多変数の微分積分学1 第14回

桂田 祐史

2011年6月16日 (木)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

問7

(0) 曲線 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},1\right)$ における接線を求めよ。(1) 曲線 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ の傾き -1 の接線を求めよ。(2) 曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}=1$ と平面 $x+y+z=k$ が接するような実数 k の値を求めよ。

解答

(0) $F(x,y):=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}$ とおく。

$$\nabla F(x,y)=\begin{pmatrix}F_x(x,y)\\ F_y(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2x}{3}\\ y\end{pmatrix},\quad \nabla F\left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{2}}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\\ 1\end{pmatrix}.$$

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)$ における接線は、この点を通り、$\nabla F\left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)$ を法線ベクトルに持つので、

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+1\cdot(y-1)=0.$$

整理して、

$$\sqrt{\frac{2}{3}}x+y-2=0.\qquad \left(y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x+2\right)$$

(1) $F(x,y):=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}$ とおく。求める接線の接点を (x_0,y_0) とすると、これが曲線 $F(x,y)=1$ 上にあることから、

$$\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{2}=1. \tag{1}$$

一方、$\nabla F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{3} \\ y_0 \end{pmatrix}$ は曲線 $F(x, y) = 1$ の (x_0, y_0) における (1 つの) 法線ベクトルである。接線の傾きが -1 とは、法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行、ということであるから、$\exists t \in \mathbf{R}$ s.t.

$$\begin{pmatrix} \frac{2x_0}{3} \\ y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad (x_0, y_0) = \left(\frac{3t}{2}, t \right). \tag{2}$$

(1), (2) を連立方程式として解いて、$(t, x_0, y_0) = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$. 接線は、$(x_0, y_0) = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ を通り、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直だから、その方程式は、

$$1 \cdot \left(x - \frac{\pm 3}{\sqrt{5}} \right) + 1 \cdot \left(x - \frac{\pm 2}{\sqrt{5}} \right) = 0.$$

整理して、

$$x + y = \sqrt{5}, \quad x + y = -\sqrt{5}.$$

(2) $F(x, y, z) := \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4}$ とおき、$F(x, y, z) = 1$ の接平面で、法線ベクトルが $(1, 1, 1)$ に平行なものを求める。上と同様に

$$\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{3} + \frac{z_0^2}{4} = 1,$$

$$\exists t \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad \left(x_0, \frac{2y_0}{3}, \frac{z_0}{2} \right) = t(1, 1, 1).$$

これを解いて $(t, x_0, y_0, z_0) = \pm \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right)$. 接平面は、$(x_0, y_0, z_0)$ を通り、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直であることから、

$$x + y + z = 3, \quad x + y + z = -3. \blacksquare$$

Mathematica にて

```
F[x_,y_]:=x^2/3+y^2/2
g1 = ContourPlot[F[x, y] == 1, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
  AspectRatio -> Auto, Axes -> True]
g2 = Plot[{Sqrt[5] - x, -Sqrt[5] - x}, {x, -3, 3},
  AspectRatio -> Auto]
g=Show[g1,g2]
Export["toi12.eps",g]

g1 = ParametricPlot3D[{2Sin[u]Cos[v],Sqrt[3]Sin[u]Sin[v],Sqrt[2]Cos[u]},
{u,0,Pi},{v,0,2Pi}]
g2 = Plot3D[{3-x-y,-3-x-y},{x,-3,3},{y,-3,3}]
g=Show[g2,g1,BoxRatios->{3,3,10},AspectRatio->Auto]
```

図示してみよう　(1) の答の接線 ($x+y=\sqrt{5}$, $x+y=-\sqrt{5}$) を、曲線と一緒に描くと、図 1 のようになる。

これら接線の y 切片 ($y=-x+b$ の形にしたときの b のこと — 実は k ですね) が、$x+y$ ((x,y) は $F(x,y)=1$ を満たす) の最大値と最小値を与える。分かってもらえると良いのだけれど…(昔は、こういう問題が高校数学にあったのですが、今はどうなんでしょう。)

(2) は空間図形の話になるので、若干分かりにくくなりますが、本質的には同じことです (楕円の接線の代わりに、楕円面の接平面になる)。図 2 に楕円面とその接平面を描きました。

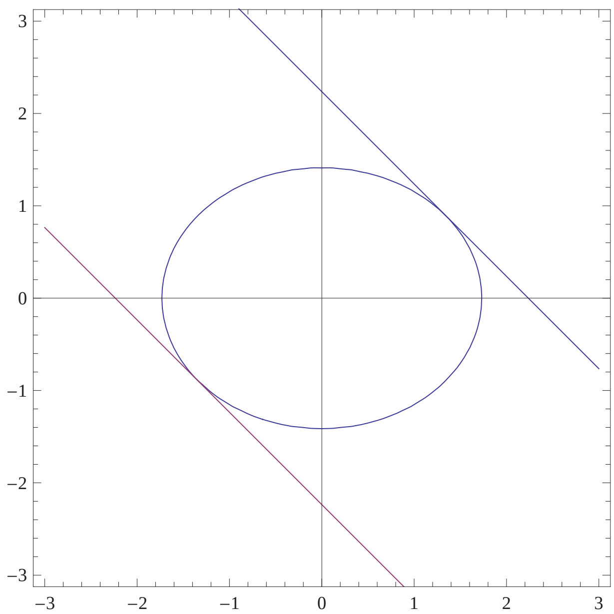

図 1: $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ と $x+y=\pm\sqrt{5}$

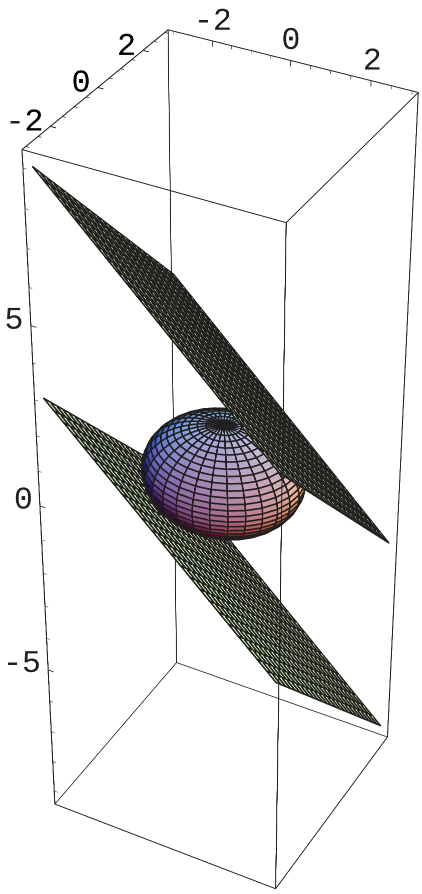

図 2: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}=1$ と $x+y+z=\pm 3$

前回のやり残し

例 0.1 (極座標変換の逆変換のヤコビ行列 (とても重要)) $\varphi\colon (0,\infty)\times(0,2\pi)\ni\begin{pmatrix} r\\ \theta\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$ は明らかに C^1 級であるから (実は C^∞ 級である)、全微分可能である。

$$\varphi'(r,\theta)=\begin{pmatrix} x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}.$$

逆関数の微分法によって、$\begin{pmatrix} r\\ \theta\end{pmatrix}=\varphi^{-1}(x,y)$ の全微分係数は、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_x & r_y\\ \theta_x & \theta_y\end{pmatrix} &= \left(\varphi^{-1}\right)'(x,y)=\varphi'(r,\theta)^{-1}=\begin{pmatrix} x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\frac{1}{\cos\theta\cdot r\cos\theta-(-r\sin\theta)\sin\theta}\begin{pmatrix} r\cos\theta & +r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ゆえに[1]

$$r_x=\cos\theta,\quad r_y=\sin\theta,\quad \theta_x=-\frac{\sin\theta}{r},\quad \theta_y=\frac{\cos\theta}{r}.\blacksquare$$

この結果を逆関数の微分法を使わずに求めてみよう。$r=\sqrt{x^2+y^2}$ であるから、r_x と r_y は比較的簡単に得られる。

$$\begin{aligned}
r_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\
r_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

これらがそれぞれ $\cos\theta, \sin\theta$ に等しいことは容易に分かる[2]。θ の導関数の方は少し難しい。割と多くのテキストに

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

[1] こういう計算をするとき、ヤコビ行列の成分の並べ方を間違えると、とんでもない結果になってしまうことに注意しよう。

[2] 例えば $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{r\cos\theta}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}=\dfrac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta.$

と書かれているが[3]、これは $\pmod{\pi}$ でしか正しくない式である。本当は、$\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ が主値 ($(-\pi/2,\pi/2)$ 内の値) を意味するとして、

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & ((x,y) \text{ が第 1 象限内の点}) \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \pi & ((x,y) \text{ が第 2,3 象限内の点}) \\ \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + 2\pi & ((x,y) \text{ が第 4 象限内の点}) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x = 0 \text{ かつ } y > 0) \\ \dfrac{3\pi}{2} & (x = 0 \text{ かつ } y < 0) \\ \pi & (y = 0 \text{ かつ } x < 0) \end{cases}$$

となるはずである ($r \neq 0$, $0 < \theta < 2\pi$ であるから、$y = 0$, $x \geq 0$ となる (x,y) は除かれていることに注意しよう)。

$$\frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

であることから、

$$\theta_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \theta_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

が導けるが、少々面倒である (第 1,2,3,4 象限では比較的簡単だが、x 軸と y 軸の上でどうすれば良いか？[4])。これがそれぞれ $-\dfrac{\sin\theta}{r}$, $\dfrac{\cos\theta}{r}$ に等しいことは容易に確められる。 ■

高階の導関数 (いんとろ)

要するに偏導関数を計算すれば良いので、既に述べたことと積の微分法くらいで計算はどんどん出来る。

試しに 1 変数では、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

---

[3]本当に困ったことである。C 言語のプログラムで、デカルト座標を極座標に直すには、`r=sqrt(x*x+y*y); theta=atan2(y,x);` のようにする。`theta=atan(y/x);` ではマズイ — というのは常識的なのだが、数学書の方が旧態依然のママなのは情けない。

[4]例えば、$x = 0$, $y > 0$ の範囲では、偏微分の定義から $\theta_y = 0 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ となることは容易に分かるが、$\theta_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ となることは、偏導関数の右側からの極限と、左側からの極限がともに $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ であることを確め、「$f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ が連続で、$c \in (a,b)$ 以外では微分可能で、$\displaystyle\lim_{\substack{x\neq c\\ x\to c}} f'(x) = D$ であれば、f は c で微分可能で、$f'(c) = D$.」という定理を用いる。

より

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx}\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy}\left(\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}\right)$$
$$= \frac{d^2z}{dy^2}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

偏微分方程式論からの有名な例を 2 つ紹介する。変数変換 (独立変数の変換は、要するに合成関数である！) をして「見方を変える」ことが重要なテクニックである。具体的に分からない関数 (なにしろ未知関数だから！) の合成関数の、高階の偏導関数の計算が必要になるのは仕方がない。

例 0.2 (1) $f\colon (x,y) \mapsto f(x,y)$ があるとき、

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad g(r,\theta) := f(x,y),$$

すなわち、

$$g(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

これは $\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ として、$g := f\circ\varphi$ ということ。このとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

が成り立つ。ちなみに 3 変数バージョンは

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}\right)$$

となり、工夫なしに馬鹿正直に計算すると、1 時間半以上かかる (桂田先生調査)。

(2) $u\colon (x,t) \mapsto u(x,t)$, 定数 c があるとき、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad v(\xi,\eta) := u(x,t),$$

すなわち

$$v(\xi,\eta) := u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2c}\right).$$

このとき

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}$$

が成り立つ。

(1) の証明。chain rule と積の微分法により、

$$\begin{aligned}
g_r &= f_x x_r + f_y y_r, \\
g_{rr} &= (f_{xx}x_r + f_{xy}y_r)x_r + f_x x_{rr} + (f_{yx}x_r + f_{yy}y_r)y_r + f_y y_{rr} \\
&= f_{xx}x_r^2 + 2f_{xy}x_r y_r + f_{yy}y_r^2 + f_x x_{rr} + f_y y_{rr}, \\
g_{\theta\theta} &= f_{xx}x_\theta^2 + 2f_{xy}x_\theta y_\theta + f_{yy}y_\theta^2 + f_x x_{\theta\theta} + f_y y_{\theta\theta}.
\end{aligned}$$

$x_r = \cos\theta,\ y_r = \sin\theta,\ x_{rr} = 0,\ y_{rr} = 0,\ x_\theta = -r\sin\theta,\ y_\theta = r\cos\theta,\ x_{\theta\theta} = -r\cos\theta,\ y_{\theta\theta} = -r\sin\theta$ であるから、

$$\begin{aligned}
g_{rr} &= f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta,\\
\frac{1}{r}g_r &= \frac{f_x\cos\theta}{r} + \frac{f_y\sin\theta}{r},\\
\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2}\left(f_{xx}r^2\cos^2\theta - 2f_{xy}r^2\sin\theta\cos\theta + f_{yy}r^2\cos^2\theta - f_x r\cos\theta - f_y r\sin\theta\right)\\
&= f_{xx}\cos^2\theta - f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta - \frac{f_x\cos\theta}{r} - \frac{f_y\sin\theta}{r}.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta} = f_{xx} + f_{yy}.$$

応用上は、 $\triangle f = f_{xx} + f_{yy}$ が先にあって、これを g とその偏導関数で表したいので、以下のようなのが良いかも。まず x, y についての 1 階偏導関数

$$f_x = g_r r_x + g_\theta\theta_x = g_r\cos\theta - g_\theta\frac{\sin\theta}{r},$$

$$f_y = g_r r_y + g_\theta\theta_y = g_r\sin\theta + g_\theta\frac{\cos\theta}{r}$$

から、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}f_x = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(g_r\cos\theta - g_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(g_r\cos\theta - g_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(g_r\cos\theta - g_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\\
&= \cos\theta\left(g_{rr}\cos\theta - g_{\theta r}\frac{\sin\theta}{r} - g_\theta\frac{-\sin\theta}{r^2}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\left(g_{r\theta}\cos\theta + f_r(-\sin\theta) - g_{\theta\theta}\frac{\sin\theta}{r} - g_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)\\
&= g_{rr}\cos^2\theta - \frac{2g_{r\theta}\cos\theta\sin\theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta}\sin^2\theta}{r^2} + \frac{g_r\sin^2\theta}{r} + \frac{2g_\theta\cos\theta\sin\theta}{r^2},
\end{aligned}$$

$$f_{yy} = g_{rr}\sin^2\theta + \frac{2g_{r\theta}\cos\theta\sin\theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta}\cos^2\theta}{r^2} + \frac{g_r\cos^2\theta}{r} - \frac{2g_\theta\cos\theta\sin\theta}{r^2}.$$

ゆえに

$$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}.$$

A　全微分係数の一意性

(これは時間を埋めるため)

f が a で全微分可能とは、

$$\exists A \in M(m, n; \mathbf{R}) \quad \text{s.t.} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0$$

が成り立つことである。さらに「この A を f の a における全微分係数と呼び、 $f'(a)$ と表す」と続くのだが、A の一意性が証明されないとまずい (複数あるものを、一つの記号で示すのはおかしい)。それはちょっとしたクイズ・レベルの問題だが (答は自力で解こうとした人にしか教えない)、少し後の「f が a で全微分可能ならば、f は a で偏微分可能で、$f'(a)=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$.」という定理の内容を先取りしても良い。つまり、次のようにする。

1. f が a で全微分可能ということを定義する。
2. f が a で全微分可能ならば、f は a ですべての変数 x_j について偏微分可能で、全微分可能性の定義に出て来る行列 A ($\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{\|h\|}=0$ を満たす行列 A) は、ヤコビ行列 $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ に等しい、という定理を述べる (証明は同じ！)。
3. f が a で全微分可能であるとき、$f'(a):=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ とおき、f の a における全微分係数と呼ぶ、と定義し、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{\|h\|}=0$ となることを注意しておく。

こうすると、「全微分可能性」と「全微分係数」の定義が離れるのがタマにキズ。