多変数の微分積分学 1 第 10 回

桂田 祐史

2011 年 6 月 2 日 (木)

この授業用の WWW ページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

前回を振り返る

前回、多変数関数の全微分可能性、偏微分可能性、C^1 級等の条件の間の関係を調べた。ここで振り返ってみよう。

まず、1 変数関数の場合は非常に簡単である (要点は「微分可能ならば連続」くらいで、証明も高校数学)。

1 変数関数の場合

$$C^1\text{ 級} \quad\Longrightarrow\quad \text{微分可能} \quad\Longrightarrow\quad \text{連続}$$

(C^1 級とは、微分可能かつ導関数が連続なことであるから、左の $\Longrightarrow$ は明らかである。右の $\Longrightarrow$ は高校数学である。)

多変数関数の場合は、微分に (大きく分けて) 二つの概念があり、C^1 級の概念もやや覚えにくい (実際、勘違いして覚えている人がかなり多い)。

多変数関数の場合

$$\begin{array}{lllll} C^1\text{ 級} & \Longrightarrow & \text{微分可能} & \Longrightarrow & \text{連続} \\ & & & \searrow & \text{各変数につき偏微分可能} \end{array}$$

(C^1 級とは、各変数につき偏微分可能かつすべての 1 階偏導関数ともとの関数自身が連続ということである。一番左の $\Longrightarrow$ も明らかではない。右の $\Longrightarrow$ は 1 変数の場合と本質的に同じ。$\searrow$ は 1 変数関数にはなかったもので重要。)

ヤコビ行列、gradient

Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$a \in \Omega$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ が a で微分可能とするとき、$f'(a)$ は行列であった。具体的には、$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とおくとき、

$$f'(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

この行列を f の (a における) **Jacobi**(ヤコビ) **行列**と呼ぶ。

さて、$m = 1$ の場合を考えよう。このとき、

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

と、ヤコビ行列は 1 行 n 列の行列、すなわち n 次元横ベクトルになる。この転置である n 次元縦ベクトルを $\operatorname{grad} f(a)$ または $\nabla f(a)$ で表し、f の (a における) **gradient** (**勾配ベクトル**) と呼ぶ:

$$\operatorname{grad} f(a) = \nabla f(a) := f'(a)^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

記号 ∇ は単独でも **nabla**(ナブラ) と呼ばれ、

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

という意味で用いられる。いわゆる**ベクトル解析**では多用される。

微分の意味

線形化写像は元の関数を近似する

まず「全微分」の定義を復習しよう。f が a で全微分可能であるとは、

$$\exists A \in M(m, n; \mathbf{R}) \quad \text{s.t.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - Ah \|}{\|h\|} = 0$$

が成り立つことをいい ($\| \|$ はあってもなくても同じ, また Ah は行列 A とベクトル h の積を意味していることに注意する)、一意的に定まる行列 A のことを f の a における全微分係数と呼び、$f'(a)$ で表す。

これから、f が a で全微分可能ならば

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{\|h\|}=0$$

が成り立つ。$h\to 0$ のとき、分母は 0 に収束するので、分子はそれよりも速く 0 に収束する、ということである。このことを

$$f(a+h)-f(a)-f'(a)h=o\left(\|h\|\right)\quad (h\to 0)$$

と書く。

不正確な書き方になるが[1]、$\|h\|$ が十分小さいとき、

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h$$

が成り立つ。言い方を変えると、x が a に十分近いとき、

$$f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$$

が成り立つ。この右辺の式で表される写像、すなわち

$$\Omega\ni x\mapsto f(a)+f'(a)(x-a)\in \mathbf{R}^m$$

を f の (a における) **線形化写像** (**1 次近似**) と呼ぶ (これはちゃんとした定義である)。

$\operatorname{grad} F$ はレベルセットの法線ベクトル

以下、Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon\Omega\to\mathbf{R}$ は C^1 級とする。$c\in\mathbf{R}$ に対して、

$$L_c:=\{x\in\Omega; F(x)=c\}$$

とおき、F のレベル c の**レベル・セット**と呼ぶ。

$L_c=\emptyset$ となることもありうるが、$a\in\Omega$ のとき、$c:=F(a)$ とおくと、$a\in L_c$ が成り立つので、$L_c\neq\emptyset$ である。

例 0.1 $\Omega=\mathbf{R}^2$, $F(x,y):=x^2+y^2$ とするとき、F_1 は原点中心半径 1 の円周, F_2 は原点中心半径 $\sqrt{2}$ の円周, F_0 は原点 1 点からなる集合 $\{(0,0)\}$, $F_{-1}=\emptyset$. ■

例 0.2 Ω をある地図、$(x,y)\in\Omega$ に対して、$F(x,y)$ は (x,y) という地点の標高とするとき、L_c は高さ c の**等高線** (**contour**) である。 ■

[1] $\fallingdotseq$ というのは、数学語ではない。

実は、$\nabla F(a)$ **は、L_c の点 a における法線ベクトル**と呼ぶにふさわしいものである。実際、

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)-F'(a)(x-a)}{\|x-a\|}=0$$

が成り立つが、$c:=F(a)$ とするとき、$\forall x\in L_c$ に対して $F(x)=c$ であることと、$F'(a)(x-a)=(\nabla F(a),x-a)$ であることから、

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F(a)-F'(a)(x-a)}{\|x-a\|}&=\frac{c-c-(\nabla F(a),x-a)}{\|x-a\|}=-\frac{(\nabla F(a),x-a)}{\|x-a\|}\\&=-\left(\nabla F(a),\frac{x-a}{\|x-a\|}\right)\end{aligned}$$

となるので、

$$\lim_{\substack{x\in L_c\\x\to a}}\left(\nabla F(a),\frac{x-a}{\|x-a\|}\right)=0.$$

(このあたりの議論は「考察」であり、「証明」ではない。盲目的に信じ込まれても困るので、少し疵を指摘しておくと、L_c がどういう集合であるか、一般には良く分からない。そもそも L_c をたどって、a に近づくことが出来るのかも分からない。後で「陰関数定理」という定理を学ぶとこのあたりが解決される。)

$\nabla F(a)\neq 0$, $x\neq a$ であるとき、$\nabla F(a)$ と $x-a$ のなす角 $\theta(x)\in[0,\pi]$ が

$$(\nabla F(a),x-a)=\|\nabla F(a)\|\ \|x-a\|\cos\theta(x)$$

により定義できる。このとき

$$\lim_{\substack{x\in L_c\\x\to a}}\cos\theta(x)=0$$

であるから

$$(\angle R)\qquad \lim_{\substack{x\in L_c\\x\to a}}\theta(x)=\frac{\pi}{2}.$$

(注意: $x\to a$ のとき $\dfrac{x-a}{\|x-a\|}$ 自身が何かあるベクトルに収束するというわけではなく、収束が保証出来るのは角度だけである。)

以上の考察を背景に、次のように定義する。

定義 0.3 Ω が $\mathbf{R}^n$ の開集合、$F\colon\Omega\to\mathbf{R}$ が C^1 級の開集合、$a\in\Omega$, $\nabla F(a)\neq 0$ とする。このとき、

$$\{x\in\mathbf{R}^n;(\nabla F(a),x-a)=0\}$$

を、L_c の a における**接超平面**, $\nabla F(a)$ を L_c の a における**法線ベクトル**と呼ぶ。

現時点で $(\angle R)$ は、根拠にあいまいなところがあるので、「∇F が法線ベクトル」というのは**定義したこと**である。この点、何かずるいと感じられるかも知れないが[2]、後で陰関数定理を学ぶと、$(\angle R)$ が根拠を持った主張として浮上して来る。

[2] この辺の事情は、曲線の弧長の定義のそれと少し似ている。

例 0.4 $A, B \in \mathbf{R}^2$, $(A, B) \neq (0, 0)$ とするとき、

$$F(x, y) := Ax + By$$

は C^∞ 級の $F \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を定める。$\forall x \in \mathbf{R}$ に対して、F の高さ c のレベルセット

$$L_c = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; F(x, y) = c\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; Ax + By = c\right\}$$

はベクトル $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ に垂直な直線である、ということは良く知られている。$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ であり、確かに ∇F は L_c の法線ベクトルである。■

例 0.5 $F(x, y) := x^2 + y^2$ とすると、$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$. $R > 0$ とするとき、$L_{R^2} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; F(x, y) = R^2\}$ は、原点中心、半径 R の円周である。$(a, b) \in L_{R^2}$ とするとき、

$$\nabla F(a, b) = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$$

であるが、これは確かに (a, b) における法線ベクトルである (円周上の点 (a, b) を通る円の半径は、円の接線と直交するので、円の中心から (a, b) に向うベクトル $\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$ は L_c の法線ベクトルである)。■

$\operatorname{grad} F$ は F の値が最も急激に増加する方向である

Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$F \colon \Omega \to \mathbf{R}$ は C^1 級、$a \in \Omega$, $\nabla F(a) \neq 0$ とする。十分小さい h

$$F(a + h) - F(a) = F'(a)h + o\left(\|h\|\right) \quad (h \to 0)$$

であるから、$\|h\|$ が十分に小さいとき、

$$(\sharp) \qquad F(a + h) - F(a) \fallingdotseq F'(a)h = (\nabla F(a), h) = \|\nabla F(a)\| \; \|h\| \cos\theta(h).$$

ここで $\theta(h) \in [0, \pi]$ は $\nabla F(a)$ と h のなす角である。

$\|h\|$ を固定して、h の方向だけを動かしたとき、式 $(\sharp)$ の右辺は、$\theta(h) = 0$ $(\cos\theta(h) = 1)$ のとき最大となり、$\theta(h) = \pi$ $(\cos\theta(h) = -1)$ のとき最小となる。