多変数の微分積分学1 第1回

桂田 祐史

2011年5月2日

この授業用のWWWページは
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2011/

順番があちこち飛んで読みづらいが、本質的には、昨年度の講義ノート [1] に全部説明してある。

多変数関数とは

例 0.1 ある瞬間の部屋の中の空気の温度を考える。場所によって異なるので、場所の関数である。適当な直交座標系を用意すると、つまり部屋の中の任意の点は、三つの実数の組 (x_1, x_2, x_3) で表される。その点での温度を

$$u(x_1, x_2, x_3)$$

とすると、u は 3 つの変数 x_1, x_2, x_3 についての関数である。ベクトル変数 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ についての関数ともみなせる。

$$u(\vec{x}) = u(x_1, x_2, x_3).$$

部屋は $\mathbf{R}^3$ のある部分集合 Ω であると考えられ、u は $u\colon \Omega \to \mathbf{R}$ という写像となる。

(もし時間による変化を考えると、時刻 t の関数でもあることになり、4 変数関数になる。)

今度は、ある瞬間の部屋の中の風の速度を考える。位置 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ における風の速度を

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

とすると、$\vec{v}$ は $\vec{v}\colon \Omega \to \mathbf{R}^3$ という写像となる。■

集合、写像の言葉を使って書くと、n 変数 m 次元ベクトル値関数とは、$\mathbf{R}^n$ のある部分集合 Ω 上定義され、 $\mathbf{R}^m$ に値を取る写像

$$\vec{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^m$$

のことである。上の u は 3 変数 1 次元ベクトル値 (実数値) 関数であり、$\vec{v}$ は 3 変数 3 次元ベクトル値関数である。

1 変数ならばベクトル値でも簡単

I を $\mathbf{R}$ の区間、$\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$ とする。各 $x \in I$ に対して、$\vec{f}(x) \in \mathbf{R}^m$ であるから、

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} := \vec{f}(x)$$

とおくと、各 $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して、$f_i\colon I \to \mathbf{R}$ である。

次のようにまとめておく (納得しやすいであろう)。

m 次元ベクトル値関数とは、実数値関数 m 個の組である。

微積分をするには、極限や連続性が問題となるが、1 変数ベクトル値関数 $\vec{f}$ については、極限や連続性、微分は「成分 f_i ごと」に考えれば良い。

例えば、極限については、

$$\lim_{x\to a} \vec{f}(x) = \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, m\} \quad \lim_{x\to a} \vec{f_i}(x) = \vec{A_i} \quad (\text{ただし } \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} := \vec{A}).$$

言い換えると、

$$\lim_{x\to a} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x\to a} f_1(x) \\ \lim_{x\to a} f_2(x) \\ \vdots \\ \lim_{x\to a} f_m(x) \end{pmatrix}$$

ということであり、「ベクトル値関数の極限は実数値関数の極限に帰着される」。

例 0.2 $\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{x} \\ x^3 - 3x + 2 \end{pmatrix}$ とするとき、

$$\lim_{x\to 0} \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \\ \lim_{x\to 0} \left(x^2 - 3x + 2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

微分に関しても同様に、

$$\vec{f}'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}.$$

1 変数ベクトル値関数の例

例 0.3 (質点の運動、特に等速円運動) 質点が時間の経過とともにその位置を変えるとき、時刻 $t \in I$ (I は $\mathbf{R}$ の区間) における位置ベクトルを $\vec{f}(t)$ で表すと，一つのベクトル値関数 $\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$ が得られる。

ここでは独立変数を t, 従属変数を $\vec{x}$ と書くことにしよう:

$$\vec{x} = \vec{f}(t).$$

このとき

$$\vec{v}(t) := \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}'(t)$$

を時刻 t における質点の**速度** (velocity) と呼ぶ。また速度のノルム (大きさ) $\|v(t)\|$ のことを**速さ** (speed) と呼ぶ。

速度の導関数

$$\vec{\alpha}(t) := \vec{v}'(t) = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{f}''(t)$$

は質点の**加速度** (acceleration) と呼ばれる。

$m = 2$, $r > 0$, $\omega \in \mathbf{R}$ とするとき、$\vec{f}(t) := \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{pmatrix}$ とおくと、原点を中心とする半径 r の円周上を一定の角速度 ω で移動する質点の運動とみなせる。

$$\vec{v}(t) = \vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\|\vec{v}(t)\| = r|\omega|, \quad \vec{v}(t) \perp \vec{f}(t).$$

(後者は $\vec{v}(t)\cdot\vec{f}(t) = 0$ や、$\vec{v}(t) = \omega\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{f}(t)$ から分かる。) また

$$\vec{\alpha}'(t) = \vec{f}''(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\omega t \\ -r\omega^2\sin\omega t \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\|\vec{\alpha}(t)\| = r\omega^2, \quad \vec{\alpha}(t) = -\omega^2\vec{f}(t), \quad \vec{\alpha}(t) \perp \vec{v}(t).$$

(「加速度は中心を向く」、「速度と加速度は直交する」)。 ■

例 0.4 ($\mathbf{R}^m$ 内の曲線) $\mathbf{R}$ の区間 I で定義された連続関数 $\vec{f}\colon I \to \mathbf{R}^m$ があるとき、$\vec{f}$ の値域

$$\vec{f}(I) = \left\{\vec{f}(t); t \in I\right\}$$

は $\mathbf{R}^m$ の部分集合であるが、直観的には曲線であると考えられる。

数学では、$\mathbf{R}^m$ 内の曲線とは、$\mathbf{R}$ のある区間 I から $\mathbf{R}^m$ への連続写像のことであると定義する (場合が多い)。 ■

上のように定義した連続曲線の中には、「曲線」らしくないものも含まれている。

例 0.5 (Peano 曲線 (Peano curve)) 連続曲線 $\vec{f}\colon I=[0,1]\to\mathbf{R}^2$ で、像が正方形である、すなわち

$$\vec{f}(I)=[0,1]\times[0,1]$$

が成り立つようなものが存在する (平面や空間を「充填する」曲線については、ザーガン [2] を見よ)。 ■

後始末 (まじめな定義)

閉包 (区間の場合) $\mathbf{R}$ の区間 I に対して、$\overline{I}$ はその閉包であるとする。閉包の正確な定義は後で与えるが、

- $I=(a,b)$ $(a,b\in\mathbf{R})$ の場合は $\overline{I}=[a,b]$
- $I=(a,\infty)$ $(a\in\mathbf{R})$ の場合は $\overline{I}=[a,\infty)$
- $I=(-\infty,b)$ $(b\in\mathbf{R})$ の場合は $\overline{I}=(-\infty,b]$.

極限の定義 $\vec{f}(x)\to A$ とは、$\vec{f}(x)$ と $\vec{A}$ との距離が 0 に収束することと定義する。

定義 0.6 (ベクトル値関数の極限の定義) I は $\mathbf{R}$ の区間、$a\in\overline{I}$, $\vec{f}\colon I\to\mathbf{R}^m$, $\vec{A}\in\mathbf{R}^m$ とするとき、

$$\lim_{x\to a}\vec{f}(x)=\vec{A} \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{x\to a}\left\|\vec{f}(x)-\vec{A}\right\|=0.$$

一見、lim の定義に lim の定義を使っていて、循環論法をしているようだが、$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ の右辺は実数値関数の極限なので、すでにおなじみのものである。$\varepsilon-\delta$ 論法で書くと、

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad (\forall x\in I:\|\vec{x}-\vec{a}\|<\delta) \qquad \left\|\vec{f}(x)-\vec{A}\right\|<\varepsilon$$

これは

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x\in I \quad \|\vec{x}-\vec{a}\|<\delta \quad \Longrightarrow \quad \left\|\vec{f}(x)-\vec{A}\right\|<\varepsilon$$

と書いても同じことである。

参考文献

[1] 桂田祐史：多変数の微分積分学 1 講義ノート, `http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2010/tahensuu1-2010.p%df` (2010).

[2] H. ザーガン著, 鎌田清一郎訳：空間充填曲線とフラクタル, シュプリンガーフェアラーク東京 (1998), H. Sagan, Space-Filling Curves, Springer (1994) の翻訳.