b) r_x, r_y, θ_x, θ_y

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varphi(r,\theta)$ とするとき、$\varphi'(r,\theta)$, $\left(\varphi^{-1}\right)'(x,y)$

(2) C^2 級の関数 $f = f(x,y)$ が与えられているとき、$g(r,\theta) = f\circ\varphi(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で、関数 g を定める。このとき、$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \dfrac{1}{r}g_r + \dfrac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$ が成り立つことを確かめよ。

解答（結果のみ） (1) (a) $x_r = \cos\theta$, $y_r = \sin\theta$, $x_\theta = -r\sin\theta$, $y_\theta = r\cos\theta$ (b) $r_x = \cos\theta$ ($= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ も可), $r_y = \sin\theta$ ($= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ も可), $\theta_x = -\dfrac{\sin\theta}{r}$ ($= -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ も可), $\theta_y = \dfrac{\cos\theta}{r}$ ($= \dfrac{x}{x^2+y^2}$ も可) (c) $\varphi'(r,\theta) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$, $\left(\varphi^{-1}\right)(x,y) = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$ ($= \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ も可) (3) 昨年度講義ノート (`http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2010/tahensuu1-2010.pdf`) の付録 **C.3** (pp. 155-159) を見よ。

高階導関数

59. 次の式によって定められる関数 f について f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ。

(1) e^{xy} (2) $\sin(x^2 + 5y^3)$ (3) $\cosh(xy)$ (4) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ (5) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

解答 (結果のみ) (1) y^2e^{xy}, $(1+xy)e^{xy}$, x^2e^{xy}
(2) $2\left(\cos(x^2+5y^3)-2x^2\sin(x^2+5y^3)\right)$, $-30xy^2\sin(x^2+5y^3)$, $30y\cos(x^2+5y^3)-225y^4\sin(x^2+5y^3)$ (3) $y^2\cosh(xy)$, $xy\cosh(xy)+\sinh(xy)$, $x^2\cosh(xy)$ (4) $\dfrac{2y}{x^3}$, $-\dfrac{1}{x^2}$, 0 (5) $-\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $-\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

60. 次の式によって定められる関数 f について、f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めよ。
(1) $x^4+4x^2y^3+7xy+1$ (2) $\sin x\cos y$ (3) $\sinh(xy)$ (4) $\cosh(xy)$ (5) e^{xy} (6) e^{x+y} (7) $e^{x^2+y^2}$ (8) $\sin(xy)$ (9) $\sin(x^2+y^2)$

解答 (結果のみ) (1) $f_{xx}=12x^2+8y^3$, $f_{xy}=24xy^2+7$, $f_{yy}=24x^2y$ (2) $f_{xx}=-\sin x\cos y$, $f_{xy}=-\cos x\sin y$, $f_{yy}=-\sin x\cos y$ (3) $f_{xx}=y^2\sinh(xy)$, $f_{xy}=\cosh(xy)+xy\sinh(xy)$, $f_{yy}=x^2\sinh(xy)$ (4) $f_{xx}=y^2\cosh(xy)$, $f_{xy}=xy\cosh(xy)\sinh(xy)$, $f_{yy}=x^2\cosh(xy)$
(5) $f_{xx}=y^2e^{xy}$, $f_{xy}=(1+xy)e^{xy}$, $f_{yy}=x^2e^{xy}$ (6) $f_{xx}=e^{x+y}$, $f_{xy}=e^{x+y}$, $f_{yy}=e^{x+y}$
(7) $f_{xx}=2\left(1+2x^2\right)e^{x^2+y^2}$, $f_{xy}=4xye^{x^2+y^2}$, $f_{yy}=2\left(1+2y^2\right)e^{x^2+y^2}$ (8) $f_{xx}=-y^2\sin(xy)$, $f_{xy}=-xy\sin(xy)$, $f_{yy}=-x^2\sin(xy)$ (9) $f_{xx}=2\cos\left(x^2+y^2\right)-4x^2\sin\left(x^2+y^2\right)$, $f_{xy}=-4xy\sin\left(x^2+y^2\right)$, $f_{yy}=2\cos\left(x^2+y^2\right)-4y^2\sin\left(x^2+y^2\right)$

61. 次の式によって定められる関数 f について $f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{yz}, f_{zx}, f_{xy}$ を求めよ。
(1) xyz (2) e^{xyz} (3) $\sin(xyz)$ (4) $x^2y^2z^2+xz^5$ (5) $yz+zx+xy$ (6) e^{x+y+z} (7) $\sin(x+y+z)$
(8) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

解答 (結果のみ) (1) $f_{xx}=0$, $f_{yy}=0$, $f_{zz}=0$, $f_{yz}=x$, $f_{zx}=y$, $f_{xy}=z$ (2) $f_{xx}=y^2z^2e^{xyz}$, $f_{yy}=z^2x^2e^{xyz}$, $f_{zz}=x^2y^2e^{xyz}$, $f_{yz}=x(1+xyz)e^{xyz}$, $f_{zx}=y(1+xyz)e^{xyz}$, $f_{xy}=z(1+xyz)e^{xyz}$ (3) $f_{xx}=-y^2z^2\sin(xyz)$, $f_{yy}=-z^2x^2\sin(xyz)$, $f_{zz}=-x^2y^2\sin(xyz)$, $f_{yz}=x\left(\cos(xyz)-xyz\sin(xyz)\right)$, $f_{zx}=y\left(\cos(xyz)-xyz\sin(xyz)\right)$, $f_{xy}=z\left(\cos(xyz)-xyz\sin(xyz)\right)$
(4) $f_{xx}=2y^2z^2$, $f_{yy}=2z^2x^2$, $f_{zz}=2x^2y^2+20xz^3$, $f_{yz}=4x^2yz$, $f_{zx}=4xy^2z+5z^4$, $f_{xy}=4xyz^2$
(5) $f_{xx}=0$, $f_{yy}=0$, $f_{zz}=0$, $f_{yz}=1$, $f_{zx}=1$, $f_{xy}=1$ (6) $f_{xx}=f_{yy}=f_{zz}=f_{yz}=f_{zx}=f_{xy}=e^{x+y+z}$ (7) $f_{xx}=f_{yy}=f_{zz}=f_{yz}=f_{zx}=f_{xy}=-\sin(x+y+z)$ (8) $f_{xx}=\dfrac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $f_{yy}=\dfrac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $f_{zz}=\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $f_{yz}=-\dfrac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $f_{zx}=-\dfrac{zx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $f_{xy}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

62. 次の関数について $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0$ が成り立つことを示せ。
(1) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$ (2) $f(x,y,z)=e^{3x+4y}\cos 5z$

63. $u=x+y, v=x-y$ とする。C^2 級の関数 $f(x,y)$ に対し、次の式を示せ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

64. $g(t)$ を C^2 級関数の 1 変数関数, $f(x,y)=g\left(x^2+y^2\right)$ として、次の式を示せ。

$$f_{xx}+f_{yy}=4\left(x^2+y^2\right)g''\left(x^2+y^2\right)+4g'\left(x^2+y^2\right).$$

65. $\mathbf{R}^2$ で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

について、以下の問に答えよ。
(1) f_x, f_y を求めよ。 (2) $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$ であることを示せ。

66. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x$ を満たす C^2 級の関数 f は存在しないことを示せ。

ヒント　背理法による。条件を満たす C^2 級の関数が存在したと仮定すると、偏微分の順序交換が成り立つので…

C^1 級、微分可能性、偏微分可能性、連続性のチェック

67. 正定数 p に対して、$f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ を $f(x)=\begin{cases} |x|^p\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ で定義するとき、以下の問に答えよ。(1) f は $\mathbf{R}$ で連続か？(2) f は $\mathbf{R}$ で微分可能か？(3) f は $\mathbf{R}$ で C^1 級か？

解答 (結果のみ)　(1) 連続である。 (2) $p>1$ のとき微分可能、そうでないとき微分可能でない。(3) $p>2$ のとき C^1 級、$0<p\leq 2$ のとき C^1 級でない。

($p=2$ のとき、f は微分可能であるが、C^1 級ではない関数となり、微積のテキストに例として良く採用されている。)

例題

次の各関数は、$(x,y)\neq(0,0)$ の範囲で C^∞ 級であることは明らかであるが、$\mathbf{R}^2$ 全体で (a) 連続である, (b) 各変数につき偏微分可能である, (c) 全微分可能である, (d) C^1 級である, の各条件を満たすかどうか調べよ。

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(4) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

解答　どの条件を満たすか、結果だけ先に書いておこう。(1) (a)　(2) (b)　(3) (a), (b)　(4) (a), (b), (c)　(5) (a),(b),(c),(d) となる。

(1) $g(t) = \sqrt{t}$ $(t \geq 0)$, $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$ $((x,y) \in \mathbf{R}^2)$ は連続であり、$f = g \circ \varphi$. f は連続関数の合成関数なので連続である。しかし極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

は存在しないので、f は $(0,0)$ で x について偏微分可能でない。「全微分可能ならば各変数について偏微分可能」であるから、全微分可能ではない。「C^1 とは、各変数につき偏微分可能で、偏導関数がすべて連続のこと」であるから、C^1 級でない。

(2) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)$ は存在しないので (これは講義でやった。$y = kx$ に沿った極限が食い違うから、が理由。別のやり方として、$|f(x,y) - f(0,0)|$ が 0 に収束しないことを確かめる方法がある)、f は $(0,0)$ で連続ではない。

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0\cdot h}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

であるから、f は $(0,0)$ で x, y のそれぞれについて偏微分可能。「全微分可能ならば連続」であるから、全微分可能ではない。「C^1 級ならば全微分可能」であるから、C^1 級でない。

(3) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき、

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = |x|\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}} \leq |x|\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = |x|$$

で、$(x,y) \to (0,0)$ のとき、$|x| \to 0$ であるから、

$$|f(x,y) - f(0,0)| \to 0, \quad \text{i.e.} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

ゆえに f は $(0,0)$ で連続である。

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot h}{\sqrt{0^2+h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

であるから、f は $(0,0)$ で、x と y のそれぞれについて偏微分可能である。$(x,y)\neq(0,0)$ とするとき、

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

であるが、これは $(x,y)\to(0,0)$ のとき 0 に収束しない。ゆえに f は $(0,0)$ で全微分可能ではない。「C^1 級ならば全微分可能」なので C^1 級ではない。

(4) $\left|h\sin\dfrac{1}{|h|}\right|\leq|h|\to 0\ (h\to 0)$ に注意すると、

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(h^2+0^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{h^2+0^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{|h|}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(0^2+h^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{0^2+h^2}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{|h|}=0$$

であるから、f は $(0,0)$ で、x と y のそれぞれについて偏微分可能である。$(x,y)\neq(0,0)$ とするとき、

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}&=\frac{(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-0-0\cdot x-0\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

$(x,y)\to(0,0)$ のとき、$\left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ であるから、(はさみうちの原理によって)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

ゆえに f は $(0,0)$ で全微分可能である。一方、$(x,y)\neq(0,0)$ とするとき、

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=2x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+(x^2+y^2)\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\right]\\&=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

であるから、

$$f_x(x,0)=2x\sin\frac{1}{|x|}-\frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|}.$$

ゆえに

$$\lim_{x \to +0} f_x(x,0) = \lim_{x \to +0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

これは極限が存在しない。従って、$f_x(x,y)$ は $(x,y) \to (0,0)$ のとき $f_x(0,0)$ には収束しない。ゆえに f は C^1 級ではない。

(5)

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0,$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

であるから、f は $(0,0)$ で x と y のそれぞれについて偏微分可能である。$(x,y) \neq (0,0)$ とするとき、

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

であるが、

$$|f_x(x,y) - f_x(0,0)| \leq |y| \frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq 2|y| \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|y| \to 0,$$

$$|f_y(x,y) - f_y(0,0)| \leq |x| \frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq 2|x| \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|x| \to 0$$

であるから、C^1 級である。一般に「C^1 級ならば全微分可能」であるから、全微分可能である。

解説＆お説教 (？)

- (a),(b),(c),(d) の定義と、(d) $\Longrightarrow$ (c), (c) $\Longrightarrow$ (a), (c) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つことはしっかりマスターしておくこと。
- 極限の計算がきちんと出来ること。はさみうちの原理を使うために不等式にも慣れる必要がある。(これらは、例や例題の解答を熟読して、分からないことがあれば、それを解消しておく努力が必要である。)
- 諸君の先輩達の期末試験の答案を見ると、不等式の扱いがめちゃくちゃであるものがかなり多い。
  - 平然と $x^2 \leq x^3$ とか $y^2 \leq y^4$ とする人がいるが (指数が大きい方が大きいと信じている？)、無条件では成立しない。x が正とは限らない ($x < 0$ ならば $x^3 < 0 < x^2$ である)。またそもそも x, y は 0 に近づけることが多いので、どちらかというと逆であろう。例えば $0 < x < 1$ ならば

    $$0 < a < b \quad \Rightarrow x^a > x^b.$$

    この場合、正しくは $x^2 \geq |x^3|$, $y^2 \geq y^4$ (x, y が十分 0 に近いとき)

– はさみうちの原理を誤解しているケース。$(x,y) \to (a,b)$ のとき

$$|f(x,y) - A| \leq g(x,y), \quad g(x,y) \to 0$$

が示されれば、$-g(x,y) \leq f(x,y) - A \leq g(x,y)$ の両辺が 0 に収束することから、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ が言える。絶対値抜きの $f(x,y) - A \leq g(x,y) \to 0$ では、はさめない！また $g(x,y) \not\to 0$ が分かったからと言って、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ でないとは結論できない (大きい方が 0 に収束しなくても、小さい方は 0 に収束するかも知れないでしょう？単に $g(x,y)$ の取り方がまずくて、$|f(x,y) - A| \leq g(x,y)$ の評価が甘すぎるのかもしれない。)。 ■

- f が a で全微分可能であるとは、ある行列 A が存在して、

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0$$

が成り立つこと、と講義で定義してあるが、このままではチェックしづらい。f が a で全微分可能であるためには、f が a で各変数について偏微分可能であり、かつヤコビ行列 $A := (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))$ に対して、

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = 0 \tag{★}$$

が成り立つことが必要十分である。こちらの方がチェックしやすい。f が 2 変数の実数値関数であれば、(★) は

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

と書き換えられる。

68. 次の各関数は、$(x,y) \neq (0,0)$ の範囲で C^∞ 級であることは明らかであるが、$\mathbf{R}^2$ 全体で (a) 連続である, (b) 各変数につき偏微分可能である, (c) 全微分可能である, (d) C^1 級である, の各条件を満たすかどうか調べよ。

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + x^2 + xy^2 + xy + y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 1 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

(2) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & ((x,y,z) \neq (0,0,0)) \\ 0 & ((x,y,z) = (0,0,0)) \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 1 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

(4) $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$

(5) $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$

(6) $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)). \end{cases}$

解答 (結果のみ)　(1) (b) のみ　(2) (a), (b) のみ　(3) (a), (b), (c), (d)　(4) (b) のみ
(5) (a), (b) のみ (6) (a), (b) のみ■

極座標

69. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ とするとき、以下のものを求めよ。

(a) $\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{pmatrix}$　(b) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$　(c) 逆写像のヤコビ行列 $\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \phi_x & \phi_y & \phi_z \end{pmatrix}$

((a),(b) は必修。(c) は出来なくてもよいが、(a) の各列ベクトルが直交していることに気づけばそれほど難しくない)。

答　(1) $\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$　(2) $r^2\sin\theta$

(3) $\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \dfrac{1}{r}\cos\theta\cos\phi & \dfrac{1}{r}\cos\theta\sin\phi & -\dfrac{1}{r}\sin\theta \\ -\dfrac{\sin\phi}{r\sin\theta} & -\dfrac{\cos\phi}{r\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$

70.　地球の表面上にある 2 点の緯度軽度が分かっているときに、その 2 点間の (表面に沿っての最短の) 道のりの長さの求め方を説明せよ (ただし地球は球であると考える)。

71.　$(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $(y,z) \neq (0,0)$ に対して、

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\phi, \quad z = r\sin\theta\sin\phi, \quad r \in (0,\infty), \theta \in (0,\pi), \phi \in [0,2\pi)$$

を満たす (r,θ,ϕ) が一意的に定まることを示せ。また、この式で $\varphi\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi) \ni (r,\theta,\phi) \mapsto (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ を定めるとき、$\varphi'(r,\theta,\phi)$ と、$\det\varphi'(r,\theta,\phi)$ を求めよ。

(この問題の式は、いわば $(1,0,0)$ を北極にした極座標である。これは試験のために作ったわざとらしい式ではなくて、世の中にかなり流布している式である。すいすい使いこなせなければいけない。)

グラフ, 接平面, 法線

72. 次の関数のグラフの、与えられた点における接平面を求めよ。

(1) $\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, $(x, y) = (a, b)$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, $(x, y) = (a, b)$

(3) $3x^2 - 4y$, $(x, y) = (1, 2)$

(4) $\sqrt{14 - x^2 - y^2}$, $(x, y) = (-1, -2)$

(5) $\sqrt{17 - 5x^2 - 4y^2}$, $(x, y) = (-1, 1)$

(6) $(x^2 + y^2)^{1/3}$, $(x, y) = (2, -2)$

(7) $e^x \sin y$, $(x, y) = (-\log \pi, \pi/2)$

(8) $\sin(xy)$, $(x, y) = \left(\sqrt{2}\pi, -2\sqrt{2}\right)$

解答 (結果のみ) (1) $z = \dfrac{2}{a}x + \dfrac{2}{b}y - 2$ (2) $z = \dfrac{2}{a}x - \dfrac{2}{b}y$ (3) $z = 6x - 4y - 3$
(4) $x + 2y - 3z + 14 = 0$ (5) $5x - 4y - 2\sqrt{2}z + 17 = 0$ (6) $x - y - 3z + 2 = 0$
(7) $x - \pi z + \log \pi + 1 = 0$ (8) $z = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}\pi y + 8\pi$

73. 次の 2 変数関数 f について、$\operatorname{grad} f$ を求め、等高線を何本か描き、この $\operatorname{grad} f$ は等高線と直交することを確かめよ。(1) $f(x, y) = x + 2y$. (2) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

74. 次の曲面の接平面と法線を求めよ。
(1) $z = xy(x^2 + y^2 - 4)$. 点 $(1, 2, 2)$ で。(2) $\cos(x + y + z) = 0$. 点 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ で。
(3) $\sin x + y^2 + z^2 = 2$. 点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1, 0\right)$ で。

解答 (結果のみ) (1) $6x + 9y - z = 22$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$. 後者は $\dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-2}{9} = \dfrac{z-2}{-1}$ とも書ける。 (2) $x + y + z = \dfrac{\pi}{2}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$. 後者は $x = y = z$ とも書ける。 (3) $y = 1$. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$. 後者は $x = \pi/2$, $z = 0$ とも書ける。 ■

75. $\mathbf{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = 6x^2 - xy^3 + 2y^4$ のグラフ $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z = f(x, y)\}$ 上の点 $(1, 1, 7)$ における接平面と法線を求めよ。

答 (結果のみ) $z = 11x + 5y - 9,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\ (t \in \mathbf{R}).$

76. r を正定数とするとき、$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ とおく。(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 (a,b,c) における接平面を求めよ。

解答 (結果のみ) (1) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \\ -\dfrac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}$ (2) $ax + by + cz = r^2$ ■

77. 曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (a, b, c は正の定数) 上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ。

解答 (結果のみ) $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} + \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$ ■

78. 曲面

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1$$

について以下の問に答えよ。
(1) 曲面上の点 $(4/3, 10/3, 5)$ における接平面の方程式を求めよ。(2) 平面 $x + y + z = k$ (k は実定数) が接するように k の値を定めよ。

解答 (結果のみ) (1) $3x + 3y + 2z = 24$ (2) $k = 6 \pm \sqrt{14}$

79. 次の 2 つの曲面 π_1, π_2 が接する (π_1, π_2 の接平面が一致する) ように正定数 λ を定めよ。

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \ xyz = \lambda, \\ \pi_2 &: \ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{aligned}$$

解答 (結果のみ) $\lambda = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

微分方程式 (微分の計算練習)

(あまり意味のない計算をしてもらうのは、こちらも気が引けるので、微分方程式由来の問題を載せておく。と言ってもほとんどは単なる計算問題だけど。)

80. $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を $f(x) := \|x\|^{2-n}$ で定めるとき、次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

81. $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とおくとき、$\triangle u = 0$ をみたす関数 $u = u(x, y)$ は調和関数であるという。次の関数は調和関数であることを示せ。
(1) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ (2) $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ (3) $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

82. 関数 u, v が C^2 級の関数で Cauchy-Riemann の微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすとき、次の式が成り立つことを示せ。

$$\triangle\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \triangle\, v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

83. 関数

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) \quad (t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n)$$

は次の n 次元熱伝導方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u.$$

ただし

$$\triangle := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

84. $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が C^2 級ならば、定数 $c > 0$ に対して

$$u(t,x) := f(x - ct) + g(x + ct)$$

で定義される関数 u は、次の 1 次元波動方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

85. $u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ が C^2 級の関数で、$\mathbf{R}^2$ 上 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすとする。
(1) $X = x - t$, $Y = x + t$, $u(x,t) = U(X,Y)$ により $U\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を定義するとき、$\dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} = 0$ が成り立つことを示せ。
(2) $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$ を満たす関数 f, g が存在することを示せ。

86. c を正定数、$F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を C^2 級の関数とするとき、$u\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ を

$$u(x,y,z,t) = \frac{F(r - ct)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

で定義すると、u は $\mathbf{R}^4$ 全体で次式を満たすことを示せ。

$$u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right).$$

87. $u = u(x, y, z)$ が調和関数であるとは、$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ を満たすことをいう。

(1) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ により、$f\colon \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ を定義するとき、f は調和関数であることを示せ。

(2) $u(x, y, z)$ が調和関数ならば、

$$v(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, u\left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

も調和関数であることを示せ。

(3) $u(x, y, z)$ が C^3 級の調和関数ならば、$w(x, y, z) := xu_x(x, y, z) + yu_y(x, y, z) + zu_z(x, y, z)$ も調和関数であることを示せ。

88. C^2 級の関数 $f\colon (0, \infty) \ni r \mapsto f(r) \in \mathbf{R}$ に対して、$u\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}$ を $u(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ で定義する。このとき以下の問に答えよ。
(1) $u'(x, y)$ を f を用いて表せ。(2) $\triangle u := u_{xx} + u_{yy}$ を、f を用いて表せ。(3) u が $\triangle u(x, y) = 0$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ を満たしているとき、f を求めよ。

解答 (結果のみ) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする。(1) $u'(x, y) = \dfrac{f'(r)}{r}(x\ y)$ (2) $\triangle u = f''(r) + \dfrac{f'(r)}{r}$
(3) $f(r) = A \log r + B$ (A, B は任意定数)

89. C^2 級の関数 $f\colon [0, \infty) \to \mathbf{R}$ が与えられたとき、$u\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を $u(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ で定める。このとき、以下の問に答えよ。
(1) ∇u を f を用いて表せ。(2) $\triangle u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ を f を用いて表せ。(3) u が $\triangle u(x, y, z) = 0$ $((x, y, z) \neq (0, 0, 0))$ を満たしているならば、実は u は次の形をしていることを示せ。

$$u(x, y, z) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + D \quad (C,\ D \text{ は定数}).$$

- ここに載っている問題を全部解く必要はありません。解けるようになって欲しい種類の問題は授業中に取り上げますが、似たような問題を練習したい、という場合に活用して下さい。
- ちなみに Part 3 は、6〜7 ページです。
- 解答がおかしいと思ったら面倒がらずに指摘して下さい。