

多変数の微分積分学1 第15回

桂田 祐史

2011年6月20日(月)

この授業用の WWW ページは

<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/>

前回の Laplacian の極座標表示は面倒で、少しぎょっとしたかもしれない。しかし**解く価値のある¹問題を解くためにこの種の計算は避けられない。**

一方、大学2年生になると、数学の学び方についても考えるべき段階に来ている。既に「計算練習問題で勉強する」という小学校以来のやり方が通用しない科目も体験したであろう。

微積分はある意味でそのやり方にそれなりの効果がある最後の科目かもしれない(広い意味の計算問題の比率が60%以上を占めるので、計算問題だけを解いて単位を取ることは可能)。計算問題にしても(変数変換などは計算問題と言って良いであろう)1つ解くのに、1時間以上かかってしまうようなものはざらにある。また「計算」と言っても、式変形をストレートにするだけでは済まないようなものも多くなって来る。

例題の真似をして、**類似問題をたくさん解くことで解き方を覚える、というやり方は見直す必要がある。**きちんと1題考えながら解いて反省することで、大事なことを身につける、というやり方。人間に代わって計算するためのコンピューター・プログラムを作る、というやり方。そもそも、どういふことを習得するかも考える必要も出て来る(数学の勉強で八方美人は難しい—まあ2年生くらいでは、どの科目もきちんとやって下さい)。

例の追加と問8

例 0.1 $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は C^2 級で、 $c > 0$ とするとき、

$$(1) \quad u(x, t) := f(x - ct) + g(x + ct) \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^2)$$

¹Laplacian は非常に多くの微分方程式に現れる。我ながら驚いたのだが、過去に自分が研究で扱った微分方程式のすべてに Laplacian が含まれていた。もちろん、そうでない方程式も存在するが、普通の解析学者の扱う微分方程式の90%には含まれているような印象がある。

とおく。chain rule より

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= f'(x - ct) \frac{\partial}{\partial t} (x - ct) + g'(x + ct) \frac{\partial}{\partial t} (x + ct) = f'(x - ct)(-c) + g'(x + ct) \cdot c \\ &= -cf'(x - ct) + cg'(x + ct), \\ u_{tt}(x, t) &= -cf''(x - ct)(-c) + cg''(x + ct) \cdot c \\ &= c^2 (f''(x - ct) + g''(x + ct)), \\ u_x(x, t) &= f'(x - ct) \cdot 1 + g'(x + ct) \cdot 1 \\ &= f'(x - ct) + g'(x + ct), \\ u_{xx}(x, t) &= f''(x - ct) + g''(x + ct)\end{aligned}$$

であるから、

$$(2) \quad \frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^2).$$

これを 1 次元波動方程式と呼ぶ (1 次元的な波動現象の多くがこの微分方程式に帰着される)。ちなみに n 次元波動方程式は、

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t), \quad \Delta := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

(1) で定義した任意の u が (2) の解であることが証明されたわけだが、実はある意味で逆が成立する。すなわち、1 次元波動方程式 (2) の C^2 級の任意の解 u は、適当な f, g を用いて (1) の形に表されることが分かっている。その証明の要点が次の問 8 である。■

問 8 $u: \mathbf{R}^2 \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbf{R}$ を C^2 級関数、 c を正定数とすると、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad u(x, t) = v(\xi, \eta)$$

とする。すなわち

$$v(\xi, \eta) := u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2c}\right).$$

このとき

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}$$

が成り立つことを示せ。

左辺から右辺を導くやり方、右辺から左辺を導くやり方、どちらもある。

おさらい

前回、2次元の極座標変換をとりあげた。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad u(x, y) = v(r, \theta)$$

として、

$$v_r = u_x x_r + u_y y_r.$$

ここに $x_r = \cos \theta$, $y_r = \sin \theta$ を代入して、

$$v_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta.$$

こんな調子で計算できる。さらに... ■

平均値の定理、Taylorの定理

合成関数の微分法を用いると、多変数関数版平均値の定理・Taylorの定理が得られる。これらは例えば極値問題の解析に利用できる。

問題意識 Ω が \mathbf{R}^n の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $a \in \Omega$ とするとき、($\|h\|$ が十分小さい h に対して $a+h \in \Omega$ となるわけだが) $f(a+h) - f(a)$ はどうなるか? 以前 $f(a+h) - f(a) \doteq f'(a)h = \nabla f(a) \cdot h$ ということを書いたが、 \doteq は数学的な主張ではない。そこをちゃんとしたい。

注意 f の値域の次元 (これまで m と書いてきたもの) は、1 とする。その理由は後述する。

アイデア

解くためには、次のアイデア一発で十分である。

$$F(t) := f(a+th) \quad (t \in [0, 1])$$

とおくと、 $F(0) = f(a)$, $F(1) = f(a+h)$ であるから、

$$f(a+h) - f(a) = F(1) - F(0).$$

この F は1変数関数であるから、1変数関数の平均値定理、Taylorの定理が使える。

F の導関数 F' はどうなるか? $\varphi(t) := a+th$ とおくと、 F は f と φ の合成関数である: $F = f \circ \varphi$. また、 $\varphi'(t) = h$. 実際、

$$\varphi(t) = a + th = \begin{pmatrix} a_1 + th_1 \\ a_2 + th_2 \\ \vdots \\ a_n + th_n \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} (a_1 + th_1)' \\ (a_2 + th_2)' \\ \vdots \\ (a_n + th_n)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = h.$$

ゆえに合成関数の微分法から、

$$F'(t) = \frac{d}{dt}f(a + th) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) = f'(a + th)h = \nabla f(a + th) \cdot h.$$

特に

$$F'(0) = \left. \frac{d}{dt}f(a + th) \right|_{t=0} = f'(a)h = \nabla f(a) \cdot h.$$

この量を、 a における、 f の h 方向の方向微分係数と呼び、 $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$ で表す。

記号の約束: 方向微分係数

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \left. \frac{d}{dt}f(a + th) \right|_{t=0} = f'(a)h = \nabla f(a) \cdot h.$$

平均値の定理

定理 0.2 (多変数関数の平均値の定理) Ω は \mathbf{R}^n の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ は全微分可能、 $a, b \in \Omega$, $a \neq b$, $[a, b] \subset \Omega$ とするとき、

$$\exists c \in (a, b) \quad \text{s.t.} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

ただし

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{(1-t)a + tb; t \in [0, 1]\}, \\ (a, b) &:= \{(1-t)a + tb; t \in (0, 1)\}. \end{aligned}$$

注意 0.3 $n \geq 2$ のとき、1 変数の場合に良く登場する式

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

はナンセンスである (ベクトル $b - a$ で割れない)。■

証明 $h := b - a$, $F(t) := f(a + th)$ ($t \in \mathbf{R}$) とおくと、

$$f(b) - f(a) = F(1) - F(0), \quad F'(t) = f'(a + th)h.$$

1 変数関数の平均値の定理から、

$$\exists \theta \in (0, 1) \quad \text{s.t.} \quad F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot 1.$$

ゆえに

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta h)h.$$

$c := a + \theta h$ とおくと、 $c \in (a, b)$ で、 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. ■