多変数の微分積分学1 第21回

桂田 祐史

2011年7月14日 (木)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

1 陰関数定理と逆関数定理 — 存在定理

兄弟の関係にある「陰関数定理」と「逆関数定理」を駆け足で説明する。

どちらも「指定された点の近くで局所的な陰関数 (あるいは逆関数) が存在する」という存在定理である。

存在定理というと、2年生にはなじみが薄いかも知れないが、まったくの初めてというわけではなくて、

1. 中間値の定理「連続関数 $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ が $f(a)f(b) < 0$ を満たすならば、$f(c) = 0$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する」
2. 代数学の基本定理「複素係数の n 次多項式 $a_0 z^n + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ は複素数の範囲に少なくとも一つの根を持つ」
3. Weierstrass の最大値定理「コンパクト集合 K 上の実数値連続関数は、最大値を持つ」

という例 (どれも非常に重要) がある。

陰関数定理も逆関数定理も「関数の存在」を主張している。証明においては、x が与えられたときに $F(x,y) = 0$ を y について解く、y が与えられたときに $f(x) = y$ を x について解く、と方程式の解の存在をするのが関門である。

2 逆関数定理超特急

逆関数については、「写像 f が逆写像 f^{-1} を持つためには、f が全単射であることが必要十分」というのが基本中の基本。

f そのものが全単射でなくても、それを適当に制限したものが全単射になり、その逆写像 (逆関数) が便利、というのが良くある話である。

例 2.1 $f\colon \mathbf{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbf{R}$ は全射でも単射でもないが、その制限

$$\widetilde{f}\colon [0,\infty) \ni x \mapsto x^2 \in [0,\infty)$$

は全単射で、その逆関数 f^{-1} はいわゆるルートである。

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad (y \in [0, \infty)).$$

似たようなことは、exp と log, 各種逆三角関数であった。■

例 2.2 (1 変数の逆関数の定理) I が $\mathbf{R}$ の開区間、$f\colon I \to \mathbf{R}$ は C^1 級、$a \in I$, $f'(a) \neq 0$ ならば、

$$\begin{aligned}&(\exists U \subset I : a \text{ を含む開区間})\,(\exists V : b := f(a) \text{ を含む開区間})\\ &\qquad \widetilde{f}\colon U \ni x \longmapsto f(x) \in V \quad \text{は全単射で逆関数も } C^1 \text{ 級}\end{aligned}$$

が成り立つ。実際 $f'(a) \neq 0$ であるから、$f'(a) > 0$ or $f'(a) < 0$. $f'(a) > 0$ の場合、f' の連続性から、$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $f' > 0$ on $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. このとき f は $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ で狭義単調増加である。このとき、$U := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $V = (f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon))$ とすると、$\widetilde{f}$ は明らかに定義できて、単射である。また中間値の定理を用いて全射であることが分かる。ゆえに $\widetilde{f}$ は全単射であるから逆関数が存在する。少し頑張ると $\widetilde{f}^{-1}$ の連続性と、微分可能性、$\widetilde{f}^{-1}$ の連続性が証明できる (詳しくは桂田 [1] の付録 H.2「1 変数の逆関数の定理」)。■

逆関数の定理は、この例の素直な多次元化であるが、その前に線形代数の復習をしておく。

例 2.3 (線型写像が全単射となる条件) 有限次元線型空間の間の線型写像を考える。一般形は、n, $m \in \mathbf{N}$, $A \in M(m, n; \mathbf{R})$ として、

$$f\colon \mathbf{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbf{R}^m$$

である。このとき、有名な次元定理

$$\operatorname{rank} f = n - \dim\ker f$$

が成り立つ。

- f が全射 $\iff \operatorname{rank} f = m$
- f が単射 $\iff \dim\ker f = 0$

であるから、

$$\begin{aligned} f \text{ が全単射} &\implies (\operatorname{rank} f = m \quad \text{and} \quad \dim\ker f = 0)\\ &\implies m = n.\end{aligned}$$

ゆえに全単射であるためには、$m = n$ が必要である。そこで以下 $m = n$ を前提条件とする。このとき

$$\begin{aligned} f \text{ が全射} &\iff \operatorname{rank} f = m (= n)\\ &\iff \dim\ker f = 0\\ &\iff f \text{ は単射}\\ &\iff f \text{ は全単射}\\ &\iff f^{-1} \text{ が存在}\\ &\iff A^{-1} \text{ が存在}\\ &\iff \det A \neq 0.\end{aligned}$$

後のために次のように覚えておこう。「全単射が存在するために、定義域と終域の空間次元が等しいことが必要で、それが成り立つという前提のもとで、全単射であるためには行列式が 0 でないことが必要十分である」 ■

定理 2.4 (逆関数定理) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ は C^1 級、$a \in \Omega$, $\det f'(a) \neq 0$ とするとき、($\exists U$: a を含む開集合) ($\exists V$: $b = f(a)$ を含む開集合) s.t. $\widetilde{f} := f|_U : U \ni x \mapsto f(x) \in V$ は全単射で、逆関数 $\widetilde{f}^{-1}\colon V \to U$ も C^1 級である。

時間の関係で、証明は涙を飲んで省略するが (苦笑)、逆関数の導関数については、既に学んだ逆関数の微分法が成立することを注意 (「思い出せ！」) しておく。

3　陰関数定理イントロ

(ごにょごにょ。中途半端な例を書いたのですが…本当は図を見せたりして、ゆっくり考えながら眺めると良い例なんですが、、、省略します。桂田 [1] の付録 H.2「1 変数の逆関数の定理」を見て下さい。)

参考文献

[1] 桂田祐史：多変数の微分積分学 1 講義ノート, http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1/tahensuu1.pdf.