2010 年度 多変数の微分積分学 1, 多変数の微分積分学 1 演習 試験問題

2010 年 7 月 26 日施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1. (1) $\mathbf{R}^N$ の開集合の定義を述べよ。(2) $\mathbf{R}^2$ の部分集合 (ただし空集合、全平面以外のもの) で、開集合であるものの例をあげ、(1) で述べた定義に基づき、それが開集合であることを示せ。(3) 次の命題が真ならば証明し、偽ならば反例をあげよ: 「F_n $(n=1,2,\cdots)$ が $\mathbf{R}^N$ の開集合ならば、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$ は $\mathbf{R}^N$ の開集合である。」

2. $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω で定義された $f\colon \Omega\to\mathbf{R}$ について、(a) f は C^1 級, (b) f は連続, (c) f は全微分可能, (d) f は各変数につき偏微分可能, という 4 つの条件を考える。

(1) (c) が成り立つとはどういうことか、定義を書け。

(2) 条件 (a), (b), (c), (d) 間の関係について説明せよ (ある条件から別の条件が一般に導かれるならば、それをすべて指摘せよ)。

(3) 次式で定義される $f\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ が、条件 (a), (b), (c), (d) を満たすかどうか調べよ。

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

3. (1) $\varphi\colon (0,\infty)\times[0,2\pi)\ni(r,\theta)\mapsto(x,y)\in\mathbf{R}^2$ を $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ で定めるとき、φ のヤコビ行列を求めよ。また φ は単射であることを示せ。
(2) $u\colon \mathbf{R}^2\ni(x,y)\mapsto u(x,y)\in\mathbf{R}$ があるとき、$U\colon (0,\infty)\times[0,2\pi)\ni(r,\theta)\mapsto U(r,\theta)\in\mathbf{R}$ を

$$U(r,\theta) := u(x,y),\quad x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\quad (r\in[0,\infty),\ \theta\in\mathbf{R})$$

で定めるとき、次式が成り立つことを示せ。

$$u_{xx}+u_{yy} = U_{rr}+\frac{1}{r}U_r+\frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}.$$

4. $f(x,y) := x^4+y^4+6x^2y^2-2x^2-2y^2$ について、以下の問に答えよ。

(1) $\nabla f(x,y)$ を求めよ。(2) f の Hesse 行列 $H(x,y)$ を求めよ。(3) f の極値を求めよ。

5. (1) 陰関数定理を書け。
(2) $F(x,y) := \log\sqrt{x^2+y^2}-\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ $((x,y)\in(0,\infty)\times\mathbf{R})$ に対して、$(1,0)$ の近傍で、$F(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ の存在を示し、その点における微分係数を求めよ。

6. $f,g\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ を $f(x,y) := x^2+2xy+y^2$, $g(x,y) := 3x^2+2xy+3y^2-4$ で定め、$N_g := \{(x,y)\in\mathbf{R}^2; g(x,y)=0\}$ とおく。
(1) N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であることを示せ (ヒント: $2x^2+2y^2\le 3x^2+2xy+3y^2$)。(2) f は N_g 上で最大値、最小値を取ることを示せ。(3) N_g 上で $\nabla g\ne 0$ であることを示せ。(4) Lagrange の未定乗数法を用いて、f の N_g における最大値、最小値を求めよ。

1.

(1) $A \subset \mathbf{R}^N$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合であるとは、

$$\forall a \in A, \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad B(a;\varepsilon) \subset A$$

が成り立つことをいう。ただし $B(a;\varepsilon) := \{x \in \mathbf{R}^N; \|x-a\| < \varepsilon\}$.

(2) $A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; x_1 > 0\}$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合である。$\forall a = (a_1, a_2) \in A$ に対して、A の定義から $a_1 > 0$ が成り立つが、$\varepsilon := a_1$ とおくと、$\varepsilon > 0$ で、$B(a;\varepsilon) \subset A$. 実際 $\forall x \in B(a;\varepsilon)$ に対して、$\|x-a\| < \varepsilon$ であるから、$|x_1 - a_1| \le \|x-a\| < \varepsilon = a_1$. これから $-a_1 \le x_1 - a_1 \le a_1$ が導かれるので、$x_1 \ge 0$. ゆえに $x \in A$.

(3) 偽である。$F_n := B\left(0; \dfrac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbf{R}^N; \|x\| < \dfrac{1}{n}\right\}$ とおくと、これは $\mathbf{R}^N$ の開集合であるが、$\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n = \{0\}$ であり、$\{0\}$ は $\mathbf{R}^N$ の開集合ではない。

2.

(1) f が Ω で全微分可能とは、$\forall a \in \Omega$ で全微分可能なことをいう。f が a で全微分可能とは、$\exists A \in M(1, n; \mathbf{R})$ s.t.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{\|h\|} = 0$$

が成り立つことをいう。

(2) (a)$\Longrightarrow$(c), (c)$\Longrightarrow$(b), (c)$\Longrightarrow$(d) は定理として学んだ。その系として、(a)$\Longrightarrow$(b), (a)$\Longrightarrow$(d) も成り立つ。これ以外は一般には成立しない。

(3) 実は (a) 満たさない, (b) 満たす, (c) 満たす, (d) 満たす, である。事前に分かれば、色々と省略が可能だが、ここでは一つ一つチェックしてみる。まず $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で f は C^∞ 級であることは明らかである (多項式関数の制限 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \in (0,\infty)$ は C^∞ 級、$(0,\infty) \ni z \mapsto \sqrt{z} \in (0,\infty)$ は C^∞ 級、$(0,\infty) \ni w \mapsto \dfrac{1}{w} \in \mathbf{R}$ は C^∞ 級, $\sin\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は C^∞ 級で、これらの合成として $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \mapsto \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \in \mathbf{R}$ は C^∞ 級である。一方 $\mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \in \mathbf{R}$ も C^∞ 級である。f の $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ への制限は、これら二つの C^∞ 級関数の積として、C^∞ 級、特に C^1 級であり、$\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ として、(a),(b),(c),(d) が成り立つ)。

- (b) について、$\forall (x,y) \neq (0,0)$ に対して、

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2$$

  であるから、$(x,y) \to (0,0)$ のとき、$f(x,y) \to f(0,0)$. ゆえに f は $(0,0)$ で連続である。

- (d) について、$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$ ともに

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\dfrac{1}{|h|}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{|h|}=0\quad\text{(挟み撃ちの原理で証明可)}$$

であるから、$f=f(x_1,x_2)$ は $(0,0)$ で、x_1 についても、x_2 についても、偏微分可能である。($f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ ということも分かった。)

- (c) について。$f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| &= \left|\frac{(h^2+k^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \\ &= \left|\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \\ &\le \sqrt{h^2+k^2}\to 0\quad ((h,k)\to(0,0)).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

が成り立つので、f は $(0,0)$ で全微分可能である。

- (a) について。$(x,y)\ne(0,0)$ で、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ は成り立たない (左辺の極限がそもそも存在しない) ので、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ は $(0,0)$ で連続ではない。ゆえに f は $\mathbf{R}^2$ で C^1 級ではない。■

3.　省略します。

3A.　(1) これは単なる計算。多分 $u_t=\triangle u$ が成り立つだろう、ということで検算にもなるので少し気が楽か。

$$u_t=\frac{(x^2+y^2-4t)}{16\pi t^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right),$$
$$u_x=-\frac{x}{8\pi t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right),$$
$$u_{xx}=\frac{(x^2-2t)}{16\pi t^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right),$$
$$\triangle u=\frac{(x^2+y^2-4t)}{16\pi t^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right).$$

(2)

$$u(1,1,1)=\frac{1}{4\pi\sqrt{e}},\quad u_t(1,1,1)=-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}},\quad u_x(1,1,1)=-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}},\quad u_y(1,1,1)=-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}}$$

であるから、接平面の方程式は

$$\begin{aligned}u&=u_t(1,1,1)(t-1)+u_x(1,1,1)(x-1)+u_y(1,1,1)(y-1)+u(1,1,1)\\&=-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}}(t-1)-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}}(x-1)-\frac{1}{8\pi\sqrt{e}}(y-1)+\frac{1}{4\pi\sqrt{e}}\\&=\frac{1}{8\pi\sqrt{e}}\left(-t+1-x+1-y+1+2\right)\end{aligned}$$

整理して、

$$u=\frac{5-t-x-y}{2\pi\sqrt{e}}.$$

4. (1) $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}4x^3+12xy^2-4x\\4y^3+12x^2y-4y\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}12x^2+12y^2-4 & 24xy\\24xy & 12x^2+12y^2-4\end{pmatrix}$

(3) $f_x=0$ と $f_y=0$ を辺々引き算すると、$(x-y)(x^2-2xy+y^2-1)=0$. これはさらに $(x-y)(x-y+1)(x-y-1)=0$ と因数分解できる。これから $x-y=0,1,-1$. 途中省略して、$\nabla f(x,y)=0$ は、結局 $(x,y)=(\pm1,0),(0,\pm1),(0,0),\pm(1/2,1/2),\pm(1/2,-1/2)$ と解ける。これら各点で Hesse 行列の符号を調べて、$(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$ で極小値 -1, $(0,0)$ で極大値 0 を取る、ことが分かる (その他にの点では Hesse 行列は不定符号で、極値点ではない)。

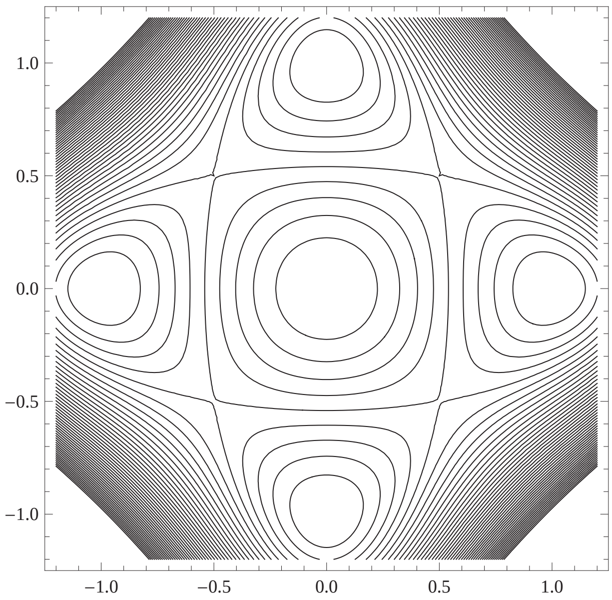

図 1: 十字型に極値点が並び、4 個の鞍点もある

5. (1) 省略します。「陰関数定理の覚え方」[1] などを参考にして下さい。(2) $F_y(x,y)=\dfrac{-x+y}{x^2+y^2}$, $\det F_y(1,0)=F_y(1,0)=\dfrac{-1+0}{1^2+0^2}=-1\neq0$ であるから、$(1,0)$ の十分小さな近傍で、$F(x,y)=$

[1] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2009/oboekata.pdf

0 の C^1 級の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在する。$F(x,\varphi(x))=0$ から

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$$

であり、$F_x(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $F_x(1,0)=\dfrac{1+0}{1^2+0^2}=1$ であるから、$\varphi'(1)=-\dfrac{1}{-1}=1.$

6.

(1) $g(x,y)$ は x,y の多項式であるから、関数 $g\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ は連続である。ゆえに N_g は $\mathbf{R}^2$ の閉集合である。一方、$(x,y)\in N_g$ であるとき、

$$2x^2+2y^2 \le 3x^2+2xy+3y^2=4$$

であるから、$\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{2}$. ゆえに N_g は有界集合である。

(2) $f(x,y)$ は x,y の多項式であるから、関数 $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ は連続である。特に f は N_g 上で連続である。N_g は $\mathbf{R}^2$ の有界閉集合であるからコンパクトであるので、その上で連続な f は、最大値と最小値を持つ。

(3)

$$\nabla g(x,y) = 2\begin{pmatrix}3x+y\\ x+3y\end{pmatrix}$$

であるから、

$$\nabla g(x,y)=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad (x,y)\notin N_g.$$

対偶を取って、$(x,y)\in N_g \Longrightarrow \nabla g(x,y)\neq 0.$

(4) 一般に最大値、最小値は極値であり、(3) より (x,y) で極値であれば、

$$\exists\lambda\in\mathbf{R}\quad \text{s.t.}\quad \nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y),\quad g(x,y)=0.$$

これを解くと、

$$(x,y,\lambda)=(1,-1,0),(-1,1,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right).$$

$(x,y)=(1,-1),(-1,1)$ のとき $f(x,y)=0$. $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき、$f(x,y)=2$. ゆえに最大値は 2, 最小値は 0. ■