多変数の微分積分学1 第3回

桂田 祐史

2011年5月9日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

前回は、多変数関数の極限の定義を述べた。

復習: 多変数関数の極限

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\vec f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$, $\vec a \in \overline{\Omega}$, $\vec A \in \mathbf{R}^m$ とするとき、

$$\lim_{\vec x \to \vec a} \vec f(\vec x) = \vec A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{\vec x \to \vec a} \left\| \vec f(\vec x) - \vec A \right\| = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\forall \vec x \in \Omega : \|\vec x - \vec a\| < \delta) \quad \left\| \vec f(\vec x) - \vec A \right\| < \varepsilon$$

注意 0.1 (細かい定義の違い) 多くの本で $(\forall \vec x \in \Omega : 0 < \|\vec x - \vec a\| < \delta)$ としている。上の定義は、私 (桂田) だけが採用しているのではなくて、定評のある

杉浦光夫, 解析入門I, 東京大学出版会 (1980)

でも採用されている (第I章 §6)。

$0 < \|\vec x - \vec a\| < \delta$ とする理由は、もともとは、微分の定義

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

等において、右辺の分数式の分母を 0 にしないためと思われるが、我々の流儀では、$\vec x \in \Omega$ としているので、$x = a$ は定義域に属さないと考えて除くことが出来ている (ゆえに問題はない)。結局のところ、二つの流儀にはほとんど差がない。気になる人は杉浦『解析入門I』を読んで下さい。 ■

定義 0.2 (多変数関数の連続性) $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\vec f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ とする。

(i) $\vec a \in \Omega$ において、$\vec f$ が連続であるとは、

$$\lim_{\vec x \to \vec a} \vec f(\vec x) = \vec f(\vec a)$$

が成り立つことをいう。

(ii) $\vec f$ が Ω で連続であるとは、$\forall \vec x \in \Omega$ で $\vec f$ が連続であることをいう。

例 0.3 (定数関数は連続) $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $\vec c\in\mathbf{R}^m$ とするとき、

$$\vec f(\vec x):=\vec c\quad(\vec x\in\Omega)$$

で定義される $\vec f\colon\Omega\to\mathbf{R}^m$ は、Ω で連続である。実際、$\forall\vec a\in\Omega$, $\forall\varepsilon>0$ に対して、$\delta:=1$ とすると、$\delta>0$ で、$(\forall\vec x\in\Omega\colon\ \|\vec x-\vec a\|<\delta)$

$$\left\|\vec f(\vec x)-\vec f(\vec a)\right\|=\|\vec c-\vec c\|=\left\|\vec 0\right\|=0<\varepsilon$$

が成り立つ。■

命題 0.4 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $\vec a\in\overline{\Omega}$, $\vec f\colon\Omega\to\mathbf{R}^m$, $\vec g\colon\Omega\to\mathbf{R}^m$, $\varphi\colon\Omega\to\mathbf{R}$, $\vec A\in\mathbf{R}^m$, $\vec B\in\mathbf{R}^m$, $\lambda\in\mathbf{R}$ に対して

$$\lim_{\vec x\to\vec a}\vec f(\vec x)=\vec A,\quad\lim_{\vec x\to\vec a}\vec g(\vec x)=\vec B,\quad\lim_{\vec x\to\vec a}\varphi(\vec x)=\lambda$$

が成り立つならば、

$$\lim_{\vec x\to\vec a}\left(\vec f(\vec x)+\vec g(\vec x)\right)=\vec A+\vec B,$$

$$\lim_{\vec x\to\vec a}\left(\varphi(\vec x)\vec f(\vec x)\right)=\lambda\vec A,$$

$$\lim_{\vec x\to\vec a}\left(\vec f(\vec x)\cdot\vec g(\vec x)\right)=\vec A\cdot\vec B,$$

$$\lim_{\vec x\to\vec a}\left\|\vec f(\vec x)\right\|=\left\|\vec A\right\|.$$

さらに $\lambda\neq 0$ が成り立つならば、

$$\lim_{\vec x\to\vec a}\frac{\vec f(\vec x)}{\varphi(x)}=\frac{\vec A}{\lambda}.$$

証明　1 変数関数の場合の証明をなぞる。

(別証明の筋) 先に加法 $(x,y)\mapsto\vec x+\vec y$、スカラー乗法 $(\lambda,\vec x)\mapsto\lambda\vec x$, 内積 $(\vec x,\vec y)\mapsto\vec x\cdot\vec y$, ノルム $\vec x\mapsto\|\vec x\|$ の連続性を言って、それから $\vec x\mapsto\left(\vec f(\vec x),\vec g(\vec x)\right)$, $\vec x\mapsto\left(\varphi(\vec x),\vec f(\vec x)\right)$ などとの合成関数と考える。■

系 0.5 連続関数の和 $\vec f+\vec g$, 差 $\vec f-\vec g$, スカラー積 $\varphi\vec f$, 内積 $(\vec f,\vec g)$, ノルム $\left\|\vec f\right\|$, 商 $\dfrac{\vec f}{\varphi}$ (ただし分母 $\neq 0$) は連続である。

命題 0.6 (合成関数の極限) $U\subset\mathbf{R}^n$, $V\subset\mathbf{R}^m$, $\vec f\colon U\to\mathbf{R}^m$, $\vec f(U)\subset V$, $\vec g\colon V\to\mathbf{R}^\ell$, $a\in\overline{U}$, $\lim_{\vec x\to\vec a}\vec f(\vec x)=\vec b$, $\lim_{\vec y\to\vec b}=\vec g(\vec y)=\vec c$ ならば、

$$\lim_{\vec x\to\vec a}\left(\vec g\circ\vec f\right)(\vec x)=\vec c.$$

(細かい注: $\lim_{\vec y\to\vec b}$ が意味を持つためには、$\vec b\in\overline{V}$ である必要があるが、それは、$\vec f(U)\subset V$, $\vec a\in\overline{U}$, $\lim_{\vec x\to\vec a}\vec f(\vec x)=\vec b$ から出て来る。)

証明　$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0$ s.t.

$$\left\| \vec{y} - \vec{b} \right\| < \delta' \quad \Longrightarrow \quad \| \vec{g}(\vec{y}) - \vec{c} \| < \varepsilon.$$

$\exists \delta > 0$ s.t.

$$\| \vec{x} - \vec{a} \| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left\| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{b} \right\| < \delta'.$$

このとき、$\vec{y} := \vec{f}(\vec{x})$ とすることで、

$$\| \vec{x} - \vec{a} \| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left\| \vec{g}\left(\vec{f}(\vec{x}) \right) - \vec{c} \right\| < \varepsilon. \blacksquare$$

系 0.7 連続関数の合成関数は連続である。

連続関数がたくさんあることを示そう。

補題 0.8 (座標関数の連続性) $\forall n \in \mathbf{N}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して、

$$\varphi_i(\vec{x}) := x_i \quad (\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n)$$

によって、$\varphi_i \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を定めると、φ_i は $\mathbf{R}^n$ で連続である。

証明

$$|\varphi_i(\vec{x}) - \varphi_i(\vec{a})| = |x_i - a_i| \le \| \vec{x} - \vec{a} \|$$

より明らかである。実際、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\delta := \varepsilon$ とおくと、$\delta > 0$ で、$\| \vec{x} - \vec{a} \| < \delta$ ならば、

$$|\varphi_i(\vec{x}) - \varphi_i(\vec{a})| \le \| \vec{x} - \vec{a} \| < \delta = \varepsilon. \blacksquare$$

n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ の実係数多項式とは、

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} a_{ij} x^i y^j$$

の形をした式のことを言う ($N \in \mathbf{N},\ a_{ij} \in \mathbf{R}$)。$x_1, \ldots, x_n$ の実係数多項式全体の集合を $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n]$ と表す。

また 2 つの実係数多項式 $P(x_1, \ldots, x_n), Q(x_1, \ldots, x_n)$ を用いて、$R(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ と表される $R(x_1, \ldots, x_n)$ のことを n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ の実係数有理式という。$x_1, \ldots, x_n$ の実係数有理式全体の集合を $\mathbf{R}(x_1, \ldots, x_n)$ と表す。

実係数多項式、実係数有理式は、自然に関数を定義するが、それが連続であることを示そう。

我々は複素数値関数は当面考えないので、複素係数多項式、複素係数有理式は扱う必要がない。煩雑さを避けるため、「実係数」は省き、単に「多項式」、「有理式」と呼ぶことにする。

命題 0.9 (多項式関数、有理関数の連続性) (1) 任意の実係数多項式 $P(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}[x_1,\ldots,x_n]$ に対して、関数

$$\mathbf{R}^n \ni \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} \mapsto P(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}$$

は $\mathbf{R}^n$ で連続である。
(2) 任意の $P(x_1,\ldots,x_n), Q(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}[x_1,\ldots,x_n]$ に対して、

$$\Omega := \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n; P(x_1,\ldots,x_n) \neq 0 \right\}$$

で定義された関数

$$\Omega \ni \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} \mapsto \frac{Q(x_1,\ldots,x_n)}{P(x_1,\ldots,x_n)} \in \mathbf{R}$$

は Ω で連続である。

証明 (1) 多項式関数 $\vec{x} \mapsto P(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}$ は、$\varphi_i(x) = x_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, 定数関数 $\vec{x} \mapsto c$ から、和と積を作ることにより得られる。ゆえに系 0.5 により、連続である。(2) も同様である。 ■

多項式関数、有理関数以外の連続関数の例は、1 変数関数については、いくつか知っている。

(a) $\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$

(b) $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ に対する x^α ($\alpha > 0$ のときは $x \geq 0$, $\alpha < 0$ のときは $x > 0$)

(c) e^x

(d) $\log x$ $(x > 0)$

(e) $\cos x, \sin x$

(f) $\tan x$ $(x \in \mathbf{R} \setminus \{(n+1/2)\pi; n \in \mathbf{Z}\})$

これらの関数の連続性は既知とする。

例 0.10 以下の書く関数は $\mathbf{R}^2$ で連続である。

(1) $f(x,y) = 1 + x + 2y + 3x^2 + 4xy + 5y^2$
多項式関数であるから。

(2) $g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$
多項式関数 $F(x,y) = -(x^2+y^2)$ と $G(z) = e^z$ はともに連続であり、g はそれらの合成である: $g = G \circ F$.

(3) $h(x,y) = \dfrac{\sin x}{x^2+y^2+1}$
(分母) $f(x,y) = x^2+y^2+1$ は多項式関数であるから連続で、0 という値は取り得ない。(分子) $G(z) = \sin z$ と $F(x,y) = x$ (多項式関数) はともに連続であるので、合成 $g := G \circ F$ も連続である。(着地) $h = \dfrac{g}{f}$ は連続である。

(4) $\varphi(x,y) = \log\left(1+x^2+y^2\right)$
$G(z) = \log z$ は $V = \{z \in \mathbf{R}; z > 0\}$ で連続である。一方 $F(x,y) = 1+x^2+y^2$ は多項式関数なので、$U := \mathbf{R}^2$ 全体で連続であり、かつ $F(U) \subset V$. ゆえに $\varphi = G \circ F$ は連続である。