多変数の微分積分学1 第22回

桂田 祐史

2011年7月18日 (月)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

1 問11

$f(x,y) := x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2$ について、以下の問に答えよ。
(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

解説 (2011/7/18) (1) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3+12xy^2-4x \\ 4y^3+12x^2y-4y \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 12x^2+12y^2-4 & 24xy \\ 24xy & 12x^2+12y^2-4 \end{pmatrix}$
(3) $\nabla f(x,y) = 0$ となる点 (x,y) を求める。

$$
\begin{aligned}
&\nabla f(x,y) = 0 \\
&\iff \begin{cases} 4x^3+12xy^2-4x = 0 \\ 4y^3+12x^2y-4y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x(x^2+3y^2-1) = 0 \\ y(y^2+3x^2-1) = 0 \end{cases} \\
&\iff (x=0 \text{ or } x^2+3y^2-1=0) \quad \text{and} \quad (y=0 \text{ or } y^2+3x^2-1=0) \\
&\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{or} \begin{cases} x=0 \\ y^2+3x^2-1=0 \end{cases} \text{or} \begin{cases} x^2+3y^2-1=0 \\ y=0 \end{cases} \text{or} \begin{cases} x^2+3y^2-1=0 \\ y^2+3x^2-1=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{or} \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \text{or} \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases} \text{or} \begin{cases} x^2=1-3y^2 \\ y^2=\dfrac{1}{4} \end{cases} \\
&\iff (x,y) = (0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

$(x,y)=(0,0)$ のとき、$H(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. これは対角行列だから、固有値 -4 (重根) で、$H(0,0)$ は負値である。ゆえに f はこの点で極大となる。極大値 $f(0,0)=0$.

$(x,y)=(\pm 1,0),(0,\pm 1)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$. これは対角行列だから、固有値 8 (重根) で、$H(x,y)$ は正値である。ゆえに f はこれらの点で極小となる。極小値 $f(\pm 1,0)=f(0,\pm 1)=-1$.

$(x,y)=\pm\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix}$. $\det H_1(x,y)=2>0$, $\det H_2(x,y)=2^2-6^2=-32<0$ であるから、$H(x,y)$ は不定符号である。ゆえに f はこれらの点で極値を取らない。

$(x,y)=\pm\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ のとき、$H(x,y)=\begin{pmatrix}2 & -6\\ -6 & 2\end{pmatrix}$. $\det H_1(x,y)=2>0$, $\det H_2(x,y)=2^2-6^2=-32<0$ であるから、$H(x,y)$ は不定符号である。ゆえに f はこれらの点で極値を取らない。

まとめると、$(0,0)$ で極大値 0 を取り、$(0,\pm 1),(\pm 1,0)$ で極小値 -1 を取る。■

注意 1.1 (連立方程式の解法について) 連立代数方程式の解法については、近年、Gröbner 基底の応用というめざましい発展があったが、手計算向きの方法とは言えないと思う。まして大学初年級の微積分の講義としては、この辺で凝ったことをする余裕はない。そういうわけで、ちょっと工夫すればきれいに解けるような連立方程式が現れる問題を出題してお茶を濁している、というのが実情である。この辺はコンピューターの利用を前提にすれば変って来るのかもしれない。

上では因数分解出来たが、対称性に目をつけて、辺々加えてみたり、引いてみたりするとうまく行く場合がある。

上の連立方程式で辺々引き算すると、$(x-y)(x^2-2xy+y^2-1)=0$. 第 2 の因子は $(x-y)^2-1=(x-y+1)(x-y-1)$ であるから、結局 $(x-y)(x-y+1)(x-y-1)=0$ と因数分解できる。これから $x-y=0,1,-1$. これで未知数の消去が出来る。■

2 陰関数定理

2.1 記法の約束

$\mathbf{R}^m$ と $\mathbf{R}^n$ の直積 $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$ は

$$\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n=\{(x,y);x\in\mathbf{R}^m,\quad y\in\mathbf{R}^n\}$$

であるが、これは容易に $\mathbf{R}^{m+n}$ と同一視できる。すなわち $(x,y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ に対して、$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{m+n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

で定まる $z = (z_i) \in \mathbf{R}^{m+n}$ を対応させる。

(書きかけ)