多変数の微分積分学1 第11回

桂田 祐史

2011年6月6日 (月)

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

問5

問5 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

で定めるとき、$f_{xy}(0,0)$ と $f_{yx}(0,0)$ を求めよ。

これは5月26日の Peano の例[1] の類題である (杉浦 [1] から持って来た)。

まず定義に従って計算して、

$$f_x(0,0)=0, \quad f_y(0,0)=0.$$

それから商の微分法によって

$$f_x(x,y)=\frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y)\neq(0,0)), \quad f_x(0,y)=0 \quad (y\neq 0).$$

(後者の $f_x(0,0)$ も定義に従って計算して構わない。)

同様に

$$f_y(x,y)=\frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad ((x,y)\neq(0,0)), \quad f_x(x,0)=x \quad (x\neq 0).$$

これから

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0, \quad f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.\blacksquare$$

微分の例

例 0.1 (1次関数の微分) $A=(a_{ij})\in M(m,n;\mathbf{R})$, $b=(b_i)\in\mathbf{R}^m$, $c\in\mathbf{R}$ とするとき、

$$f(x):=Ax+b \quad (x\in\mathbf{R}^n)$$

[1] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1/tahensuu1-2011-08/node4.html

により $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を定めると、f は $\mathbf{R}^n$ で全微分可能で、

$$f'(x) = A.$$

(証明 1) $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ とおくと、

$$f_i(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j + b_i.$$

ゆえに

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + b_i\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_j}x_k + \frac{\partial}{\partial x_j}b_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{jk} + 0 = a_{ij}.$$

ここで Kronecker のデルタ $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$ と、任意の数列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ について成り立つ公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_k\delta_{kj} = A_j$ を用いた。

$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ は定数関数であるから、$\mathbf{R}^n$ で連続である。ゆえに f は $\mathbf{R}^n$ で C^1 級であるから、全微分可能で、

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) = (a_{ij}) = A.$$

(証明 2) $\forall h \in \mathbf{R}^n$ に対して、$f(a+h) - f(a) = A(a+h) + b - (Aa+b) = Ah$ であるから、$h \neq 0$ のとき

$$\frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0.$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

もちろん、$A \in M(m,n;\mathbf{R})$. ゆえに f は a で全微分可能で、$f'(a) = A$. ■

もっと具体的な例。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7$, $y_2 = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8$ であるから、

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 2, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_3} = 3,$$
$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 4, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 5, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_3} = 6$$

であり、ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

例 0.2 (2 次関数の微分) n 変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する 2 次関数とは、

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^n b_ix_i + c \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

という式で表される関数だということには誰でも賛成してくれるであろう (ここで a_{ij}, b_i, $c \in \mathbf{R}$)。

$A := (a_{ij}) \in M(m,n;\mathbf{R})$, $b := (b_i) \in \mathbf{R}^m$, $x := (x_i) \in \mathbf{R}^n$ とおくと、

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x) + c.$$

実際、$\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ は Ax の第 i 成分であるから、$\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) x_i = (Ax, x)$.

このままでは、関数の表示に一意性がないためもあって、通常

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (\forall i, j)$$

を仮定する (つまり $3x_1x_2 + x_2x_1$, $x_1x_2 + 3x_2x_1$, $2x_1x_2 + 2x_1x_2$ のいずれも同じ関数を表すので、係数を等しく割り振った $2x_1x_2 + 2x_2x_1$ のみ使うことにする、ということである)。つまり行列 A に対称性を仮定する (線形代数で習う 2 次形式と同じ)。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}x_ix_k + \sum_{i=1}^n b_ix_i + c\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_j}(x_ix_k) + \sum_{i=1}^n b_i\frac{\partial}{\partial x_j}x_i + \frac{\partial}{\partial x_j}c \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}(\delta_{ji}x_k + x_i\delta_{jk}) + \sum_{i=1}^n b_i\delta_{ji} + 0 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n a_{ik}\delta_{ji}\right)x_k + \sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}\delta_{jk}\right)x_i\right) + b_j \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k + \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i\right) + b_j.
\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k$ は Ax の第 j 成分である。また対称性より $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i = \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i$ も Ax の第 j 成分である。ゆえに

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = Ax \text{ の第 } j \text{ 成分} + b_j = Ax + b \text{ の第 } j \text{ 成分}.$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = Ax + b.$$

ゆえに

$$\nabla f(x) = f'(x)^T = Ax + b.$$

偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ は $x_1, \ldots, x_n$ についての多項式関数なので、$\mathbf{R}^n$ で連続である。ゆえに f は $\mathbf{R}^n$ で C^1 であるので、全微分可能である。■

問 6 を出題

締切は 6 月 9 日。

問 6　次の関数の微分 f' を求めよ。(3) はヤコビアン $\det f'$ も求めよ。

(1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y^3 \\ x + y^4 \end{pmatrix}$　(2) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　(3) $f(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$.

(1) $m = 2$, $n = 2$ である。$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ とおく。つまり

$$f_1(x,y) := x^2y^3, \quad f_2(x,y) := x + y^4$$

とおくと、

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

(2) $m = 1$, $n = 3$ である。

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(3) $m = 3$, $n = 3$ である。$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$f'(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

■

参考文献

[1] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980).