多変数の微分積分学1 第17回

桂田 祐史

2011年6月30日 (木)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

(全部書けていないけれど⋯)

1 問8の解説

問8 C^2 級の関数 $u\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbf{R}$ と正定数 c があるとき、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad v(\xi,\eta) = u(x,t), \quad \text{すなわち} \quad v(\xi,\eta) := u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right)$$

とおく。このとき次式を証明せよ (左辺、右辺どちらから始めても良い、余裕あれば両方)。

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}.$$

解 (右辺から左辺)

$$x = \frac{1}{2}(\xi+\eta), \quad t = \frac{1}{2c}(\eta-\xi)$$

であるから、

$$x_\xi = \frac{1}{2}, \quad x_\eta = \frac{1}{2}, \quad t_\xi = -\frac{1}{2c}, \quad t_\eta = \frac{1}{2c}.$$

chain rule によって

$$\begin{aligned}
v_\eta &= u_x x_\eta + u_t t_\eta = \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2c}u_t, \\
v_{\eta\xi} &= \frac{1}{2}\left(u_{xx}x_\xi + u_{xt}t_\xi\right) + \frac{1}{2c}\left(u_{tx}x_\xi + u_{tt}t_\xi\right) = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c}u_{xt} + \frac{1}{4c}u_{tx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt} \\
&= \frac{1}{4}\left(u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt}\right).
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}.$$

(左辺から右辺)

$$\xi_x = 1, \quad \xi_t = -c, \quad \eta_x = 1, \quad \eta_t = c.$$

chain rule によって

$$
\begin{aligned}
u_t &= v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = -cv_\xi + cv_\eta, \\
u_{tt} &= -c(v_{\xi\xi}\xi_t + v_{\xi\eta}\eta_t) + c\left(v_{\eta\xi}\xi_t + v_{\eta\eta}\eta_t\right) = c^2 v_{\xi\xi} - c^2 v_{\xi\eta} - c^2 v_{\eta\xi} + c^2 v_{\eta\eta} \\
&= c^2\left(v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}\right), \\
u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + c_\eta, \\
u_{xx} &= v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}
\end{aligned}
$$

であるから、

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}.\blacksquare$$

2　問 9 の解説

問 9　C^∞ 級の 2 変数関数 $f(x,y)$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$ と、$(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $(h,k)\in\mathbf{R}^2$ があるとき、

$$F(t) := f\left(a+th, b+tk\right) \quad (t\in\mathbf{R})$$

とおくとき、次の (1), (2) に答えよ[1]。　　——— 合成関数の微分法で、Taylor の定理の準備

(1) $F'(t)$, $F''(t)$, ... を (いくつか) 計算せよ。

(2) $F^{(m)}(t)$ $(m\in\mathbf{N})$ の公式を推測し、数学的帰納法で証明せよ。

解　(1)

$$F'(t) = f_x x_t + f_y y_t = f_x(a+th,b+tk)h + f_y(a+th,b+tk)k,$$

簡単のため、$c := (a+th, b+tk)$ とおく。f が C^2 級であることから、$f_{xy} = f_{yx}$ であることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
F''(t) &= \left(f_{xx}(c)h + f_{xy}(c)k\right)h + \left(f_{yx}(c)h + f_{yy}(c)k\right)k \\
&= f_{xx}(a+th,b+tk)h^2 + 2f_{xy}(a+th,b+tk)hk + f_{yy}(a+th,b+tk)k^2,
\end{aligned}
$$

f が C^3 級であることから、$f_{xxy} = f_{xyx}$, $f_{xyy} = f_{yyx}$ であることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
F''(t) &= \left(f_{xxx}(c)h + f_{xxy}(c)k\right)h^2 + 2\left(f_{xyx}(c)h + f_{xyy}(c)k\right)hk + \left(f_{yyx}(c)h + f_{yyy}(c)k\right)y^2 \\
&= f_{xxx}(c)h^3 + 3f_{xxy}(c)h^2k + 3f_{xyy}(c)hk^2 + f_{yyy}(c)k^3.
\end{aligned}
$$

(2) $m = 1,2,3$ での結果から

$$(\heartsuit) \qquad F^{(m)}(t) = \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{\partial^m f}{\partial x^r \partial y^{m-r}}(a+th,b+tk)h^r k^{m-r}$$

[1] (授業でやるけれど) n 変数関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ について、$F(t) := f(a_1+th_1, a_2+th_2, \cdots, a_n+th_n)$ とおき、上と同様のことを行なえ。

と推測される。$m=n$ のとき ($\heartsuit$) が成立したと仮定すると、chain rule と $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$ から、

$$\begin{aligned}
F^{(n+1)}(t) &= \frac{d}{dt}F^{(n)}(t) = \frac{d}{dt}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\partial^n f}{\partial x^r \partial y^{n-r}}(a+th, b+tk)h^r k^{n-r} \\
&= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{r+1}\partial y^{n-r}}(c)h + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n-r+1}}(c)k\right)h^r k^{n-r} \\
&= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{r+1}\partial y^{n+1-(r+1)}}(c)h^{r+1}k^{n+1-(r+1)} + \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} \\
&= \sum_{r'=1}^{n+1}\binom{n}{r'-1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{r'}\partial y^{n+1-r'}}(c)h^{r'}k^{n+1-r'} + \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} \\
&= \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(c)h^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\left(\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}\right)\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(c)k^{n+1} \\
&= \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(c)h^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n+1}{r}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(c)h^r k^{n+1-r} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(c)k^{n+1} \\
&= \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^r \partial y^{n+1-r}}(a+th, b+tk)h^r k^{n+1-r}.
\end{aligned}$$

これは $m=n+1$ のときも (**??**) が成り立つことを示している。ゆえに帰納法により、(**??**) は任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して成り立つ。 ■

(2) の証明は、二項定理の帰納法による良く知られた証明と本質的に同じである。

3 $(a_1+\cdots+a_n)^m$ の展開

この節の目標は次を証明することである。

$$\begin{aligned}
(a_1+a_2+\cdots+a_n)^m &= \sum_{1\le i_1, i_2, \cdots, i_m \le n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m} \\
&= \sum_{\substack{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \text{ は非負整数} \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=m}} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}.
\end{aligned}$$

3.1 二項定理 (the binomial theorem)

授業では時間がないので、「二項定理は証明まで込めて自分で復習しておいて下さい」というのだろう。

定理 3.1 (二項定理 (the binomial theorem))

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}.$$

高校数学では帰納法による証明が標準的と思われる[2]。

二項係数に関する次の公式は、Pascal の三角形を作るときにも使われるので、良く知っているはずである (知らずに Pascal の三角形を書いていたらダメよ)。

補題 3.2

$$\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k}.$$

証明

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} &= \frac{m!}{(k-1)!(m-(k-1))!} + \frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{m!}{(k-1)!(m-k+1))!} + \frac{m!}{k!(m-k)!} \\
&= \frac{k}{k(k-1)!} \cdot \frac{m!}{(m-k+1))!} + \frac{m!}{k!} \cdot \frac{m-k+1}{(m-k+1)(m-k)!} \\
&= \frac{m!}{k!(m-k+1)!} \left(k + (m-k+1)\right) = \frac{m!(m+1)}{k!(m-k+1)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{k!((m+1)-k)!} = \binom{m+1}{k}. \blacksquare
\end{aligned}$$

定理 2.1 の証明

帰納法による。$m=1$ のとき明らかに成り立つ。$m=k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k &= (a+b) \sum_{r=0}^{n} \binom{k}{r} a^{k-r} b^r \\
&= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k+1-r} b^r + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r+1}.
\end{aligned}$$

右辺第 1 項は

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{k+1-r} b^r = a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} a^{k+1-r} b^r.$$

[2] $(a+b)^m = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ の右辺を展開して $a^k b^{m-k}$ が出て来るには、m 個の因子のうち、a を k 個選ぶということで、全部で $\binom{m}{k}$ 通りある、と数え上げることも出来る。

右辺第 2 項は、途中で $r+1$ を r' と置き換えて

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{k-r}b^{r+1} &= \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}a^{(k+1)-(r+1)}b^{r+1} = \sum_{r'=1}^{k+1}\binom{k}{r'-1}a^{k+1-r'}b^{r'} \\ &= \sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r-1}a^{k+1-r}b^{r} + b^{k+1}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k}\left(\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}\right)a^{k+1-r}b^{r} + b^{k+1} \\ &= a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^{r} + b^{k+1} \\ &= \sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}a^{k+1-r}b^{r} + b^{k+1}.\end{aligned}$$

これは $m=k+1$ のときも成り立つことを示している。帰納法により、任意の自然数 m について成り立つ。■

この帰納法による証明は、前回の問 9 の (2) の証明部分と本質的に同じである。

3.2 分配法則でとにかくバラす

分配法則は良く知っているであろう。

$$(a_1+\cdots+a_n)A = a_1A+\cdots+a_nA, \quad \text{つまり} \quad \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)A = \sum_{i=1}^{n}(a_iA).$$

($\sum$ の外の数を中に入れる、ということ。)

これを 2 回使うと、

$$(a_1+\cdots+a_n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{j=1}^{n}a_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ia_j)$$

同様にして、m 個の積の場合、m 回分配法則を用いて

$$(a_1+\cdots+a_n)^m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}).$$

この右辺を

$$\sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_m\le n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}$$

と書くことにする。

こうして、

(1) $$(a_1+\cdots+a_n)^m = \sum_{1\le i_1,i_2,\cdots,i_m\le n} a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}.$$

3.3　二項定理の一般化「多項定理 (the multinomial theorem)」

定理 3.3 (多項定理 (the multinomial theorem)) $n, m \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ とするとき

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m = \sum_{\substack{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n \text{ は非負整数} \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=m}} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}. \tag{2}$$

以下、インデックスが非負整数であることは常に仮定するので、それを書くのは省略する。ゆえに

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=m} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}.$$

二項定理が

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r} = \sum_{\alpha+\beta=n} \frac{n!}{\alpha!\beta!} a^\alpha b^\beta$$

と書けることを注意しておく。

定理 2.3 の証明

n に関する帰納法による。$n = 2$ のとき (2) が成り立つのは明らかである。$n = k$ のとき (2) が成り立つと仮定する。二項定理に続いて帰納法の仮定を用いて、

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^m &= ((a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1})^m \\
&= \sum_{\alpha+\beta=m} \frac{m!}{\alpha!\beta!} (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^\alpha a_{k+1}^\beta \\
&= \sum_{\alpha+\beta=m} \frac{m!}{\alpha!\beta!} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=\alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_k^{\alpha_k} a_{k+1}^\beta \\
&= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\beta=m} \frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_k!\beta!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_k^{\alpha_k} a_{k+1}^\beta.
\end{aligned}$$

これは $n = k+1$ のときに (2) が成り立つことを示している。ゆえに (2) は、2 以上の任意の自然数に対して成立する。 ■

4 $F^m(t)$ の公式

補題 4.1 (前回半分だけ証明した補題) Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合, $k \in \mathbf{N}$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ は C^k 級, $a \in \Omega$, $h \in \mathbf{R}^n$, $[a, a+h] \subset \Omega$ とするとき、

$$F(t) := f\left(a + th\right) \quad (t \in [0,1])$$

とおくと、F は C^k 級で、$\forall m \in \{1, \ldots, k\}$ に対して、

$$\begin{aligned} F^{(m)}(t) &= \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots, i_m \le n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}}(a+th) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_m} \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ は非負整数} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m}} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(a+th) h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$