多変数の微分積分学1 第12回

桂田 祐史

2011年6月9日 (木)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

問7

問7 (0) 曲線 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},1\right)$ における接線を求めよ。(1) 曲線 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ の傾き -1 の接線を求めよ。(2) 曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}=1$ と平面 $x+y+z=k$ が接するような実数 k の値を求めよ。

(0) は例題扱いで解説した。これは高校数学でも解ける。実際、

$$y=\pm\sqrt{2\left(1-\frac{x^2}{3}\right)}$$

で、$(\sqrt{3/2},1)$ の近傍では、$+$ が採用されて、$y=\sqrt{2\left(1-\dfrac{x^2}{3}\right)}$ であるから…

(解答) $F(x,y):=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}$ とおくと、曲線の方程式は $F(x,y)=1.$ すなわち F のレベル 1 のレベルセットである。

$$\nabla F(x,y)=\begin{pmatrix}F_x(x,y)\\F_y(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2x}{3}\\y\end{pmatrix},\quad \nabla F\left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{2}}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\\1\end{pmatrix}.$$

$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)$ における接線は、この点を通り、$\nabla F\left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)$ を法線ベクトルに持つので、

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\left(x-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+1\cdot(y-1)=0.$$

整理して、

$$\sqrt{\frac{2}{3}}x+y-2=0.\blacksquare$$

合成関数の微分法

おしゃべり

一つの難所。簡単のような難しいような。

- 公式を覚えるのは、1 変数の場合の素直な拡張に見えて、簡単。
- 具体的な関数については簡単、というか、ひょっとして不要？使わずに解ける問題が実は多い。(要は偏微分を計算すれば良くて、多変数関数でも多項式などは、結局は 1 変数関数の問題になってしまう場合が多い。)
- 具体的な関数でない場合の公式にとても重要なものが多く、しかも計算が面倒というのが少なくない。

定理と証明

1 変数の場合

$y=f(x)$, $z=g(y)$ がいずれも微分可能であれば、合成関数 $z=g(f(x))$ も微分可能で、

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

つまり

$$(g\circ f)'(a)=g'(b)f'(a)\quad (\text{ただし } b=f(a))$$

である。

これは多変数の場合にも、自然に拡張できる。右辺をヤコビ行列の積とみなせばよい。

定理 0.1 (合成関数の微分法, chain rule (連鎖律)) Ω, D はそれぞれ $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ の開集合で、$a\in\Omega$, $f\colon\Omega\to\mathbf{R}^m$, $g\colon D\to\mathbf{R}^\ell$, $f(\Omega)\subset D$, $b=f(a)$, f は a で微分可能、g は b で微分可能ならば、$g\circ f$ は a で微分可能で、

$$(g\circ f)'(a)=g'(b)f'(a).$$

$y=f(x)$, $z=g(y)$ と書けば、上式の (i,j) 成分は

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^m\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\quad (1\le i\le\ell,\ 1\le j\le n).$$

証明の前に、1 次関数だったら当たり前、ということを見よう。$f(x)=Ax+b$, $g(y)=Cy+d$ とすると、

$$g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)=g(Ax+b)=C(Ax+b)+d=CAx+(Cb+d).$$

これから、

$$(g\circ f)'(x)=CA=g'(y)f'(x).$$

証明　f が a で全微分可能であるから、

(1) $$\varepsilon_1(x) := f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \quad (x \in \Omega)$$

とおくと

(2) $$\lim_{x\to a} \frac{\varepsilon_1(x)}{\|x-a\|} = 0.$$

また g が $b = f(a)$ で全微分可能であるから、

(3) $$\varepsilon_2(y) := g(y) - g(b) - g'(b)(y-b) \quad (y \in D)$$

とおくと

(4) $$\lim_{y\to b} \frac{\varepsilon_2(y)}{\|y-a\|} = 0.$$

(1) から

(5) $$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x).$$

$y = f(x)$ とするとき、(3) から ($b = f(a)$ に注意して)

$$(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a) = g(f(x)) - g(f(a)) = g'(b)(f(x) - f(a)) + \varepsilon_2(f(x)).$$

(5) を代入して

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a) &= g'(b)\left[f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)\right] + \varepsilon_2(f(x)) \\ &= g'(b)f'(a)(x-a) + g'(b)\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(f(x)).\end{aligned}$$

ゆえに

(6) $$\lim_{x\to a} \frac{g'(b)\varepsilon_1(x)}{\|x-a\|} = 0$$

と

(7) $$\lim_{x\to a} \frac{\varepsilon_2(f(x))}{\|x-a\|} = 0$$

を証明できれば、

$$\lim_{x\to a} \frac{g'(b)\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(f(x))}{\|x-a\|} = 0$$

となるので、$g\circ f$ が a で全微分可能で $(g\circ f)'(a) = g'(b)f'(a)$ であることが結論できる。

(6) については、(2) から

$$\left\|\frac{g'(b)\varepsilon_1(x)}{\|x-a\|}\right\| \le \|g'(b)\| \frac{\|\varepsilon_1(x)\|}{\|x-a\|} \to 0 \quad (x \to a)$$

が成り立つことから明らかである。

(7) を証明するために、補助関数 M を導入する。

$$M(y) := \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_2(y)}{\|y-b\|} & (y \in D \setminus \{b\}) \\ 0 & (y = b) \end{cases}$$

とおくと $M\colon D \to \mathbf{R}^m$ で、(4) から

$$\lim_{y \to b} M(y) = 0.$$

そして $\varepsilon_2(b) = 0$ に注意すれば

$$\varepsilon_2(y) = \|y-b\| \, M(y) \quad (y \in D).$$

特に $\varepsilon_2\left(f(x)\right) = \|f(x)-b\| \, M(f(x))$ である。さて、

$$f(x) - b = f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)$$

より

$$\|f(x)-b\| = \|f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x)\| \le \|f'(a)\| \, \|x-a\| + \|\varepsilon_1(x)\| \, .$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{\|\varepsilon_2(f(x))\|}{\|x-a\|} = \frac{\|f(x)-b\| \, \|M\left(f(x)\right)\|}{\|x-a\|} &\le \left(\|f'(a)\| + \frac{\|\varepsilon_1(x)\|}{\|x-a\|}\right) \|M(f(x))\| \\ &\to (\|f'(a)\| + 0) \cdot 0 = 0 \quad (x \to a). \end{aligned}$$

ゆえに (7) が示された。■

余談 0.1 高校数学の某教科書には、合成関数の微分法に次のような「証明」がついていた。

「証明」

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

z は y の関数として微分可能なので、連続であるから、$\Delta x \to 0$ のとき、$\Delta y \to 0$ である。
ゆえに

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

しかし $\Delta x \neq 0$ であっても $\Delta y \neq 0$ とは限らないので、

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

は一般に成り立つ式ではない。つまり上の「証明」には大穴がある。こういう杜撰なことを許

せば、上の定理の証明ももっと楽になる。つまり

$$\begin{aligned}
\frac{\|\varepsilon_2(f(x))\|}{\|x-a\|} &= \frac{\|\varepsilon_2(f(x))\|}{\|f(x)-f(a)\|}\cdot\frac{\|f(x)-f(a)\|}{\|x-a\|},\\
\frac{\|\varepsilon_2(f(x))\|}{\|f(x)-f(a)\|} &= \frac{\|\varepsilon_2(f(x))\|}{\|f(x)-b\|} \to \lim_{y\to b}\frac{\|\varepsilon_2(y)\|}{\|y-b\|} = 0 \quad (x\to a),\\
\frac{\|f(x)-f(a)\|}{\|x-a\|} &= \frac{\|f'(a)(x-a)+\varepsilon_1(x)\|}{\|x-a\|} \le \frac{\|f'(a)\|\,\|x-a\|+\|\varepsilon_1(x)\|}{\|x-a\|}\\
&\le \|f'(a)\| + \frac{\|\varepsilon_1(x)\|}{\|x-a\|} \to \|f'(a)\| \quad (x\to a)
\end{aligned}$$

から「すぐに」

$$\frac{\|\varepsilon_2(f(x))\|}{\|x-a\|} \to 0 \quad (x\to a)$$

が得られる。$x\neq a$ であっても $f(x)\neq f(a)$ とは限らないので (これが「$\Delta x\neq 0$ であっても $\Delta y\neq 0$ とは限らない」)、最初の式変形からして問題があるわけである。上の定理の証明は、補助関数 M の導入によって、その問題をていねいに回避したものであると言える。■

例 0.2 (chain rule の簡単な例) (1) $z=xy$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ とするとき、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt} = \psi(t)\varphi'(t)+\varphi(t)\psi'(t).$$

別解として

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\varphi(t)\psi(t)\right) = \varphi'(t)\psi(t)+\varphi(t)\psi'(t).$$

(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ とするとき、

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t)) = f_x x_t + f_y y_t = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'(t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\psi'(t) = \frac{\varphi(t)\varphi'(t)+\psi(t)\psi'(t)}{\sqrt{\varphi(t)^2+\psi(t)^2}}.$$

これも別解として

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t)) = \frac{d}{dt}\sqrt{\varphi(t)^2+\psi(t)^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\varphi(t)^2+\psi(t)^2\right)}{2\sqrt{\varphi(t)^2+\psi(t)^2}} = \frac{\varphi'(t)\varphi(t)+\psi'(t)\psi(t)}{\sqrt{\varphi(t)^2+\psi(t)^2}}.■$$