多変数の微分積分学 1 第 6 回

桂田 祐史

2011 年 5 月 19 日

この授業用の WWW ページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

微分についてのイントロ

多変数になると変数の増分 h がベクトルになるので、1 変数の場合の微分係数の定義

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

は (ナンセンスな式になってしまうので) そのままの形では使えない。

多変数関数については、2 つの微分がある。

(1) 全微分 $f'(a)$

(2) 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

1 変数関数の微分 $f'(a)$ と良く対応するのは、全微分の方である (だから同じ記号を使うことにしたし、最近は「全微分」と言わずに単に「微分」と呼ぶ人も増えている[1])。例えば、1 変数実数値関数 f のグラフ $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ であるが、多変数実数値関数 f のグラフ $z = f(\vec{x})$ 上の点 $(\vec{a}, f(\vec{a}))$ における接平面の方程式は $z = f'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + f(\vec{a})$ である。形式上はまったく違いがなく、覚える苦労がない。

なお、f がベクトル値 $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ である場合、

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \end{pmatrix}$$

[1] 数学の本に書かれている内容はすぐには変化せず、微分積分については、30〜40 年前に書かれた教科書が現在も十分現役として使うことが出来る。しかし、全微分を単に「微分」と呼んだり、それを $f'(a)$ という記号で表す習慣は、比較的新しいと思われる。古い本には見られない。

となるのは、これまでと同様である。

全微分と偏微分の関係はある意味簡単で、

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right).$$

偏微分

数学のテキスト、講義では定義から始めるのが普通だが、まずは実例を見せよう。

例 0.1 実定数 a, b, c, d, p, q, r に対して、

$$f(x,y) := ax^2 + bxy + cy^2 + px + qy + r \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2)$$

とおいて $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を定めるとき、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + by + p.$$

x で偏微分するときは、他の変数 (ここでは y) を定数と見なして微分する。以下、同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y} = bx + 2cy + q.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2a,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = b,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = b,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2c.$$

定義 0.2 (1 点における偏微分係数) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \Omega$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ とする。f が点 a で変数 x_j について偏微分可能であるとは、極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}$$

が存在することをいう。ここで e_j は、第 j 成分が 1 で、それ以外の成分がすべて 0 であるような、$\mathbf{R}^n$ のベクトルである。このとき、この極限値 $(\in \mathbf{R}^m)$ を f の点 a での変数 x_j についての偏微分係数と呼び、

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f(a), \quad f_{x_j}(a)$$

などの記号で表す。

ベクトル記法を使わずに、成分を用いて表すと

$$\frac{f(a + he_j) - f(a)}{h} = \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{h}$$

である。

記号 ∂ は、多変数関数の 1 つの変数に関する微分 (偏微分) であることを強調するためのもので、partial 'd', round 'd', または単に 'd' と読まれる (Jacobi に始まるものだそうである)。

偏導関数、高階微分、C^k 級 $(0 \le k \le \infty)$ について述べる。

定義 0.3 (偏導関数、高階微分、C^k 級) Ω は $\mathbf{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ とする。

(1) $j \in \{1, \ldots, n\}$ とする。f が Ω で x_j について**偏微分可能**であるとは、$\forall x \in \Omega$ に対して、f は x で変数 x_j について偏微分可能であることをいう。このとき、写像

$$\Omega \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbf{R}^m$$

を f の変数 x_j に関する**偏導関数**と呼び、

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} f, \quad f_{x_j}$$

などの記号で表す。

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ を f の **1 階偏導関数**と呼ぶ。

(3) $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ とする。f が Ω で変数 x_j について偏微分可能で、偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$

が Ω で変数 x_i について偏微分可能であるとき、$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ を

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad f_{x_j x_i}$$

などの記号で表す。$i = j$ である場合、つまり $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}$ を $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ とも書く。

(4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ を f の **2 階偏導関数**と呼ぶ。

(5) 同様に任意の k ($k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$) に対して、f の ***k* 階偏導関数**が定義される。

(6) $k \in \mathbf{N}$ とする。f が Ω で C^k **級**であるとは、f が Ω で k 階以下のすべての偏導関数を持ち、それらすべてと f 自身が Ω で連続であることをいう。

(7) f が Ω で C^∞ **級**であるとは、$\forall k \in \mathbf{N}$ に対して、f が Ω で C^k 級であることをいう。

(8) f が Ω で C^0 **級**であるとは、f が Ω で連続であることをいう。f 自身を f の 0 階偏導関数ともいう。

注意 0.4 (C^k 級の定義) 実は f が C^k 級であるためには、

($\heartsuit$) f が k 階までのすべての偏導関数を持ち、それら k 階の偏導関数がすべて連続

であれば十分である (後述の「C^1 級 $\Longrightarrow$ 全微分可能」の証明を精査すれば分かる)。すなわち、$k-1$ 以下の階数の偏導関数 (f 自身を含む) の連続性は、f の k 階偏導関数の連続性から導かれる。従って、C^k 級の定義を条件 ($\heartsuit$) が成り立つこととするのも可能であるが、世の中の多くのテキストはそうなっていない。この講義は、この定義については保守的な立場を取る (右へならえする) ことにする。■

注意 0.5 (定義域が開集合である理由) 定義域を開集合としてあるので、$\forall a \in \Omega$ に対して、$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(a; \varepsilon) \subset \Omega$ となるので、$|h| < \varepsilon$ なる任意の h に対して $a + h e_j \in \Omega$ が保証される。この保証がないと議論が著しく面倒になる。

開集合でない Ω で定義された関数が微分可能とは、Ω を含む開集合 $\widetilde{\Omega}$ が存在して、f が $\widetilde{\Omega}$ 上で微分可能な関数 $\widetilde{f}$ に拡張可能なことと定義する場合が多い。■

演習問題

前回の講義に対応するもの。本当は「問 3」であるべきが、番号を間違えてしまった。

問 4 $\mathbf{R}^2$ における次の各集合について、(a) 図示できる場合は図示せよ, (b) 開集合である場合は証明せよ, (c) 閉集合である場合は証明せよ[2]。

(1) $\emptyset$　(2) $\mathbf{R}^2$　(3) $\{(0,0)\}$　(4) $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in \mathbf{R}^2$ とするとき、$\{\vec{x}_i; 1 \leq i \leq n\}$

[2]開集合、または閉集合である場合、5 月 16 日の講義で説明したやり方を使って証明できる。そうでない場合はその証明をするため、定義に戻ったりする必要があるが、それは今回要求しない (例年は要求している)。

(5) $(0,1)\times(2,3)$ (6) $[0,1]\times(2,3)$ (7) $[0,1]\times[2,3]$ (8) $\{(x,y); 1<x^2+y^2<4\}$
(9) $(0,\infty)\times(0,\infty)$ (10) $\{(x,y); x^3\le y\le x^2\}$ (11) $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

何を使って良いか。

命題 0.6 $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ が連続であれば、

$$A_1=\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)>a\},$$

$$A_2=\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)<b\},$$

$$A_3=\{x\in\mathbf{R}^n; a<f(x)<b\},$$

$$A_4=\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)\ne c\}$$

の形の集合はいずれも $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

命題 0.7 $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ が連続であれば、

$$A_1=\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)\ge a\},$$

$$A_2=\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)\le b\},$$

$$A_3=\{x\in\mathbf{R}^n; a\le f(x)\le b\},$$

$$A_4=\{x\in\mathbf{R}^n; f(x)=c\}$$

の形の集合はいずれも $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。

命題 0.8 (1) $\emptyset$ と $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(2) U_λ $(\lambda\in\Lambda)$ がすべて $\mathbf{R}^n$ の開集合であれば、$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(3) U_1 と U_2 が $\mathbf{R}^n$ の開集合であれば、$U_1\cap U_2$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

命題 0.9 (1) $\emptyset$ と $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。

(2) F_λ $(\lambda\in\Lambda)$ がすべて $\mathbf{R}^n$ の閉集合であれば、$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。

(3) F_1 と F_2 が $\mathbf{R}^n$ の閉集合であれば、$F_1\cap F_2$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。

例 0.10 (再登場)

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x>0,\ y>0\right\}$$

は、多項式関数 $f\colon \mathbf{R}^2\ni(x,y)\mapsto x\in\mathbf{R}$, $g\colon \mathbf{R}^2\ni(x,y)\mapsto y\in\mathbf{R}$ を用いて、

$$A=U_1\cap U_2,\quad U_1:=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; f(x,y)>0\right\},\quad U_2:=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)>0\right\}$$

と表されるので、$\mathbf{R}^n$ の開集合である。(多項式関数は連続なので、命題 0.6 によって、U_1 と U_2 はともに $\mathbf{R}^n$ の開集合である。命題 0.8 によって、それらの共通部分 $U_1 \cap U_2$ も $\mathbf{R}^n$ の開集合である。) ■