多変数の微分積分学1 第4回

桂田 祐史

2011年5月12日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

問1(5/5宿題) 解説

問1 I を $\mathbf{R}$ の区間、$\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^n$, $\vec{g}\colon I \to \mathbf{R}^n$ とする。
(1) $\vec{f}$ と $\vec{g}$ がともに微分可能であるならば

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right) = \left(\vec{f}\,'(t), \vec{g}(t)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}\,'(t)\right) \quad (t \in I)$$

が成り立つことを示せ。
(2) 質点が等速運動するならば (つまり時刻 t における位置を $\vec{f}(t)$ と表すとき、$\left\|\vec{f}\,'(t)\right\|$ が定数関数となる)、速度と加速度はつねに直交することを示せ。

(1) $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} := \vec{f}$, $\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} := \vec{g}$ とするとき、

$$\left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) g_j(t)$$

であるから、(1変数実数値関数の) 積の微分法を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right) &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} f_j(t) g_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(f_j(t) g_j(t)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(f_j'(t) g_j(t) + f_j(t) g_j'(t)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_j'(t) g_j(t) + \sum_{j=1}^{n} f_j(t) g_j'(t) = \left(\vec{f}\,'(t), \vec{g}(t)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}\,'(t)\right).\end{aligned}$$

(2) 仮定から、$\exists C \in \mathbf{R}$ s.t. $\forall \in I$ $\left\|\vec{f}'(t)\right\| = C$. ゆえに

$$\left(\vec{f}'(t), \vec{f}'(t)\right) = \left\|\vec{f}'(t)\right\|^2 = C^2.$$

両辺を t で微分すると、(1) を用いて

$$\left(\vec{f}''(t), \vec{f}'(t)\right) + \left(\vec{f}'(t), \vec{f}''(t)\right) = 0.$$

左辺は $2\left(\vec{f}''(t), \vec{f}'(t)\right)$ であるから、

$$\left(\vec{f}''(t), \vec{f}'(t)\right) = 0.$$

これは $\vec{f}''(t)$ と $\vec{f}'(t)$ が直交することを示す。■

(1) の別解　積の微分法の証明を思い出して、それをベクトル値関数化する (この方法は無限次元でも通用する)。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left[\left(\vec{f}(t+h), \vec{g}(t+h)\right) - \left(\vec{f}(t), \vec{g}(t)\right)\right] - \left[\left(\vec{f}'(t), \vec{g}(t)\right) + \left(\vec{f}(t), \vec{g}'(t)\right)\right] \\
&\quad = \left(\frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} - \vec{f}'(t), \vec{g}(t+h)\right) + \left(\vec{f}'(t), \vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)\right) \\
&\quad + \left(\vec{f}(t), \frac{\vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)}{h} - \vec{g}'(t)\right)
\end{aligned}$$

であるから、絶対値を取って、Schwarz の不等式を使って評価すれば良い。$\vec{g}$ が微分可能であるから、連続であって、$h \to 0$ のとき $\|\vec{g}(t+h)\| \to \|\vec{g}(t)\|$, $\|\vec{g}(t+h) - \vec{g}(t)\| \to 0$ となることに注意。

やり残し

次の命題とその系は明らかだろう。

命題 0.1 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbf{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega}$, $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$ とするとき、

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_i(\vec{x}) = A_i.$$

証明　$|f_i(\vec{x}) - A_i| \le \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{A}\right\| \le \sum_{j=1}^{m} |f_j(\vec{x}) - A_j|$ による。■

系 0.2 $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ が連続 $\Longleftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, m\}$ f_i が連続。

本日の演習

前回の例とほぼ同じ次の問を解いてもらう。

宿題、授業内演習、小テストの得点の比は 1 : 1 : 2

問 2 次の各関数が $\mathbf{R}^2$ で連続であることを示せ (理由を述べよ)。

(1) $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6$ (2) $g(x,y)=\exp(3x+2y+1)$

(3) $h(x,y)=\dfrac{2x+1}{x^2+y^2+1}$ (4) $\varphi(x,y)=\log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ (5) $\psi(x,y)=\sqrt[3]{x}$

(6) $F(x,y)=\begin{pmatrix}x^3-3xy^2\\3x^2y-y^3\end{pmatrix}$

解説 連続関数を "組み立てたもの" は連続関数 (実は微分可能な関数を組み立てたものは微分可能な関数、のように他での「応用」がある考え方)

- (任意の実係数多項式は連続関数を定める) $f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}[x_1,\dots,x_n]$ ならば、$\mathbf{R}^n\ni(x_1,\dots,x_n)\mapsto f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}$ は連続。
- 指数関数、対数関数、三角関数、冪乗関数 $x\mapsto x^\alpha$, n 乗根 $\sqrt[n]{x}$ は、それらの定義域上で連続
- $f\colon\Omega\to\mathbf{R}$, $g\colon\Omega\to\mathbf{R}$ がともに連続ならば、$f+g$, $f-g$, fg はいずれも Ω から $\mathbf{R}$ への連続関数。$g\neq 0$ (on Ω) ならば f/g も Ω から $\mathbf{R}$ への連続関数。
- 連続関数の合成関数は連続関数。
- $f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_m\end{pmatrix}$ について、f が連続 $\iff$ すべての $i\in\{1,\dots,m\}$ について f_i が連続。

それから…

不定形の極限が大事であるが、それはまた来週にまわす。

これまでベクトルは $\vec{x}$ のように矢印 $\vec{}$ をつけてきた。$\boldsymbol{x}$ のように太字で表す、という流儀もある。これからは少しサボって、単に x のように書くことにする。(ベクトルとその成分を混同して欲しくないときは、また $\vec{}$ をつけるかも知れない。)

開集合、閉集合復習

定義 0.3 (開球、閉球) $a \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$ に対して、

$$B(a;r) := \{x \in \mathbf{R}^n; \|x-a\| < r\}$$

を a 中心、半径 r の開球とよぶ。

$$\overline{B}(a;r) := \{x \in \mathbf{R}^n; \|x-a\| \leq r\}$$

を a 中心、半径 r の閉球とよぶ。

$n=1$ のとき、$B(a;r)=(a-r,a+r)$, $\overline{B}(a;r)=[a-r,a+r]$.

定義 0.4 (開集合, 閉集合) $A \subset \mathbf{R}^n$ とする。

(i) A が $\mathbf{R}^n$ の開集合であるとは、

$$\forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(x;\varepsilon) \subset A$$

が成り立つことをいう

(ii) A が $\mathbf{R}^n$ の閉集合であるとは、$A^c := \mathbf{R}^n \setminus A$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合であることをいう。

次の命題は便利である。

命題 0.5 (とても便利: 連続関数による逆像の開集合、閉集合の判定) $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ が連続関数、$a,b,c \in \mathbf{R}$ とするとき、以下が成立する。

(1) $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) > a\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; a < f(x) < b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \neq c\}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(2) $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \geq a\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \leq b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; a \leq f(x) \leq b\}$, $\{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = c\}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。

この命題の証明は次回にまわす。これを使って次の有名かつ重要な命題を証明する。

命題 0.6 (1) $\mathbf{R}^n$ の開球は開集合である。(2) $\mathbf{R}^n$ の閉球は閉集合である。

証明

(1) $a \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$ とするとき、

$$B(a;r) = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x-a\| < r\}$$

は、$f\colon \mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \|x-a\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^n (x_j-a_j)^2 \in \mathbf{R}$ (これは多項式関数だから連続) を用いて、

$$B(a;r) = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < r^2\}$$

と表されるので、開球 $B(a;r)$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合である。

(2) 同様に
$$\overline{B}(a;r) = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x-a\| \le r\} = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) \le r^2\}$$
であるから、閉球 $B(a;r)$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である。 ■

メモ

- $\exp x$ は何かと尋ねられた。指数関数 (exponential function) e^x のことである。a^b の b は指数 (exponent) と呼ばれる。
$$\exp\frac{-(x^2+y^2+z^2)}{4t}$$
のような式を $e^{-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$ や $e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$ のように書くのは見づらい。
- ギリシャ文字の ψ を指して「これはなんですか？」プサイまたはプシィと読みます (ローマ字表記は psi)。