多変数の微分積分学1 第23回

桂田 祐史

2011年7月21日 (木)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

1 多変数関数の最大最小問題やりかけの問題

極値問題の最初に、

$$f(x, y) := 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 \tag{1}$$

の、

$$K := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\} \tag{2}$$

における最大値、最小値を求めよ、という問題を提示した。

f の $\mathbf{R}^2$ での極値を求めてみよう。$\nabla f(x, y) = 0 \iff (x, y) = \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$. この点で Hesse 行列は正値であるので、$f$ は狭義の極小になることが分かる。極小値 $f\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{2}{5}$.

定理 1.1 (Weierstrass の最大値定理) コンパクト集合 K で定義された連続関数 $f\colon K \to \mathbf{R}$ は、必ず最大値と最小値を持つ。

系 1.2 K が $\mathbf{R}^n$ の空でない有界閉集合とするとき、連続関数 $f\colon K \to \mathbf{R}$ は必ず最大値と最小値を持つ。

(2) の K は明らかに閉集合である (多項式関数 (それは連続！) と $\geq, \leq$ で定義されている)。「有界」については定義を思い出そう。

定義 1.3 (有界集合) $A \subset \mathbf{R}^n$ とする。A が有界であるとは、

$$\exists R \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in A \quad \|x\| \leq R$$

が成り立つことをいう。

A が有界であるとは、要するに、原点を中心とする十分大きな半径 R の閉球 $\overline{B}(0;R)$ に A が含まれることである。

(2) の K は、

$$K \subset \overline{B}(0;1)$$

を満たすので、有界性の条件が $R=1$ として成り立つ。ゆえに (2) の K は有界である。

従って Weierstrass の最大値定理によって、(1) で定義された f は K で最大値、最小値を持つ。

K を内部

$$K^\circ = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2; x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$$

と境界

$$\begin{aligned}
&K^b = \overline{K}\setminus K^\circ = E_1\cup E_2\cup E_2 = (\text{三角形の周}),\\
&E_1 := \{(x,0); x\in[0,1]\},\quad E_2 := \{(0,y); y\in[0,1]\},\quad E_2 := \{(x,1-x); x\in[0,1]\}
\end{aligned}$$

に分けて最大値、最小値を考える。

$$\max_{K^b} f = \max\left\{\max_{E_1} f, \max_{E_2} f, \max_{E_3} f\right\}$$

であるが、

$$\begin{aligned}
\max_{E_1} f &= \max_{x\in[0,1]} f(x,0) = 2 \quad (= f(1,0)),\\
\max_{E_2} f &= \max_{y\in[0,1]} f(0,y) = 1 \quad (= f(0,0) = f(0,1)),\\
\max_{E_3} f &= \max_{x\in[0,1]} f(x,1-x) = 2 \quad (= f(1,0))
\end{aligned}$$

であるから、

$$\max_{K^b} f = 2 \quad (= f(1,0)).$$

一方、

$$\min_{K^b} f = \min\{\min_{E_1} f, \min_{E_2} f, \min_{E_3} f\}$$

において

$$\begin{aligned}
\min_{E_1} f &= \min_{x\in[0,1]} f(x,0) = \frac{2}{3} \quad (= f\left(\frac{1}{3},0\right)),\\
\min_{E_2} f &= \min_{y\in[0,1]} f(0,y) = \frac{1}{2} \quad (= f\left(0,\frac{1}{2}\right),\\
\min_{E_3} f &= \min_{x\in[0,1]} f(x,1-x) = \frac{2}{3} \quad (= f\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right))
\end{aligned}$$

であるから、

$$\min_{K^b} f = \frac{1}{2} \quad \left(f(\left(0,\frac{1}{2}\right))\right).$$

f が $a \in K$ で最大になったとする ($f(a) = \max_K f$)。$a \notin K^\circ$ である。実際、$a \in K^\circ$ であれば、$\nabla f(a) = 0$, f は a で極大となるはずであるが、K° で $\nabla f(x) = 0$ となる点は $x = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ のみで、そこで f は狭義の極小となるので、極大とはなりえない。ゆえに $a \in K^b$. ゆえに

$$\max_K f = \max_{K^b} f = 2 \quad (= f(1,0)).$$

一方、$f\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} < \frac{1}{2} = \max_{K^b} f$ であるから、f は K^b で最小値を取らず、K° で最小値を取る。それは極小値であるから、$f\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ でなければならない。

まとめると、f は $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ で最小値 $\frac{2}{5}$ を取り、$(1,0)$ で最大値 2 を取る。■

2 Lagrangeの未定乗数法 (条件付き極値問題)

条件 $g(x) = 0$ の下での f の極大値、極小値を調べる。すなわち、N_g を g の零点集合

$$N_g := \{x; g(x) = 0\}$$

として、$f|_{N_g} : N_g \ni x \mapsto f(x) \in \mathbf{R}$ の極大値、極小値を求める。

例 2.1 $x^2 - y = 0$ 上の点と $(0,1)$ との距離の最小値を求めよ。

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}.$$

$g(x,y) := x^2 - y$ とおくと、$g(x,y) = 0$ は $y = x^2$ ととけるので、

$$h(x) := f\left(x, x^2\right) = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - 1\right)^2}$$

の最小値を求めることになる。■

この例のように $g(x,y) = 0$ が $y = \varphi(x)$ と解ければ簡単である。

定理 2.2 (Lagrangeの未定乗数法) Ω は $\mathbf{R}^2$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$, $g\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は C^1 級の写像、$N_g := \{x \in \Omega; g(x) = 0\}$ とおくとき、

$$\nabla g(x) \neq 0 \quad \text{on } N_g.$$

条件 $g(x) = 0$ の下で、f は $a \in N_g$ において極大となるならば、

$$\exists \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

λ のことを **Lagrange の未定乗数** (**Lagrange multiplier**) と呼ぶ。例えば $a = (\alpha, \beta)$ とするとき、α, β, λ は

$$\begin{aligned} f_x(\alpha,\beta) &= \lambda g_x(\alpha,\beta), \\ f_y(\alpha,\beta) &= \lambda g_y(\alpha,\beta), \\ g(\alpha,\beta) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす。3 つの未知数 λ, α, β に関する 3 つの方程式である。

証明　仮定

$$\nabla g(a) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a) \neq 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(a) \neq 0.$$

(i) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a) \neq 0$ の場合. 陰関数の定理から、点 a の近傍で

$$g(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$$

と y について解けて

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

となる。そこで

$$h(x) := f(x, \varphi(x))$$

とおくと

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) \left(-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \right). \end{aligned}$$

h は α で極値となるから $h'(\alpha) = 0$. $(\alpha, \varphi(\alpha)) = (\alpha, \beta) = a$ に注意して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(a)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(a) = 0.$$

ここで λ を

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a)} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a) = 0$$

とおくと

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a) = 0.$$

まとめると

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

(ii) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a) \neq 0$ の場合. 今度は $g(x, y) = 0$ を x について解けばよい。後は同様である。■

(準備中)