多変数の微分積分学1 第5回

桂田 祐史

2011年5月16日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

(書きかけです。)

問2(5/12宿題) 解説

問2 次の各関数が $\mathbf{R}^2$ で連続であることを示せ (理由を述べよ)。
(1) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6$ (2) $g(x,y) = \exp(3x + 2y + 1)$
(3) $h(x,y) = \dfrac{2x+1}{x^2+y^2+1}$ (4) $\varphi(x,y) = \log\left(1 + \sqrt{x^2+y^2}\right)$ (5) $\psi(x,y) = \sqrt[3]{x}$
(6) $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix}$

どういうことを使って良いか、前回解説してある。

(1) f は多項式関数なので $\mathbf{R}^2$ 全体で連続である。

(2) $F\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 3x + 2y + 1 \in \mathbf{R}$ は多項式関数なので、$\mathbf{R}^2$ 全体で連続である。また $G\colon \mathbf{R} \ni z \mapsto \exp z \in \mathbf{R}$ は連続である。ゆえにそれらの合成である $g = G \circ F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。

(3) $Q\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 2x + 1 \in \mathbf{R}$, $P\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + 1 \in \mathbf{R}$ はともに多項式関数だから連続である。また $P(x,y) \geq 1$ であるから、$P \neq 0$. ゆえに $h = \dfrac{Q}{P}\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ は連続である。

(4) $F\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbf{R}$ は多項式関数だから連続であり、$F(\mathbf{R}^2) = [0,\infty)$. また $G\colon [0,\infty) \ni z \mapsto \sqrt{z} \in \mathbf{R}$ は連続である。ゆえに合成関数 $G \circ F\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbf{R}$ は連続である。また $H\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 1 \in \mathbf{R}$ は定数関数だから連続である。ゆえに $f := H + G \circ F\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 1 + \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbf{R}$ は連続である。そして $f(\mathbf{R}^2) = [1,\infty)$. 対数関数 $g\colon (0,\infty) \ni z \mapsto \log z \in \mathbf{R}$ は連続である。$f(\mathbf{R}^2) \subset (0,\infty)$ であるから、g と f は合成可能で、$\varphi = g \circ f\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \log(1 + \sqrt{x^2+y^2}) \in \mathbf{R}$ は連続である

(5) $f\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x \in \mathbf{R}$ は多項式関数だから連続である。$g\colon \mathbf{R} \ni z \mapsto \sqrt[3]{z} \in \mathbf{R}$ は連続である。ゆえに合成関数 $\psi = g \circ f\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \sqrt[3]{x} \in \mathbf{R}$ は連続である。

(6) $F_1\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^3 - 3xy^2 \in \mathbf{R}$ と $F_2\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 3x^2y - y^3 \in \mathbf{R}$ はともに多項式関数だから連続である。ゆえに $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ は連続である。■

開集合、閉集合の判定 (続き)

命題 0.1 (とても便利: 連続関数による逆像の開集合、閉集合の判定) $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が連続関数、$a, b, c \in \mathbf{R}$ とするとき、以下が成立する。

(1) $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; a < f(x) < b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(2) $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \geq a\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \leq b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; a \leq f(x) \leq b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = c\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。

証明

(1) $A := \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$ とする。$x \in A$ とすると、$f(x) > a$. $\varepsilon := f(x) - a$ とおくと、$\varepsilon > 0$. f は x で連続だから、

$$\exists \delta > 0 \quad (\forall y \in \mathbf{R}^n; \|y - x\| < \delta) \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

ゆえに $\forall y \in B(x;\delta)$ に対して、$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ であるから、$-\varepsilon < f(y) - f(x) < \varepsilon$. ゆえに $f(y) > f(x) - \varepsilon = f(x) - (f(x) - a) = a$. ゆえに $y \in A$. これは $B(x;\delta) \subset A$ を意味している。ゆえに A は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\}$ も同様に証明できる。あるいは $F(x) := b - f(x)$ とおくと、$\{x \in \mathbf{R}^n; F(x) > 0\}$ であることから。

$\{x \in \mathbf{R}^n; a < f(x) < b\}$ と $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\}$ については、

$$\{x \in \mathbf{R}^n; a < f(x) < b\} = \{x \in \mathbf{R}^n; f(a) > a\} \cap \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\},$$
$$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\} = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < c\} \cup \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > c\}$$

と、次の命題 0.2 の (iii), (ii) による。

(2) $A := \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \geq a\}$ とするとき、

$$A^c = \mathbf{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < a\}$$

は、(1) の 2 番目より $\mathbf{R}^n$ の開集合である。ゆえに A は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。$\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \leq b\}$ が閉集合であることも同様に証明できる。また $\{x \in \mathbf{R}^n; a \leq f(x) \leq b\}$ については、

$$\{x \in \mathbf{R}^n; a \leq f(x) \leq b\} = \{x \in \mathbf{R}^n; f(a) \geq a\} \cap \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \leq b\}$$

と、二つの閉集合の共通部分になっているから、次の系 0.3 の (ii) により、閉集合である。
$B := \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = c\}$ の補集合

$$B^c = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = c\}^c = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\}$$

は、(1) より $\mathbf{R}^n$ の開集合であるから、B は閉集合である。 ■

次の命題は既に習ったはずである (「集合・距離・位相１」でも出て来るはず)。

命題 0.2 (開集合系の公理) (i) $\emptyset$, $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。(ii) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ において、$\forall\lambda \in \Lambda$ U_λ が $\mathbf{R}^n$ の開集合ならば、$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。(iii) U_1, U_2 は $\mathbf{R}^n$ の開集合ならば、$U_1 \cap U_2$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

証明 念のため、(iii) だけでも証明しておく。$x \in U_1 \cap U_2$ とすると、$x \in U_1$ で、U_1 は開集合だから、$\exists\varepsilon_1 > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon_1) \subset U_1$. 同様に $\exists\varepsilon_2 > 0$ s.t. $B(x;\varepsilon_2) \subset U_2$. $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ で、

$$B(x;\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_1) \subset U_1, \quad B(x;\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_2) \subset U_2$$

であるから、$B(x;\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$. ゆえに $U_1 \cap U_2$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。 ■

系 0.3 (閉集合系の公理) (1) $\emptyset$, $\mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。(2) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ において、$\forall\lambda \in \Lambda$ U_λ が $\mathbf{R}^n$ の閉集合ならば、$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。(3) U_1, U_2 は $\mathbf{R}^n$ の閉集合ならば、$U_1 \cup U_2$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。

連続関数の重要な性質

次の 3 つの定理は重要である。

(a) 中間値の定理

(b) 「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合 K 上の実数値連続関数 $f\colon K \to \mathbf{R}$ は、必ず最大値を持つ」 (Weierstrass,)

(c) 「$\mathbf{R}^n$ の有界閉集合 K 上の連続関数 $f\colon K \to \mathbf{R}^m$ は、K で一様連続である」(Weierstrass,)

(c) は積分論で重要な役割を果たすが、この『多変数の微分積分学１』では必要ないので省略する。

(b) は重要であるが、『数学演習２』でも学んだはずだし ($\mathbf{R}^2$ での話だったかもしれないが、$\mathbf{R}^n$ でも同様である)、とりあえず証明は省略する。

(a) は簡単であるので、ここで紹介して証明する。

中間値の定理

1 変数の中間値の定理とは、「$f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ が連続で、k が $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数であるとき (つまり $f(a) < k < f(b)$ または $f(a) > k > f(b)$)、$f(c) = k$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する」という定理である。

多変数関数では、区間 $[a,b]$ をどのように一般化するかが問題である。

定義 0.4 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ とするとき、Ω が**連結** (connected) であるとは、Ω 内の任意の 2 点 x, y に対して、Ω 内の連続曲線で x と y を結ぶものが存在する、すなわち

$$\forall x, y \in \Omega \quad \exists \varphi\colon [0,1] \to \Omega \text{ 連続 s.t. } \varphi(0) = x \text{ かつ } \varphi(1) = y$$

が成り立つことをいう。

(すみません。くたびれたので今日はこの辺で中断します。)