多変数の微分積分学1 第2回

桂田 祐史

2011年5月5日, 訂正 2011 年6 月2 日

この授業用の WWW ページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

(書きかけです。もう少し書き足します。ただし図を入れるのは面倒なので省略しがちです。なるべく自分で描くように心掛けてください。)

前回やり残したことの後始末

$\lim_{x\to a}\vec f(x)=A$ の定義をするところで、$a\in\overline{I}$ という条件をつけたが、これは何か? まず例で始める。実変数の対数関数 $f(x)=\log x$ は (普通) $I:=(0,\infty)$ を定義域とする。定義域 I に属する a, 例えば $a=1$ に対して $\lim_{x\to a}f(x)$ を考えるのは自然である。

$$\lim_{x\to 1}\log x=\log 1=0.$$

$a=0$ は定義域 I に属していないが、$\lim_{x\to a}f(x)$ を考えることがある。

$$\lim_{x\to 0}\log x=-\infty.$$

しかし $a=-1$ に対して $\lim_{x\to a}f(x)$ を考えるのはナンセンスである。定義域 I に属する x によって近づくためには、a は $\overline{I}$ に属する必要がある。

1変数ベクトル値関数の基本的性質

極限を用いると、連続性、微分可能性、微分係数、導関数、k 回微分可能性、k 階微分係数 $\vec f^{(k)}(a)$、k 階導関数 $\vec f^{(k)}(x)$、C^k 級、C^∞ 級などの概念が定義できる。

例年誤解する人が多いので、一つだけ書いておくと、$\vec f$ が I で C^k 級とは、$\vec f'$, $\vec f''$, ..., $\vec f^{(k)}$ が I で存在して、$\vec f^{(k)}$ が I で連続なことをいう。

ベクトル値関数の極限は成分関数の極限を考えれば良い

次の定理は予告してあった。

定理 0.1 I は $\mathbf{R}$ の区間、$\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$, $a \in \overline{I}$, $\vec{A} \in \mathbf{R}^m$ とするとき、

$$\lim_{x\to a} \vec{f}(x) = \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\} \quad \lim_{x\to a} f_i(x) = A_i.$$

ただし $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} := \vec{f}$, $\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} := \vec{A}$ とおいた。

この定理の証明には、次の補題が用いられる。

補題 0.2 任意の $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$ に対して、

$$\max_{j=1,\ldots,m} |x_j| \le \|\vec{x}\| \le \sum_{j=1}^m |x_j|\,.$$

特に $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ に対して、$|x_i| \le \|\vec{x}\|$.

証明　任意の i に対して、

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2} = \|\vec{x}\|\,.$$

ゆえに

$$\max_{j=1,\ldots,m} |x_j| \le \|\vec{x}\|\,.$$

一方 $\vec{e}_j$ を第 j 成分が 1 で、他の成分は 0 であるような単位ベクトルとすると、$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_m\vec{e}_m$ であるから、

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\| &\le \|x_1\vec{e}_1\| + \cdots + \|x_m\vec{e}_m\| = |x_1|\,\|\vec{e}_1\| + \cdots + |x_m|\,\|\vec{e}_m\| \\ &= |x_1|\cdot 1 + \cdots + |x_m|\cdot 1 = \sum_{j=1}^m |x_j|\,.\blacksquare\end{aligned}$$

定理の証明　($\Leftarrow$) 任意の $i \in \{1,\ldots,m\}$ に対して、$|f_i(x) - A_i| \le \left\|\vec{f}(x) - \vec{A}\right\|$ であるから、$\lim_{x\to a} \vec{f}(x) = A$ であれば、$\lim_{x\to a} f_i(x) = A_i$.

($\Rightarrow$) $\forall\varepsilon > 0$ に対して、$\exists\delta_1,\ldots,\delta_m > 0$ s.t.

$$|x-a| \le \delta_i \quad \Longrightarrow \quad |f_i(x) - A_i| < \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon}{m} = \frac{\varepsilon}{m}.$$

$\delta := \min\{\delta_1,\ldots,\delta_m\}$ とおくと、$\delta > 0$ で、$|x-a| < \delta$ であれば、$|f_i(x) - A_i| < \dfrac{\varepsilon}{m}$ $(i = 1,\ldots,m)$ であるから、

$$\left\|\vec{f}(x) - \vec{A}\right\| \le \sum_{j=1}^m |f_j(x) - A_j| < \varepsilon.\blacksquare$$

この定理から、以下のような系が得られる。

$\vec{f}$ が a (あるいは I) で連続であるための必要十分条件は、$\forall i \in \{1,\dots,m\}$ に対して、f_i が a (あるいは I) で連続なことである。

$\vec{f}$ が a (あるいは I) で微分可能であるための必要十分条件は、$\forall i \in \{1,\dots,m\}$ に対して、f_i が a (あるいは I) で微分可能なことである。また $\vec{f}'(a) = \begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{pmatrix}$.

微分係数 $\vec{f}'(a)$ の意味

$\vec{f}'(a)$ が存在し、$\vec{f}'(a) \neq \vec{0}$ であれば、それは、f を曲線と考えたときの、$\vec{f}(a)$ における接線の方向を表すベクトルである。

例 0.3 (授業終了後の質問で出した例) $I := \mathbf{R}$, $\vec{f}(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $a=1$ とする。$\vec{f}'(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるが、これは確かに $\vec{f}(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ における接線の方向ベクトルである。実際、この曲線は、関数 $F(x) := x^2$ のグラフ $y = F(x)$ であり、$x=1$ における接線の傾きは $F'(1) = 2$ であり、確かに $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は接線の方向を与えるベクトルである。 ■

$\vec{f}'(a) = \vec{0}$ である場合は、たとえ $\vec{f}$ が C^1 級であっても、接線が引けない (存在しない) 場合もある。

例 0.4 $\vec{f}(t) := \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ は、$t=0$ のところで、とがった曲線となっている (関数 $y = |x|^{2/3}$ のグラフ, 図は準備中)。 ■

多変数関数

最初に記号から。$\vec{a} \in \mathbf{R}^m$, $r > 0$ に対して、

$$B(\vec{a}; r) := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^m; \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}.$$

これを $\vec{a}$ を中心とする半径 r の開球と呼ぶ。

$\Omega \subset \mathbf{R}^m$ に対して、

$$\overline{\Omega} := \{\vec{x} \in \mathbf{R}^m; \forall \varepsilon > 0 \quad \Omega \cap B(\vec{x}; \varepsilon) \neq \emptyset\}$$

とおき、Ω の閉包と呼ぶ。図形的には、Ω に Ω の縁を加えたものである (後でもう少し詳しく説明する)。

$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(x) = \vec{A}$ とはどういう意味だろうか? $\vec{x} \to \vec{a}$ の意味が問題であるが、結論から先に言うと、$\vec{x}$ と $\vec{a}$ との距離 $\|\vec{x} - \vec{a}\|$ が $\to 0$ となる、と約束する。

定義 0.5 (多変数関数の極限) $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega}$, $\vec{A} \in \mathbf{R}^m$ とするとき、

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall\varepsilon > 0) \quad (\exists\delta > 0) \quad (\forall\vec{x} \in \Omega : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta) \quad \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{A}\right\| < \varepsilon.$$

ここで図を描いて説明する。$\vec{x}$ が $\vec{a}$ に近づくというのは、1 変数の場合とは大きく様子が異なる。1 次元では、方向は 1 つしかなかったが、2 次元以上では、直線に沿った場合だけを考えても、無限に多くの方向が存在するし、曲線に沿って接近したりする場合もある。

記号の約束: A と B の差集合 $A \setminus B := \{x \in A; x \notin B\}$.

例 0.6 $\Omega := \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$ を

$$f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$$

で定める。

(i) 点 (x,y) を、x 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると、

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

(ii) 点 (x,y) を、y 軸に沿って $(0,0)$ に近づけると、

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

(iii) 点 (x,y) を、直線 $y = kx$ (ここで k はある実定数) に沿って $(0,0)$ に近づけると、

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

これは $k = 0$ でない限り、0 ではない。

以上より、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。実際、もしも $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$ となる A が存在すれば、

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = A$$

となるはずだが、$0 = \dfrac{k}{1+k^2}$ となって矛盾が生じる。 ■