多変数の微分積分学 1 第18回

桂田 祐史

2011 年 7 月 4 日 (月)

この授業用の WWW ページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

1　極値問題

1.1　まずは問題から

K を $\mathbf{R}^2$ 内の 3 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形とする: $K=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$. $f\colon K\to\mathbf{R}$ を

$$f(x,y)=3x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$$

で定めるとき、f の最大値、f の最小値を求めよ。

とりあえず微分してみましょう。

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x+2y-2 & 4y+2x-2\end{pmatrix}.$$

これから

$$f'(x,y)=0\quad\Leftrightarrow\quad(x,y)=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right).$$

さて、ここからどうしたら良いか？1 変数関数の場合のような増減表は書けない。そもそも f' の符号を調べるというのが、どう多変数関数に拡張したら良いか分からない ($f'(x,y)$ はベクトルなので)。

しかし

f が定義域の内点 a で極大 (or 極小) ならば $f'(a)=0$

は多変数関数でも成立する (すぐ後で証明する)。

また

$f'(a)=0$, a の十分近くで $f''>0\Longrightarrow f$ は a で極小

は多変数関数への拡張が出来る (今回、定理を紹介する)。

1.2　内点 a で極値を取れば $f'(a)=0$

定理 1.1 Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は全微分可能で、$a \in \Omega$, f は a で極大 (or 極小) ならば、$f'(a)=0$ (これは $\nabla f(a)=0$ とも書ける).

定義 1.2 $A \subset \mathbf{R}^n$, $f\colon A \to \mathbf{R}$, $a \in A$ とするとき、f が a で極大とは、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad f(a) = \max_{x \in A \cap B(a;\varepsilon)} f(x) = \max_{\substack{x \in A \\ \|x-a\| < \varepsilon}} f(x)$$

が成り立つことをいう。また f が a で狭義の極大とは、

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad (\forall x \in A : 0 < \|x-a\| < \varepsilon) \quad f(a) > f(x)$$

が成り立つことをいう。「極小」「狭義の極小」も同様である。

注意 1.3 内点でしか極値を考えないという立場もある。後の条件付き極値問題とのからみで上のような定義を採用した。上の定理は、どちらの流儀でも考えても良い (開集合に属する点は、すべて内点なので)。 ■

証明　Ω が開集合であるから、$\exists r > 0$ s.t. $B(a;r) \subset \Omega$. 各 $i \in \{1,\dots,n\}$ に対して、

$$\varphi_i\colon (a_i - r, a_i + r) \ni x_i \mapsto f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n) \in \mathbf{R}$$

を考えると、これは $x_i = a_i$ で極大値を取る。ゆえに

$$0 = \varphi_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

これが任意の i について成り立つから、

$$f'(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right) = 0. \blacksquare$$

幾何学的考察　この定理を図形的に考えてみよう。一般に関数 f のグラフ $z = f(\vec{x})$ の $\vec{x} = \vec{a}$ における接超平面は、

$$z = f'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + f(\vec{a})$$

であった。$n=2$ の場合、

$$z = f'(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + f(a,b)$$

となるが、$f'(a,b)=0$ であれば、

$$z = f(a,b).$$

これは xy 平面に水平な平面である。 ■

上の定理の逆は成り立たない。すなわち $f'(a)=0$ であっても、f が a で極値を取らないということがありうる。これは 1 変数関数でもそうである。(反例: $f(x)=x^3$, $a=0$ とすると、$f'(a)=0$ であるが、f は a で極大でも極小でもない。)

1.3 極値問題の定理

Taylor の定理を $k = 2$ で用いる。f が C^2 級ならば、十分小さい $\forall h \neq 0$ に対して、

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + \left(d^2 f\right)_a(h) + \frac{1}{2!}\left(d^2 f\right)_{a+\theta h}(h) \\
&= f(a) + f'(a)h + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h)h_i h_j.
\end{aligned}
$$

$f'(a) = 0$ とすると、$f'(a)h = 0$ なので

$$
f(a+h) = f(a) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h)h_i h_j.
$$

$\|h\|$ が小さいとき、右辺第 2 項は「大体」 h の 2 次式なので (かなり乱暴な議論だけれど)、符号が一定になる場合がある。

$$
\begin{aligned}
&(\forall h : 0 < \|h\| < \varepsilon) \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h)h_i h_j > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ は } a \text{ で極小}, \\
&(\forall h : 0 < \|h\| < \varepsilon) \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta h)h_i h_j < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ は } a \text{ で極大}.
\end{aligned}
$$

定義 1.4 (Hesse 行列) C^2 級の関数 f に対して、

$$
H(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)
$$

とおき、これを f の x における **Hesse 行列**と呼ぶ。

Hesse 行列は実対称行列である。これを使うと、上の式は

$$
f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}\left(H(a+\theta h)h, h\right) = f(a) + \frac{1}{2}\left(H(a+\theta h)h, h\right)
$$

と書ける。

定理 1.5 Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f \colon \Omega \to \mathbf{R}$ が C^2 級, $a \in \Omega$, $f'(a) = 0$, $H(a) :=$ f の a における Hesse 行列 とするとき、次の (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(i) $H(a)$ が正値 $\Longrightarrow$ f は a で狭義の極小となる。

(ii) $H(a)$ が負値 $\Longrightarrow$ f は a で狭義の極大となる。

(iii) $H(a)$ が不定符号 $\Longrightarrow$ f は a で極値を取らない。

注意 1.6 正値でも負値でも不定符号でもない場合がある (次項で述べる)。そういう場合は、もっと詳しく調べないと判定できない。 ■

1.4　実対称行列の正値性、負値性

定義 1.7 $A=(a_{ij})$ を n 次実対称行列とする。

(i) A が正値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値がすべて正。

(ii) A が負値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値がすべて負。

(iii) A が不定符号 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A の固有値に正のもの、負のものがある。

例 1.8 $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ のとき、固有値は $2,3$ で、すべて正であるから、A は正値。

$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ のとき、固有値は $-1,-2$ で、すべて負であるから、A は負値。

$A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ のとき、固有値は $5,-2$ で、正のもの、負のもの両方あるので、A は不定符号。

$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ のとき、固有値は $3,0$ で、すべて正でもないし、すべて負でもないし、不定符号でもない (負の固有値がない) ので、A は正値でも、負値でも、不定符号でもない。

定理 1.9 $A=(a_{ij})$ が n 次実対称行列とするとき、次の (i), (ii), (iii) が成り立つ。

(i) A が正値 $\Leftrightarrow \forall h\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}\ (Ah,h)>0.$

(ii) A が負値 $\Leftrightarrow \forall h\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}\ (Ah,h)<0.$

(iii) A が不定符号 $\Longrightarrow \exists h,h'\in\mathbf{R}^n$ s.t. $(Ah,h)>0,\ (Ah',h')<0.$

(証明のあらすじ) 適当な実直交行列 U が存在して、

$$U^TAU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

このとき $x=Uy$ とおくと ($y=U^Tx$ とおくと)、

$$(Ax,x)=(AUy,Uy)=\left(U^TAUy,y\right)=\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}y,y\right)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

$x=0\Leftrightarrow y=0$ に注意すれば良い。 ■