

# 偏微分方程式入門

2013 年度 微分方程式 2 講義ノート

桂田 祐史

katurada AT meiji.ac.jp

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/pde/>

2013 年 9 月, 2025 年 11 月 26 日

# 目次

第0章	序	6
0.1	シラバス	6
0.2	学習の仕方についての注意	8
0.3	この講義の目標	9
0.4	参考書案内	10
第1章	波動方程式	17
1.1	波動方程式とは	17
1.2	1次元空間 $\mathbf{R}^1$ における波動方程式	19
1.2.1	d'Alembert の解	19
1.2.2	初期値問題, d'Alembert の波動公式	21
1.2.3	依存領域、影響領域、伝播速度	23
1.3	$\mathbf{R}^n$ における初期値問題	24
1.3.1	<small>デュアメル</small> Duhamelの原理	25
1.3.2	Fourier 変換による解の表示	29
1.3.3	$\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ における初期値問題の解の簡単な公式	31
1.3.4	<small>ホイヘンス</small> Huygens の原理	35
1.4	初期値境界値問題	36
1.4.1	問題の設定	36
1.4.2	(W-IBP) の解の存在	37
1.4.3	(W-IBP) の解の一意性	39
1.5	頭の中の整理・確認	42
1.6	補足: 微積分の問題	43
1.7	練習問題	46
第2章	熱方程式	57
2.1	1次元熱方程式の導出	57
2.2	多次元熱方程式の導出	59
2.3	初期値境界値問題、適切性	61
2.3.1	定式化	61
2.3.2	適切性	62
2.3.3	古典解	63
2.4	最大値原理と解の一意性	64
2.5	解の安定性、初期データへの連続的依存性	68
2.6	Fourier の方法で解を求める (1) 解の形式的な導出	70

2.6.1	第1ステップ: 変数分離解を探せ	71
2.6.2	第2ステップ: 変数分離解を重ね合わせても (HE), (DBC) の解	75
2.6.3	第3ステップ: (IC) が成り立つように係数 $\{c_n\}$ を選ぶ	76
2.7	Fourier の方法で解を求める (2) 解であることの確認	77
2.7.1	何を証明しなければいけないか	77
2.7.2	第1段: Fourier 級数解 $S_f$ が熱方程式を満たすこと	78
2.7.3	第2段: Fourier 級数解の $t = 0$ での連続性と初期条件	80
2.7.4	おまけ: $f$ が $C^1$ 級でなく単に連続な場合, Green 関数	81
2.8	Fourier の方法とスペクトル分解	88
2.8.1	Fourier の方法に現れる固有値問題	89
2.8.2	固有関数の完全性	91
2.8.3	固有関数と発展問題	92
2.9	非同次問題	94
2.9.1	熱方程式の非同次問題	94
2.9.2	特解発見の方法	95
2.9.3	定数変化法	97
2.10	Neumann 境界値問題	98
2.10.1	Neumann 境界条件	98
2.10.2	同次 Neumann 境界値問題	98
2.10.3	非同次 Neumann 境界値問題	99
2.11	解の漸近挙動	99
2.11.1	同次 Dirichlet 境界条件の場合 — 熱方程式の解の指数関数的減衰	99
2.11.2	同次 Neumann 境界条件の場合	101
2.11.3	一般の場合 — 定常解への収束原理	101
2.12	紙芝居	103
2.12.1	(H-IBP) の解	104
2.12.2	(N-H-IBP) の解	105
2.12.3	複雑な初期値に対する (H-IBP) の解	105
2.13	エネルギーを用いた議論	106
2.13.1	総熱量と Neumann 問題	106
2.13.2	Dirichlet 問題, Neumann 問題の解の一意性の別証明	108
2.14	変数変換の例	109
2.15	この後の熱方程式の勉強	112
2.15.1	1次元非有界区間における熱方程式	112
2.15.2	多次元領域における熱方程式	114
2.16	補足: Fourier 級数の問題	116
2.17	練習問題	132
第3章	Laplace 方程式、Poisson 方程式	137
3.1	イントロ	137
3.1.1	紋切り型	137
3.1.2	前章を受けて	137

3.2	例	138
3.2.1	1 変数関数	138
3.2.2	$r =  x $ のみの関数である調和関数	138
3.2.3	複素関数論から	139
3.2.4	熱伝導現象の定常状態	140
3.2.5	静電ポテンシャル	140
3.2.6	3次元の流れの場合	141
3.3	最大値原理	143
3.3.1	最大値原理とその系	143
3.3.2	最大値原理の証明	145
3.4	円板領域における Laplace 方程式の Dirichlet 問題	146
3.4.1	Fourier の方法による Fourier 級数解	146
3.4.2	後始末: Euler の方程式	149
3.4.3	解であることの確かめ、Poisson 積分	149
3.4.4	円の外部領域、円環領域における解の公式	154
3.5	調和関数の積分表示、Laplace 作用素の基本解, Gauss の球面平均定理	156
3.5.1	Green の公式	156
3.5.2	Green の third identity	157
3.5.3	調和関数の境界積分表示	161
3.5.4	$E$ は $-\Delta$ の基本解である	161
3.5.5	デルタ関数についての大雑把な説明	162
3.5.6	Gauss の球面平均の定理と調和関数の強最大値原理	165
3.5.7	おまけ: デルタ関数と基本解	167
3.6	解の存在証明	170
3.6.1	全般的な注意	170
3.6.2	Poisson 方程式の特解	170
3.6.3	Fourier の方法の限界	171
3.6.4	Dirichlet の原理, 変分法	172
3.6.5	等角写像による単純化	173
3.6.6	Poincaré-Perron の方法	176
3.6.7	積分方程式への帰着, Potential 論	177
3.7	練習問題	180
付 録 A	歴史的なことなど	186
A.1	数学についての言葉	186
A.2	微分方程式歴史覚え書き	186
A.2.1	微分方程式のはじまり — Newton	187
A.2.2	波動方程式	188
A.2.3	熱伝導方程式	188
A.2.4	Laplace 方程式	190
A.2.5	Poisson 方程式	190
A.3	年表	190

A.4 おまけ: 解析学の基礎の歴史 . . . . .	192
<b>付 録 B 解析学一夜漬け</b> . . . . .	<b>193</b>
B.1 記号 . . . . .	193
B.2 厳選定理集 . . . . .	194
B.2.1 合成関数の微分法 . . . . .	194
B.2.2 コンパクト集合の常識 . . . . .	194
B.2.3 2 階導関数と極値問題 . . . . .	195
B.2.4 積分記号下の微分、微分と積分の順序交換 . . . . .	195
B.2.5 一様収束 . . . . .	196
B.2.6 3 次元ベクトル解析から . . . . .	197
B.2.7 Fourier 級数 . . . . .	197
B.2.8 線型方程式 . . . . .	199
B.2.9 定数係数線型常微分方程式 . . . . .	201
B.2.10 不等式 . . . . .	203
<b>付 録 C 一様収束、広義一様収束</b> . . . . .	<b>204</b>
C.1 各点収束では不十分 . . . . .	204
C.2 一様収束の定義、compact 集合上の連続関数の最大値ノルム . . . . .	205
C.3 Weierstrass の M 判定法 . . . . .	206
C.4 連続性の遺伝、広義一様収束の定義 . . . . .	207
C.5 一様収束と項別積分 . . . . .	207
C.6 広義一様収束と項別微分 . . . . .	208
<b>付 録 D Fourier 級数の復習</b> . . . . .	<b>210</b>
D.1 Fourier 級数、Fourier 係数の定義 . . . . .	210
D.2 Fourier 係数の一意性 . . . . .	211
D.3 各点ごとの収束、一致 . . . . .	211
D.4 正弦展開、余弦展開 . . . . .	212
D.5 $L^2$ の意味での収束、一致 . . . . .	213
D.6 勉強の手引き . . . . .	214
D.7 バーゼル問題にチャレンジ . . . . .	214
D.7.1 バーゼル問題とは? . . . . .	214
D.7.2 簡単な注意 . . . . .	215
D.7.3 Fourier 級数の計算で $S_*$ を求める . . . . .	215
<b>付 録 E Fourier 変換の応用</b> . . . . .	<b>218</b>
E.1 Fourier 変換の復習 (一部予習? ) . . . . .	218
E.2 微分方程式への応用 . . . . .	219
<b>付 録 F 常微分方程式の Green 関数</b> . . . . .	<b>225</b>
F.1 1 次元 Poisson 方程式 . . . . .	225
F.1.1 素朴に積分して解く . . . . .	225

F.1.2 定数変化法で解く . . . . .	226
F.2 一般の 2 階線形常微分方程式の境界値問題の Green 関数 . . . . .	227
<b>付 録 G misc</b>	<b>232</b>
G.1 弾性体の方程式から P 波、S 波の方程式を導く . . . . .	232
G.2 Kirchhoff の定理の証明の後始末 . . . . .	233
G.3 周期境界条件の場合のグリーン関数 . . . . .	233
G.4 固有関数展開法の例 . . . . .	235
G.5 gnuplot で遊ぶ . . . . .	237
G.6 Mathematica で遊ぶ . . . . .	240
G.7 仮称 (十進)BASIC で遊ぶ . . . . .	240
G.7.1 仮称 (十進)BASIC の紹介 . . . . .	240
G.7.2 1 次元熱方程式の初期値境界値問題を解く . . . . .	240
G.7.3 1 次元波動方程式の初期値境界値問題を解く . . . . .	241
<b>付 録 H Fourier 解析大全からもっと</b>	<b>248</b>
H.1 §91 「1800 年から見た数学の将来」 . . . . .	248
H.2 §110 「創始者のことば」 . . . . .	249
<b>付 録 I その他</b>	<b>251</b>
I.1 von Neumann 全集からの引用の原文 . . . . .	251
I.2 書きたいこと . . . . .	251
I.3 ゴミ箱: 以前書いたぶつぶつ . . . . .	252

# 第0章 序

## 0.1 シラバス

### 授業の概要・目的

微分方程式は解析学の最も重要なテーマであると言えるが、幾何学とも関係が深く、また数学以外の他の諸科学にも広範な応用を持つ。この講義は偏微分方程式論への入門を目的とする。偏微分方程式の代表的な三つの型（放物型、楕円型、双曲型）から、それぞれ典型的なケースを取り上げ、その性質を調べる。そのために必要となる解析手法や概念についても、将来への発展を見越した形で解説する。理解の助けとなるような様々な話をするが、幹となるのは、方法としては Fourier の方法、最大値原理、エネルギー保存則で、問題としては適切性である。

### 授業内容

#### [第1回] イントロダクション, 波動方程式 (1)

1次元波動方程式の初期値問題, d'Alembert (ダランベール) の公式と解の一意存在定理, 依存領域と影響領域の概念を説明する。

#### [第2回] 波動方程式 (2)

高次元空間での波動方程式の初期値問題, Duhamel (デュアメル) の原理, Fourier (フーリエ) 変換を用いた形式解の導出,

#### [第3回] 波動方程式 (3)

2次元3次元空間における解の公式, Huygens (ホイヘンス) の原理

#### [第4回] 波動方程式 (4)

1次元波動方程式の初期値境界値問題, エネルギー保存則, 解の一意性定理

#### [第5回] 熱方程式 (1)

熱方程式の導出と初期値境界値問題

Fourier の熱伝導の法則, 熱伝導方程式の導出, Dirichlet (ディリクレ) 境界条件と Neumann (ノイマン) 境界条件,

#### [第6回] 熱方程式 (2)

熱方程式の最大値原理, 古典解の一意性, 古典解の初期値に関する連続性

#### [第7回] 熱方程式 (3)

Fourier の方法による熱方程式の形式解の構成

- [第8回] 熱方程式 (4)  
Fourier の方法による形式解が解であることの証明
- [第9回] 熱方程式 (5)  
Fourier の方法とスペクトル分解, 解の漸近挙動
- [第10回] 熱方程式 (6)  
非同次方程式, 定常解への収束
- [第11回] Poisson (ポアソン) 方程式と Laplace (ラプラス) 方程式 (1)  
最大値原理, Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題の解の一意性
- [第12回] Poisson 方程式と Laplace 方程式 (2)  
2次元円盤領域における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題のフーリエの方法による解
- [第13回] Poisson 方程式と Laplace 方程式 (3)  
Green の公式, 調和関数の境界積分表示,  $-\Delta$  の基本解, 調和関数に関する Gauss の球面平均定理
- [第14回] Poisson 方程式と Laplace 方程式 (4)  
調和関数に関する Dirichlet の原理, 変分法
- [第15回] まとめ

## 履修の注意点

演習問題を出題し, 解答をレポートとして提出させる (期間中3回)。

## 教科書

使用しない。代わりに講義ノートを WWW ページで公開する。

## 参考書

- 藤田宏他, 数理物理に現われる偏微分方程式 I,II, 岩波書店
- 神保 秀一, 偏微分方程式入門, 共立出版 (2006)
- 俣野博・神保道夫, 熱・波動と微分方程式, 岩波書店
- ペトロフスキー, 偏微分方程式論, 東京図書



## 成績評価の方法

期間中3回のレポートは点数化して期末試験の点と加算する(レポート30%, 試験70%)。期末試験では講義した全範囲から偏りなく出題する。点数から成績への換算は大学の基準に従う(合格は60%以上)。

## その他

「多変数の微分積分学1」, 「多変数の微分積分学2」, 「微分方程式1」, 「実解析1」を履修していることが望まれる。研究室: 数学第14研究室 (生田第二校舎6号館7階6716B号室)  
ホームページ: <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/pde/> オフィスアワー: 授業中に学生と相談して決める。

## 0.2 学習の仕方についての注意

- この科目では、これまでに学んだこと(主に解析学関係のこと)を縦横無尽に利用する。内容を理解するためには、必要に応じて復習する努力が必要である。

(誤解を恐れずに言えば) これまで学んできた数学の多くが「何かのための基礎」であったのとは、かなり様相が異なる。実は、(偏)微分方程式の研究のために、多くの解析学が発達したという歴史的経緯がある。3年前期まではそれら偏微分方程式のための解析学を学んで来たが、いよいよ本丸である偏微分方程式に取り組む、というわけである。

- 週に1コマで14週(あるいは15週)という時間で、かなり豊富な内容を説明することになる。原則として完全な証明、十分な説明を与えるが、残念ながら授業中に十分な演習時間を確保することができない。
- レポートは必ず提出し、添削されたものをよく読んで理解しておくこと。  
(他人のレポートを写したものは、添削の意味がほとんどない。参考にするのは構わないが、自力で書き、添削されたものを見て反省することが絶対に必要である。)
- 過去問に関する情報は(解答例、解説なども含めて)WWWページで公開している。適宜利用すること。
- この文書はあくまでも「講義ノート」であり、テキストではない(明確な目的もなく端から順に読むことは勧められない)。授業の予習復習をするための道具として使うこと。  
普通に頭を働かせると疑問に思うようなことについて、突っ込んで書いてある部分がある。そういうものを全部読んで消化しようとするよりは、微分方程式の関数解析的な取り扱いを学ぶ方が有意義であると思う。

## 0.3 この講義の目標

この講義科目「微分方程式2」のテーマは、偏微分方程式 (partial differential equation, 略して PDE) の数理である。偏微分方程式の研究は解析学の王道と言うにふさわしいものだ、と筆者は考えているし、PDE は面白く、これについて講義をするのは大変に楽しい。

PDE とは多変数の微分方程式である ( $\leftrightarrow$  常微分方程式 (ordinary differential equation, ODE))。簡単に想像できるように PDE は ODE よりもかなり難しい。

**PDE の例** 以下頻出する  $\Delta$  は、<sup>ラプラス</sup>**Laplace作用素** (Laplace 演算子, Laplace operator, Laplacian) と呼ばれる微分作用素で

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

で定義される。

(i) 波動方程式 (wave equation)

$$u_{tt} = \Delta u.$$

ここで  $u = u(x, t)$  は未知関数である。

その名の通り、波動現象の記述に現れる。

(ii) 熱伝導方程式 (熱方程式, heat equation)

$$u_t = \Delta u.$$

やはり  $u = u(x, t)$  は未知関数である。

熱伝導現象、拡散現象などの記述に現れる。

(iii) <sup>ポアソン</sup>**Poisson 方程式** (Poisson equation)

$$-\Delta u = f.$$

ここで  $u = u(x)$  は未知関数、 $f = f(x)$  は既知関数である。

重力、静電場、熱平衡など色々な現象の記述に現れる。

この3つは次に述べる理由から「良い」代表例である。

- PDE (のある非常に広い範囲) を3つ (双曲型, 放物型, 楕円型) に分類することができるが、それぞれの典型例となっている。
- 簡単であるため<sup>1</sup>、取り扱いが比較的容易であるが、本質は失われていない。
- 物理的な意味を持ち (自然界に対応する現象があり)、歴史的にも早い段階で登場した。方程式の解の性質を物理的に考察することも出来て、理解に役立つ。

---

<sup>1</sup>双曲型、放物型、楕円型の偏微分方程式から、それぞれもっとも簡単な例を選べと言われたら、それぞれ波動方程式、熱伝導方程式、Poisson 方程式となる可能性が高い。

この講義では、Fourier 解析を主な道具として上の 3 つの方程式を解析することによって、偏微分方程式論の入門を行う。事前に偏微分方程式について、何も知っている必要はない。一つのことを深く突っ込んで調べるよりも、色々な面白い現象があることを見てもらおう、と意図して内容を選んだため、使う数学のレベルは「ほどほど」である。必要な予備知識は、微積分、線形代数、常微分方程式、それから Fourier 解析の初歩である (主なものは付録 B にまとめておいたので目を通してもらいたい)。

余談: 必要になる数学的道具立て PDE の研究には

1. Fourier 解析  
(Fourier 級数、Fourier 変換を使って解析する方法)
2. 変分法 (汎関数<sup>2</sup>の極大極小問題)
3. 積分方程式

という 3 つの道具が重要である。ところで、これらの道具は数学的に厳密に取り扱うのが難しい。それを遂行するため、<sup>ルベーク</sup> Lebesgue 積分論や関数解析 (無限次元版の解析学) ができた。もう少し別の言い方をすると、PDE とは無限次元空間 (具体的には関数空間) における方程式であり、その厳密な取り扱いには無限次元空間の解析学の誕生が必須であった (Fourier 解析、変分法、積分方程式の 3 つに共通して、無限次元を扱う難しさがああり、それを解決するために関数解析学が必要だった)。現在では、PDE の研究は、関数解析的な手法を駆使するものが主流になっている。現在のカリキュラムでは、4 年次に関数解析の入門的講義を行うことになっているので、この講義では関数解析を使わずにすませることになるが、随時、関数解析の必要性を宣伝するつもりである。

解析系の学生に: 偏微分方程式について深く学ぶ、偏微分方程式を研究するとなったら、関数解析の知識が欠かせず、少なくとも関数解析の入門部分はしっかりと学ぶ必要がある。本当は自分で関数解析の本を一冊通読する程度の努力が望まれるのだが、(諸君の先輩を見ると) 関数解析の授業の聴講にもなかなか身が入らない人が少なくないようである。確かに関数解析の内容は一見抽象的で、テキストを読んでもありがたみの分からないことが稀ではなく、とっつきが悪いようである。しかし実際は、極めて切実な要求から編み出された各種手法を整理してできた (本当に役に立つ) 理論であることを信じて、最初のうちはピンと来なくても、しばらくは我慢して学んでもらいたい。

## 0.4 参考書案内

興味があれば (出て来たら)、この勉強と並行して、あるいはこれが終わった後に、勉強してもらうことを願っている。いくつか参考書を紹介しておこう。

この講義の内容は基本的なものであるが、一冊の本でそれらすべてを含むようなものは、残念ながらないと思う (筆者には見つけられなかった)。

この講義の内容のかなりの部分 (特に 2, 3 章) は、藤田・池部・犬井・高見 [59] を種本にしている。教科書あるいは参考書に指定するのが自然なのだが、残念ながら現在は絶版であり、入手が難しい (と

---

<sup>2</sup>汎関数 (functional) とは、関数を変数とする関数のことである。手短かに言うと「汎関数とは関数の関数」。

は言え、岩波講座 基礎数学の分冊であるから、日本の大学の数学科の図書室だったら必ず置いてあるであろう)。熱方程式、Laplace 方程式、波動方程式のような基礎的な方程式が解説されているのは当然であるが、Maxwell の方程式、Navier-Stokes の方程式等に関する記述が載っている入門書は珍しい。著者によると、有名な数理解物理のテキストであるクーラン・ヒルベルト [25] (これも古典である) の現代版を目指したとあるが、和書ではユニークな内容かもしれない。

ペトロフスキー [69] には、入門レベルの偏微分方程式論全般に関する、オーソドックスな記述がある (著者はある時期、この分野の研究をリードした著名な研究者である)。大変に分厚いが、説明はいいねいで、学生の輪講にも適当な内容である (実は筆者の学部三年生の時の輪講のテキストであった)。現代の古典と言って良い。例えば、固有関数展開や Poincaré-Perron の方法、ポテンシャルの取り扱いなど、重要ではあるが、他の本ではきちんと書かれていない内容が紙数を惜しまず説明しており、貴重な存在である。この本も残念ながら絶版であり、入手が難しい。

熊ノ郷 [24] は偏微分方程式論の (現代的な) すぐれた入門書であり、必要なことが一通り要領よくきちんと書かれているだけでなく、擬微分作用素など後の勉強 (研究?) への発展につながる突っ込んだ記述もある (著者は擬微分作用素の研究で有名である)。偏微分方程式論を学ぶ学生は持っていて損をしない本である。

以上の二書は「純数学的」な内容で、藤田他 [59] と比べて偏微分方程式が記述する現象の解析が弱い嫌いがなくもない。それが物足りない読者には、例えば神保 [35], 俣野・神保 [72] が勧められる。ともに一流の研究者である著者達による、現代的なすぐれた入門書である。

草野 [23] は、扱っている方程式はこのノートと同じ 3 つの方程式だけだが、初等的なレベルながら幅広い親切な記述があつて、初学者には辞書的に使える便利な本である。豊富な演習問題がついているのも重宝する。

毛色の変わった本を一冊紹介しておこう。ファーロウ [58] は、工学系の著者によって書かれた本であり、数学的厳めしさは適度に押えて<sup>3</sup>、生き生きとした偏微分方程式の話が綴られている。副読本として大いに勧めたい本である (筆者は大好きである)。

現在比較的入手が容易な本の中で、(独断と偏見による) 筆者のお勧めは、神保 [35]、ファーロウ [58] である。

## その他の偏微分方程式の本

この講義の内容との適合性はあまり高くないが、偏微分方程式についての価値ある参考書はまだたくさんある。少し紹介する。

神保 [34] は、一冊の薄い本の中で常微分方程式と偏微分方程式を説明してある入門書であるが、類書に見られない記述もあり、面白い本である。

谷島 [77] は変分法に詳しく、超関数についても一通りの解説がある。他の本と重なるところが少ない。

金子 [20] は、内容豊富な本で、次のような特徴がある。(i) 方程式の立て方 (モデリング)、解き方という実的な内容のウェイトが大きい (数学書としては珍しい)、(ii) 数学的に難しい (証明を紹介できない) ことでも、内容の理解に役立つものならば遠慮無く言及するという書き方をしている<sup>4</sup>、(iii) 代数的解析的な話や、数値計算など、幅広い話題についても触れられている (非常にユニークである)。入手しやすいので、ぜひ一度手に取ってみることを勧める。問題意識を持つ人には、極めて刺激的な本であると思う。

<sup>3</sup>誤解のないよう断っておくと、読み易さを損なわない程度に、数学的にもなるべく正確であるよう、最大限の注意が払われている。

<sup>4</sup>数学書には、証明を書かない事実は一切紹介しないという禁欲的な本が結構多い。そうする気持ちも理解できないわけではないが、時々あまりにも不親切だと感じることもある。こういうサービス精神にあふれた本がもっと増えて欲しい。



堤 [47] は、解析系の学生にはこの講義の次に勉強するのに勧められそうな本である。超関数による偏微分方程式の取り扱いと入門書には珍しい Schrödinger 方程式が載っている。

村田・倉田 [76] は数学的にかなり高度の本である。偏微分方程式の現代理論がどんなものであるか知りたいという人に勧められる(これだけの内容を収めた和書は他にあまりない)。簡単には読みこなせない本であるが、むづかしい本にありがちな、素っ気ない感じはしない。姉妹版と言える井川 [4] は双曲型方程式に重点をおいた本であるが、初学者には同じ著者の [3] から取り掛かる方が良いかもしれない。

登坂・大西・山本 [50] は、一口に言う「逆問題の入門用テキスト」となるだろうが(現代の数理科学者が「適切性」の概念をどう捉えているか知りたい人は必読である)、偏微分方程式について基礎的なこともかなり書いてあって、意欲ある人の副読本として面白そうな本である。なお、山本 [78] はより気軽に読める逆問題の入門書である。

最後に古典を一冊。溝畑 [74] は、双曲型方程式の著名な研究者であった著者の知見を盛り込んだ由緒正しい専門書<sup>5</sup>と言えるだろう。最近の学生には、関数空間の記号などが標準からずれていて、一見取っつきにくい印象を与えるかもしれないが(何と言っても 40 年以上前の本である)、それで敬遠するのはもったいない。時間をかけて取り組むに値する本である。

## 余談 1

たまには教科書・参考書でない読み物を読むことを勧めたいが、そういう場合に勧められる本の中で、熱方程式のことを書いてあるものとして、久賀 [22] がある。アメリカの大学で講義した経験をもとにした「物理数学の講義から」、「クレージー熱伝導」という文章は楽しいし、やる気のある人には大変挑発的なところがあって素晴らしいと思う(こういうのが書ける人はやはり滅多にいないだろうな)。

## 最後に

このノートの中の記述に間違いを見つけた場合は、面倒でも教えていただけると幸いです。間違い以外に、これは書いておくべきだとか、ここの説明は分かりづらいので直した方が良く、というような改善意見も大歓迎です。電子メールのアドレスは katurada@meiji.ac.jp です。なお、WWW ページ (<https://m-katurada.sakura.ne.jp/lecture/pde/>) もあります。訂正情報などチェックしてもらえると幸いです。

---

<sup>5</sup>書かれている内容は、今では常識的になったことが多いが、これは時の流れ。

# 関連図書

- [1] 相川 弘明, 複雑領域上のディリクレ問題 — ポテンシャル論の観点から, 岩波書店 (2008).
- [2] V・I・アーノルド, 数理解析のパイオニアたち, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1999).
- [3] 井川 <sup>いかわ</sup> 満 <sup>みつる</sup>, 偏微分方程式論入門, 裳華房 (1996).
- [4] 井川 満, 偏微分方程式 2, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店 (1997).
- [5] 伊藤 清三, ルベーク積分入門, 裳華房 (1963).
- [6] 伊藤 清三, 偏微分方程式, 培風館 (1966).
- [7] 伊藤 清三, 拡散方程式, 紀伊国屋書店 (1979).
- [8] 今井 <sup>いさお</sup> 功, 複素解析と流体力学, 日本評論社 (1989).
- [9] 太田 浩一, マクスウェル理論の基礎 — 相対論と電磁気学, 東京大学出版会 (2002).
- [10] 太田 浩一, マクスウェルの渦 アインシュタインの時計, 現代物理学の源流, 東京大学出版会 (2005).
- [11] 岡本 <sup>ひさし</sup> 久・中村 <sup>しゅう</sup> 周, 関数解析 1, 2, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店 (1997).
- [12] 笠原 <sup>こうじ</sup> 皓司, 微分方程式の基礎, 朝倉書店 (1982).
- [13] 桂田 祐史, 多変数の微分積分学 1 講義ノート, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu1/> に掲載中。
- [14] 桂田 祐史, 多変数の微分積分学 2 講義ノート, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/> に掲載中。
- [15] 桂田 祐史, Laplacian と極座標, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/text/polar-laplace.pdf>
- [16] 桂田 祐史,  $y'' + py' + qy = f(x)$  の初期値問題の Green 関数, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/ode/green/green.pdf> (2007 年 12 月 23 日).
- [17] 桂田 祐史, 常微分方程式ノート, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/text/members/ODE.pdf> (1991 年～, 一般には公開していません).
- [18] 桂田 祐史, 熱方程式に対する差分法 I — 区間における熱方程式 —, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/text/heat-fdm-1.pdf> (1998 年～).
- [19] 桂田 祐史, 熱方程式に対する差分法 II — 円盤における熱方程式 —, <https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/text/heat-fdm-2.pdf> (1998 年～).
- [20] 金子 <sup>あきら</sup> 晃, 偏微分方程式入門, 東京大学出版会 (1998).

- [21] ジョージ・ガモフ (George Gamow) 著 (伏見 康治 訳), 重力の話, 河出書房新社 (1977).
- [22] 久賀 道郎, ドクトル・クーガーの数学講座 2, 日本評論社 (1992).
- [23] 草野 <sup>たかし</sup> 尚, 偏微分方程式, 朝倉書店 (1980).
- [24] 熊ノ郷 <sup>くまのこう</sup> 準 <sup>ひとし</sup>, 偏微分方程式, 共立出版 (1978, 2001 復刊).
- [25] クーラン、ヒルベルト, 数理物理学の方法, 齋藤 利弥 監訳, 東京図書 (1989).
- [26] ジェイムズ・グリック著, 上田 <sup>よしすけ</sup> 院亮監修, 大貫昌子訳, カオス — 新しい科学をつくる, 新潮文庫 (1991).  
James Gleick, Chaos — making a new science, Viking Penguin (1987).
- [27] T.W. ケルナー 著, 高橋 陽一郎 訳, フーリエ解析大全 上・下, 朝倉書店 (1996).
- [28] 小谷 眞一・俣野 <sup>またの</sup> 博, 微分方程式と固有関数展開, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店 (1998).
- [29] 小松 <sup>ひこさぶろう</sup> 彦三郎, Fourier 解析, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店 (1978).
- [30] A. N. コルモゴロフ他編, 藤田 宏 監訳, 19 世紀の数学 III — チェビシェフの関数論・常微分方程式・変分法・差分法, 朝倉書店 (2009).
- [31] 志賀 浩二, 固有値問題 30 講, 朝倉書店 (1991).
- [32] 志賀 浩二, 無限のなかの数学, 岩波書店 (1995).
- [33] 島倉 <sup>のりお</sup> 紀夫, 楕円型偏微分作用素, 紀伊國屋書店 (1978).
- [34] 神保 <sup>しゅういち</sup> 秀一, 微分方程式概論, サイエンス社 (1999).
- [35] 神保 秀一, 偏微分方程式入門, 共立出版 (2006).
- [36] 杉浦 光夫, 解析入門 I, 東京大学出版会 (1980).
- [37] 杉浦 光夫, 解析入門 II, 東京大学出版会 (1985).
- [38] 杉浦 光夫, ヒルベルトの問題から見た 20 世紀数学, 笠原 乾吉・杉浦 光夫 編, 20 世紀の数学 第 14 章, 日本評論社 (1998).
- [39] 杉浦 光夫, 横沼 健雄, ジョルダン標準形・テンソル代数, 岩波書店 (1990).
- [40] 鈴木 貴, 上岡 友紀, 偏微分方程式講義, 培風館 (2005).
- [41] 高桑 <sup>たかくわ</sup> 昇 <sup>しょういちろう</sup> 一郎, 微分方程式と変分法 — 微分積分で見えるいろいろな現象 —, 共立出版 (2003).
- [42] 高木 貞治, 解析概論 (改訂第 3 版), 岩波書店 (1983).
- [43] 高橋 <sup>れいじ</sup> 礼司, 複素解析, 東京大学出版会 (1990).
- [44] 竹之内 脩, フーリエ展開, 秀潤社 (1981).
- [45] チャンドラ・セカール (監訳 中村 誠太郎), チャンドラ・セカールのプリンキピア講義, 講談社 (1998).

- [46] 辻 正次・小松 勇作 編, 大学演習 函数論, 裳華房 (1959).
- [47] 堤 誉志雄, 偏微分方程式論, 培風館 (2004).
- [48] 寺沢 寛一, 自然科学者のための数学概論 増訂版改版, 岩波書店 (1983).  
初版は 1931 年。有名な「てらかん」。
- [49] 寺沢 寛一 (編), 自然科学者のための数学概論 応用編, 岩波書店 (1960).
- [50] 登坂 宣好, 大西 和榮, 山本 昌宏, 逆問題の数理と解法, 偏微分方程式の逆解析, 東京大学出版会 (1999).
- [51] 遠山 啓, 数学入門 (下), 岩波新書 G5, 岩波書店 (1960).
- [52] 遠山 啓, 矢野 健太郎 編, 100 人の数学者, 数学セミナー増刊, 日本評論社 (1971).
- [53] 中島 美知代,  $\varepsilon$ - $\delta$  論法とその形成, 共立出版 (2010).
- [54] 南雲 道夫, 偏微分方程式論, 朝倉書店 (1974, 復刊 2004).
- [55] アイザック・ニュートン (中野 猿人 訳), プリンシピア, 講談社 (1977).  
原著は *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687 年出版。このタイトルはしばしば「自然哲学の数学的原理」と訳される。
- [56] ジョン・フォン・ノイマン著, 井上健・広重・垣藤訳, 量子力学の数学的基礎, みすず書房 (1957).  
*John von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (1932).*
- [57] ファインマン, レイトン, サンズ 著, ファインマン物理学 III 電磁気学, 宮島 龍興 訳, 岩波書店 (1969).
- [58] スタンリー・ファローウ著 (伊理 正夫・伊理 由美 訳), 偏微分方程式 科学者・技術者のための使い方と解き方, 朝倉書店 (1996).
- [59] 藤田 宏, 池部 晃生, 犬井 鉄郎, 高見 穎郎, 数理物理に現われる偏微分方程式 I, II (岩波講座 基礎数学), 岩波書店 (1977, 1979).
- [60] 藤田 宏・黒田 成俊・伊藤 清三, 関数解析, 岩波書店 (1991).
- [61] 藤田 宏, 吉田 耕作, 現代解析入門, 岩波書店 (1991).  
前篇は藤田先生による常微分方程式, Fourier 解析, 超関数の解説, 後篇は吉田先生による Lebesgue 積分の解説である。
- [62] 藤田 宏, 理解から応用への関数解析, 岩波書店 (2007).  
岩波講座応用数学 (1995) からの単行本化。
- [63] 藤田 宏, 三訂版 応用数学, 放送大学出版協会 (2000).
- [64] ジョゼフ・フーリエ著, ガストン・ダルブー編, 竹下貞雄訳, 熱の解析的理論, 大学教育出版 (2005).  
有名な *Par M. Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier), Théorie analytique de la chaleur* (初版は Paris で 1822 年に出版される) の翻訳。
- [65] Jean Baptiste Joseph Fourier 著, 西村 重人 翻訳, 高瀬 正仁 翻訳, 監修, 解説, フーリエ 熱の解析的理論, 朝倉書店 (2019/10/15). 高瀬 [66] で知って以来、期待していたものの待望の出版。



- [66] 高瀬 正仁, フーリエの熱の解析的理論に見る微積分の基本定理, 数理解析研究所講究録, 第 1546 巻, pp. 41–54 (2007).
- [67] ハイム・ブレジス著, 藤田 宏 監訳, 小西 芳雄<sup>よしお</sup> 訳, 関数解析, 産業図書 (1988).
- [68] N. H. フレッチャー, T. D. ロッシング 著, 岸 憲史, 久保田 秀美, 吉川 茂 訳, 楽器の物理学, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2002).
- [69] I. G. Petrovskii (イ・ゲ・ペトロフスキー), 偏微分方程式論, 吉田耕作校閲／渡辺毅訳, 東京図書 (1958).
- [70] E. T. ベル著, 田中 勇, 銀林 浩 訳, 数学をつくった人々 上, 下, 東京図書 (1976).
- [71] 俣野 博, 常微分方程式入門, 岩波書店 (2003).
- [72] 俣野 博, 神保 道夫, 熱・波動と微分方程式, 岩波講座 現代数学への入門, 岩波書店 (1996). 2004 年単行本化されて入手が容易になった。
- [73] 松本 眞, リンゴが落ちたって万有引力は発見できないさ, 数学通信 第 4 巻 第 1 号 (1999). <http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/m-mat/NON-EXPERTS/SHIMINKOUEN1999/SUGAKUKAI/res5.pdf> から入手できます。
- [74] 溝畑 茂<sup>みぞはた</sup>, 偏微分方程式論, 岩波書店 (1965).
- [75] 溝畑 茂, 解析学小景, 岩波書店 (1997).
- [76] 村田 實<sup>みのる</sup>, 倉田 和浩, 楕円型・放物型偏微分方程式, 岩波書店 (2006). 岩波講座 現代数学の基礎の中の「偏微分方程式 1」 (1997) の単行本化である。
- [77] 谷島 賢二<sup>やじま</sup>, 物理数学入門, 東京大学出版会 (1994).
- [78] 山本昌宏, 逆問題入門, 岩波書店 (2002).
- [79] 吉岡 大二郎, 振動と波動, 東京大学出版会 (2005/7/20).
- [80] 吉田 耕作, 加藤 敏夫, 大学演習 応用数学 I, 裳華房 (1961).
- [81] D. ラウグヴィッツ著, 山本 敦之 訳, リーマン 人と業績, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998).  
Detlef Laugwitz, Bernhard Riemann 1826–1866; Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik (Vita Mathematica, Bd. 10) published by Birkhäuser Verlag AG (1996).
- [82] Sheldon Axler, Paul Bourdon, Ramey Wade, Harmonic Function Theory, second edition, Springer (2001).
- [83] Gerald B. Folland, Introduction to Partial Differential Equations, second edition, Princeton University Press (1995).
- [84] M. H. Protter and H. F. Weinberger, Maximum principles in differential equations, Springer-Verlag (1984).
- [85] Oliver Dimon Kellogg, Foundations of potential theory, Springer (1929).  
ペーパーバックで入手可能である。
- [86] O. Perron, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für  $\Delta u = 0$ , Math. Zeitschrift, **18** (1923), pp.42–54.

# 第1章 波動方程式

この章の内容は基本的なもので、大抵の偏微分方程式の入門書に載っている (例えば藤田・池部他 [59] や熊ノ郷 [24] など)。波動方程式を含む双曲型方程式に詳しい本としては、ペトロフスキー [69]、井川 [4]、溝畑 [74] などがある。

## 1.1 波動方程式とは

変数  $x, t$  の未知関数  $u = u(x, t)$  に関する微分方程式

$$\frac{1}{c(x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \Delta u(x, t) \quad (\Delta \text{ は変数 } x \text{ に関する Laplacian})$$

を波動方程式 (**wave equation**) と呼ぶ。ここで  $c = c(x)$  は速度の次元を持つ既知量である。

例えば、 $x$  軸の区間  $[0, L]$  に張られた弦の微小振動現象<sup>1</sup>について、時刻  $t$  における座標  $x$  の点の変位を  $u(x, t)$  とすると、適当な仮定の下に  $u$  は 1 次元の波動方程式

$$\frac{1}{c(x)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, L) \times (0, \infty))$$

を満たす (この方程式の導出については、例えば藤田・池部他 [59] を見よ)。ここで  $c(x)$  は

$$c(x) = \sqrt{\frac{T(x)}{\rho(x)}}$$

と表わされる。ただし  $T(x)$  は弦の張力、 $\rho(x)$  は弦の線密度を表わす。ともに正の値を取る量であるが、以下では  $T(x)$  は定数であると仮定する。さらに以下の議論のほとんどの場合  $\rho(x)$  も定数であると仮定するが、この場合は  $c(x)$  も定数となり、単位の取り替えのテクニックにより  $c(x) \equiv 1$  であるとして扱えばよいので、方程式としては

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

を考えれば十分である。

2次元の波動方程式で記述できるものとしては、膜の振動 (太鼓が典型例) がある。時刻  $t$ 、位置  $(x, y)$  における膜の変位  $u(x, y, t)$  は

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t)$$

---

<sup>1</sup>振幅が大きい場合には、 $\frac{1}{c^2} u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x}{1 + (u_x)^2} \right)$  という非線形の微分方程式になる。

という方程式に従う。 $T$  を単位長さあたりの張力、 $\rho$  を膜の面密度として、 $c$  は

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

で与えられる。

3次元の波動方程式で記述できる身近な現象としては、音波がある。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, z, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, z, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, y, z, t).$$

これについては、金子 [20] を見よ (私の不勉強のせいかもしれないが、音波の話が説明されている数学書を目にすることは少なく、[20] は貴重である)。

電磁気学の基礎方程式である Maxwell の方程式から、真空中 (電荷と電流密度が存在しない) の電場  $\vec{E}$ , 磁束密度  $\vec{B}$  が、ベクトル値関数版波動方程式を満たすことが導かれる (有名! )。

例 1.1.1 (Maxwell の方程式 (1873), 電磁波の予言) 真空中では、電場  $\mathbf{E}$ , 磁束密度  $\mathbf{B}$ , 電荷密度  $\rho$ , 電流密度  $\mathbf{j}$  は<sup>マクスウェル</sup>Maxwell の方程式 (Maxwell's equations)

$$(1.1.1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

を満たす<sup>2</sup> ( $c$  は光速,  $\varepsilon_0$  は真空の誘電率<sup>3</sup>である)。

特に電荷、電流密度が存在しない ( $\rho \equiv 0, \mathbf{j} \equiv \mathbf{0}$ ) とき、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

であるから、公式  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{f}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{f}$  を使って、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (-\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \Delta \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \Delta \mathbf{E} - \mathbf{0} \\ &= \Delta \mathbf{E}, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \nabla \times (c^2 \nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \Delta \mathbf{B} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \Delta \mathbf{B} - \mathbf{0} \\ &= \Delta \mathbf{B}. \end{aligned}$$

すなわち  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  とともに速さ  $c$  の波動方程式を満たす。Maxwell (James Clerk Maxwell, 1831–1879) はこの事実を知って、真空中を伝播する電磁波<sup>でんぱ</sup>の存在を予言した (1864 年)。それに従い 1887 年、Hertz (Heinrich Rudolph Hertz, 1857–1894) が実験で発生と検知に成功した。その伝播速度が光速とよく一致することから、光も一種の電磁波と予想された (光の電磁波説)。もちろん現在では、光や電波が電磁波であることは常識である。■

<sup>2</sup>Maxwell の著作を見ても、この微分方程式は見当たらない。はじめてこの微分方程式の形に書き下したのは Heaviside である。

<sup>3</sup>ちなみに、SI 単位系では、 $c = 299792458 \text{ m/s}$  (メートルの定義による),  $\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \cong 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ .

電磁気学の歴史については、太田 [9], [10] に詳しい。

波動については、ある程度まで詳しく、物理学として学習すべきかもしれない。私の専門外であるので、どういう本があるか詳しくないが、手に取った吉岡 [79] は、幅広い話題を読みやすく説明してあってお勧めできる (特に第5章「3次元の波動」と付録)。色々な楽器を取り上げているのも楽しい (楽器については、フレッチャー・ロッシング [68] という有名な専門書もあるが、[79] のような物理学の入門的なテキストに詳しく解説されているのは、良いことだと思う)。

問  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$  が等方弾性体の弾性波の方程式

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{u})$$

を満たすとき (ここで  $\rho, \mu, \lambda$  は正定数)、 $p := \operatorname{div} \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s} := \operatorname{rot} \mathbf{u}$  はそれぞれ

$$\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta p \quad (\text{P 波の方程式}),$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{s} \quad (\text{S 波の方程式})$$

を満たすことを示せ。— P 波 (primary wave) は S 波 (secondary wave) より速い。

(解答は p. 232) ■

念のため注意しておく、どんな波動現象でも波動方程式で記述できるというわけではない。例えば薄い板の振動は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = -\Delta^2 u(x, y, t)$$

という 4 階の偏微分方程式に従う (Kirchhoff-Love のモデル)。ここで

$$\Delta^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

## 1.2 1次元空間 $\mathbf{R}^1$ における波動方程式

### 1.2.1 d'Alembert の解

無限の長さの様な弦の振動を考えよう。言い換えると

$$(1.2.1) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R})$$

を満たす  $u = u(x, t)$  を考える。(  $c$  は正定数であると仮定する。 )

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を任意の  $C^2$  級の関数とすると、

$$(1.2.2) \quad u(x, t) := f(x - ct) + g(x + ct)$$

で定義される  $u$  が (1.2.1) を満たすことを確認するのは容易である (すぐ後で述べる)。実はその逆も成り立つ。定理としてまとめておこう。

定理 1.2.1 (波動方程式の一般解) (1) 任意の  $C^2$  級関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、 $u$  を (1.2.2) で定義すると、 $u$  は (1.2.1) を満たす。

(2)  $C^2$  級の関数  $u: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が (1.2.1) を満たすならば、(1.2.2) を満たす  $C^2$  級の関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が存在する。

証明 共に合成関数の微分法の応用である<sup>4</sup>。(1) は

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= f'(x - ct) \cdot (-c) + g'(x + ct) \cdot c, \\ u_{tt}(x, t) &= f''(x - ct) \cdot (-c)^2 + g''(x + ct) \cdot c^2 = c^2(f''(x - ct) + g''(x + ct)), \\ u_x(x, t) &= f'(x - ct) + g'(x + ct), \quad u_{xx}(x, t) = f''(x - ct) + g''(x + ct) \end{aligned}$$

より明らか。(2) については、変数変換  $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$  を

$$(1.2.3) \quad \xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

で定めて、 $v(\xi, \eta) = u(x, t)$  とおくと、まず

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -c \frac{\partial v}{\partial \xi} + c \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} = \left( -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( -c \frac{\partial v}{\partial \xi} + c \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = c^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned}$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}$$

となるが、 $u$  が波動方程式  $\frac{1}{c^2} u_{tt} = u_{xx}$  を満たすことから、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

<sup>4</sup>高校で、 $f$  が微分可能で、 $a$  と  $b$  を定数とすると、 $(f(ax + b))' = af'(ax + b)$  という公式を学んだ。ここで出て来る  $u$  は多変数関数であるが、偏微分の計算は1変数関数の微分と同じであるので、この高校数学の公式が適用できることに注意しよう。

これから  $\frac{\partial v}{\partial \eta}$  は  $\xi$  に依らない、つまり  $\eta$  だけの関数であることが分かる<sup>5</sup>:

$$\exists G \in C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}) \quad \text{s.t.} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = G(\eta).$$

$G$  の原始関数、すなわち  $g'(\eta) = G(\eta)$  となる関数  $g$  を1つ取ると、それは  $C^2(\mathbf{R}; \mathbf{R})$  の元であり、

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (v(\xi, \eta) - g(\eta)) = \frac{\partial v}{\partial \eta} - G(\eta) = 0.$$

これから  $v(\xi, \eta) - g(\eta)$  は  $\eta$  に依らない、つまり  $\xi$  だけの関数であることが分かる:

$$\exists f \in C^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}) \quad \text{s.t.} \quad v(\xi, \eta) - g(\eta) = f(\xi).$$

これから

$$u(x, t) = v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) = f(x - ct) + g(x + ct). \blacksquare$$

つまり (1.2.2) は、(1.2.1) の (いわゆる) 一般解を表わしていると考えられる<sup>6</sup>。この解を発見者にちなんで <sup>ダランベール</sup> **d'Alembert** の解と呼ぶ。 $f(x - ct)$  は  $x$  軸の正方向に速さ  $c$  で進む波、 $g(x + ct)$  は  $x$  軸の負方向に速さ  $c$  で進む波を表わしている。

余談 1.2.1 (1.2.2) や、(1.2.3) をどうやって見つけるのか? ということを説明すべきかも知れないが、ここではさぼらしてもらう。一つの回答は、

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

という微分作用素の因数分解が出来て、それぞれの因数が  $2\frac{\partial}{\partial \eta}$  と  $2\frac{\partial}{\partial \xi}$  になる、ということである。 ■

## 1.2.2 初期値問題, d'Alembert の波動公式

(1.2.1) を満たす解  $u = u(x, t)$  は無数に存在し、解を一つに特定するためには、何か他に条件を追加しなければならない。代表的なものは、特定の時刻 (ここでは  $t = 0$ ) における状態を指定する条件である。

$$(1.2.4) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

条件 (1.2.1) と (1.2.4) を同時に満たす  $u = u(x, t)$  を求めよ、という問題を初期値問題 (initial value problem) または **Cauchy 問題 (Cauchy problem)** と呼ぶ。また (1.2.4) を初期条

<sup>5</sup> 「 $f = f(x, y) \in C^1(\mathbf{R}^2; \mathbf{R})$  が  $f_x \equiv 0$  を満たすならば、 $f(x, y) = f(0, y)$  ( $\forall y \in \mathbf{R}$ ) が成り立つ。」という命題が簡単に証明できる。実際、一般に  $f(x, y) = f(0, y) + \int_0^x f_x(t, y) dt$  が成り立つことから証明できる。あるいは、平均値の定理を使っても証明できる。

<sup>6</sup> 「微分方程式の一般解を得てから、初期条件などの条件を用いて特定の解を選びだす」という手順は、常微分方程式の問題ではしばしば出て来たが、偏微分方程式の問題では滅多にない。この (空間) 1 次元の波動方程式は例外と言える。



件 (initial condition) と呼ぶ。波動方程式は時刻  $t$  について 2 階であることから、初期条件の式が二つになっていることに注目しよう。二つの関数  $\phi$  と  $\psi$  を初期値 (initial values) と呼ぶ。

前項で見たように、(1.2.1) を満たす  $u$  の一般形 (1.2.2) が得られた。そこで、初期条件 (1.2.4) を満たすように、(1.2.2) 中の  $f, g$  を定められれば初期値問題が解けることになるが、これが実際に可能であることを以下に示す。初期条件に (1.2.2) を代入すると

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \phi(x) \quad (x \in \mathbf{R}), \\ c(-f'(x) + g'(x)) &= \psi(x) \quad (x \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

となる。後者から

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(y) dy - f(0) + g(0) \quad (x \in \mathbf{R})$$

が得られるので、連立 1 次方程式を解いて

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left( \phi(x) - \frac{1}{c} \int_0^x \psi(y) dy + f(0) - g(0) \right), \\ g(x) &= \frac{1}{2} \left( \phi(x) + \frac{1}{c} \int_0^x \psi(y) dy - f(0) + g(0) \right). \end{aligned}$$

これから

$$(1.2.5) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}(\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

これを <sup>ダランベール</sup> d'Alembert の波動公式あるいは Stokes の公式と呼ぶ (Euler による、1750 年頃の結果<sup>7)</sup>。

以上をまとめると次の定理を得る。

**定理 1.2.2** (1 次元波動方程式の初期値問題の解の一意存在)  $\phi \in C^2(\mathbf{R}), \psi \in C^1(\mathbf{R})$  ならば、波動方程式の初期値問題 (1.2.1), (1.2.4) の  $C^2$  級の解が一意的に存在し、それは d'Alembert の波動公式 (1.2.5) で与えられる。

興味があったらやってみよう 次の各場合に d'Alembert の波動公式で解を計算し、それがどういう波を表わすか考えてみよう (コンピューターが使える場合、アニメーションを表示してみよう<sup>8)9)</sup>。

<sup>7</sup>Euler が得た結果なのに、なぜ d'Alembert や Stokes の名を冠されるのだろうか？ ともあれ、簡単であるから 1750 年という早い時期に解けたのだろうが、偏微分方程式の問題がこんなに簡単かつ鮮やかに解けるのは奇跡のような気がする。

<sup>8</sup>筆者の卒研の学生 (2001 年度卒研生三井康之君) が作った WWW ページ (<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~ee88010/>) にアクセスするという手もある。— これはリンク切れしている。そもそも Java の仕様変更で、Java Applet は廃止されたので、復活させるのは難しい。

<sup>9</sup>実は (2) の場合、d'Alembert の波動公式に機械的に代入することによって  $u$  は簡単に「求まる」が、不連続関数になってしまう。不連続関数をどうやって微分方程式の解と考えるのか、頭をひねらねばならないところがあるが、この結果は物理的にそれなりにもっともなものになっている。この辺りの事情は後述する熱伝導方程式とは対照的である。熱伝導方程式の解は、最初に不連続性があっても、すぐに解は滑らかになってしまいが、波動方程式の解においては、不連続性は消滅せずに伝搬していく。実用面から見ても、波動現象においては、衝撃波のような、不連続な関数で表現するほうがむしろ適切なものを扱う必要があるため、これは重要な問題である。

$$(1) \phi(x) = \sin x, \psi(x) \equiv 0.$$

$$(2) \phi(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (-1, 1)) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}, \psi(x) \equiv 0.$$

$$(3) \phi(x) = 0, \psi(x) = \sin x.$$

### 1.2.3 依存領域、影響領域、伝播速度

初期値問題に対する d'Alembert の波動公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

を見ると、上半平面の任意の点  $(x_0, t_0)$  ( $t_0 > 0$ ) を任意に固定したとき、その点での  $u$  の値  $u(x_0, t_0)$  は、 $\phi$  の  $x_0 \pm ct_0$  での値と、 $\psi$  の区間  $I := [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  での値によって定まり、 $I$  の補集合における初期値には一切関係がない。こうしたことから、 $I$  を  $(x_0, t_0)$  の依存領域 (domain of dependence) と呼ぶ<sup>10</sup>。

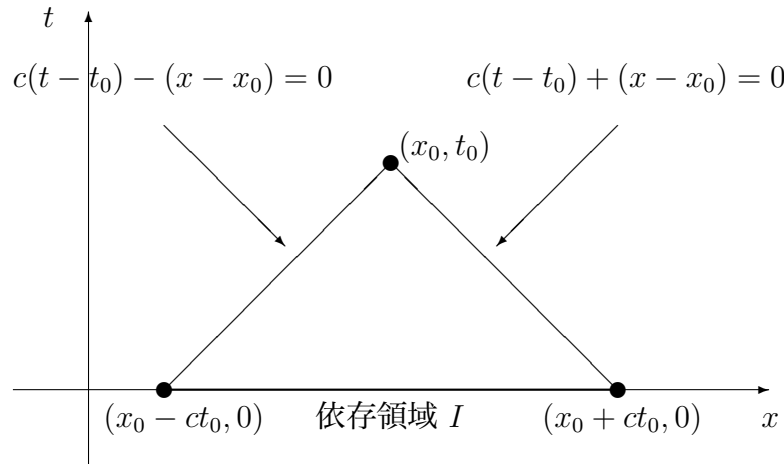


図 1.1:  $(x_0, t_0)$  の依存領域

逆に、 $x$  軸上の点  $(x', 0)$  を固定すると、この点での初期値  $\phi, \psi$  の値によって、 $u(x, t)$  の値が変化する  $(x, t)$  の集合は

$$\Sigma := \{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}; c|t| \geq |x - x'|\}$$

となる。この  $\Sigma$  を点  $(x', 0)$  の影響領域 (domain of influence) という<sup>11</sup>。

<sup>10</sup>この講義では、(特に断りのない限り、現代の数学の慣習に従って)「領域」という言葉を連結開集合の意味で用いているが、この「依存領域」は開集合でないので「領域」ではない。なお、 $\{(x, t); |x - x_0| \leq c(t - t_0)\}$  という集合 ( $(x_0, t_0)$  を頂点とする下側に開いた錐) のことを依存領域と呼ぶ流儀もある。

<sup>11</sup>この影響領域も開集合ではないので、「領域」ではない。



(これまで授業では、黒板に図を描いて色々ジェスチャー付きで説明して、「この  $\Sigma$  に属する点は、 $(x', 0)$  で値の変更の影響を受ける」と結論してきたが、後でノートを読んでも分かりづらい、と指摘されたので、以下、式による説明を試みる。

$$\begin{aligned}
 (x, t) \text{ が影響領域に含まれる} &\Leftrightarrow x' \text{ が } (x, t) \text{ の依存領域に含まれる} \\
 &\Leftrightarrow x' \in [x - c|t|, x + c|t|] \\
 &\Leftrightarrow x - c|t| \leq x' \leq x + c|t| \\
 &\Leftrightarrow -c|t| \leq x' - x \leq c|t| \\
 &\Leftrightarrow |x - x'| \leq c|t|.
 \end{aligned}$$

最初からこうした方が良かったか？ )

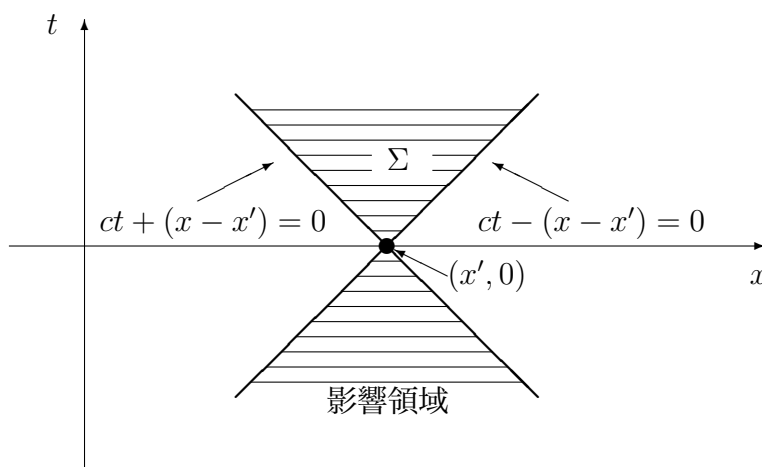


図 1.2:  $(x', 0)$  の影響領域

物理的に説明すると、波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

について、初期値の<sup>でんぱそくど</sup>伝播速度 (propagation speed, speed of propagation) は  $c$  である、と言えるであろう。

(某年某月某日記す: この項での依存領域、影響領域についての説明は、よく見かけるものだが、もう少し(時間をかけて、紙幅をとって)説明した方が良かったかもしれない、と最近では反省している。今さら時間を取って書き足す余裕はないが、もし書き足すとしたら、例えば(初等的ではあるけれど)ファローウ [?] の第 18 課に書いてあることとか。)

### 1.3 $\mathbf{R}^n$ における初期値問題

「空間変数」 $x$  の属する空間の次元を 1 より大きい  $n$  とすると難しくなるが、 $x$  が動く範囲が全空間  $\mathbf{R}^n$  である場合はやや単純で、比較的容易に扱うことができる。具体的には例え

ば Fourier 変換を用いて、初期値問題の解の公式を得ることができる。Fourier 変換は無限領域における積分で定義されるので、積分の収束を真面目に問題にするとかなり面倒だが、ここではその点には目をつむって (「形式的計算」) 議論することにする。

### 1.3.1 <sup>デュアメル</sup> Duhamel の原理

(以下の議論に現れる関数 (いずれも既知とする)  $F: \mathbf{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\psi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  について、どういう条件が成り立っていないかについては、あまり詳しく書かないことにする。)

$$(1.3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) + F(x, t) & ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty)), \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) & (x \in \mathbf{R}^n) \end{cases}$$

という非同次の初期値問題を解くために、その特別な場合である、次の 3 つの初期値問題を考えよう。

問題 1  $F \equiv 0$ ,  $\phi \equiv 0$  の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \Delta v(x, t) & ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty)), \\ v(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) & (x \in \mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

問題 2  $F \equiv 0$ ,  $\psi \equiv 0$  の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \Delta w(x, t) & ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty)), \\ w(x, 0) &= \phi(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0 & (x \in \mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

問題 3  $\phi \equiv 0$ ,  $\psi \equiv 0$  の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \Delta U(x, t) + F(x, t) & ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty)), \\ U(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 0 & (x \in \mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

まず  $v, w, U$  が求まれば、 $u$  は

$$u := v + w + U$$

で求まることは明らかである (広い意味での重ね合わせの原理, the superposition principle, principle of superposition)。

ところで、実は  $v$  についての問題 1 が一般に解ければ、以下に示すように、それを用いて  $w, U$  についての問題 2, 3 を解くことができ、結局  $u$  についての問題が解けることになる。こ

れを <sup>デュアメル</sup> Duhamel の原理 (Duhamel's principle) という<sup>12</sup>。

<sup>12</sup>Jean Marie Constant Duhamel (1797–1872, フランスの St Malo に生まれ、Paris にて没する)。

問題 1 の解で問題 2 の解を作る

問題 1 の解を  $v_\psi$  と書くことにして、 $w := \frac{\partial v_\phi}{\partial t}$  とおくと、 $w$  は問題 2 の解になる。すなわち次が成り立つ。

補題 1.3.1  $v$  が

$$\begin{aligned} v_{tt}(x, t) &= c^2 \Delta v(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty)), \\ v(x, 0) &= 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n), \quad v_t(x, 0) = \phi(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

を満すとき、 $w := v_t$  とおくと、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} w_{tt}(x, t) &= c^2 \Delta w(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty)), \\ w(x, 0) &= \phi(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n), \quad w_t(x, 0) = 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

証明 単なる計算である (とは言え、一つ一つしっかりと確認する必要がある)。

$$w_t = v_{tt} = c^2 \Delta v,$$

$$w_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} w_t = \frac{\partial}{\partial t} (c^2 \Delta v) = \frac{\partial}{\partial t} \left( c^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} v \right) = c^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{\partial}{\partial t} v = c^2 \Delta \left( \frac{\partial}{\partial t} v \right) = c^2 \Delta w,$$

$$w(x, 0) = v_t(x, 0) = \phi(x),$$

$$w_t(x, 0) = v_{tt}(x, 0) = c^2 \Delta v(x, 0) = c^2 \Delta 0 = 0. \blacksquare$$

$f: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbf{R}$  が  $f(x, 0) = 0$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) を満たすことから、 $f_x(x, 0) = 0$  は導けるが、 $f_y(x, 0) = 0$  は導けない。このことを理解して用心深く計算する必要がある。 $v(x, 0) = 0$  ( $x \in \mathbf{R}^n$ ) から  $v_{x_i}(x, 0) = 0$ ,  $v_{x_i x_i}(x, 0) = 0$  ( $x \in \mathbf{R}^n$ ) が成り立つので、 $\Delta v(x, 0) = 0$  ( $x \in \mathbf{R}^n$ ) とするのは正しい計算である。

注意 1.3.2 (以上の議論の逆も可能) 問題 2 が先に解けた場合は、それを  $t$  について積分することで問題 1 の解が得られることになる。詳しいことは省略する。 ■

この時点で同次波動方程式  $u_{tt} = c^2 \Delta u$  の初期値問題の解の公式が得られる。

ここまでのまとめ (せめてこれだけでも覚えてもらえると...) —————

波動方程式の初期値問題

(1.3.2)

$$u_{tt}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) \quad (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}), \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad (\mathbf{R}^n), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (\mathbf{R}^n)$$

について、 $\phi \equiv 0$  の場合の解を  $v_\psi$  と書くことにすると、

$$u := \frac{\partial}{\partial t} v_\phi + v_\psi$$

は (1.3.2) の解を与える。

問題 1 の解で問題 3 の解を作る

(この部分は「定数変化法である」という人もいる (例えばペトロフスキー [69], 第 2 章 §12)。)

$$(1.3.3) \quad U(x, t) := \int_0^t v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) ds$$

とおく。ここで  $v_{F(\cdot, s)}$  は、 $s$  をパラメーターとして含む問題

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \Delta v(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty)), \\ v(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = F(x, s) \quad (x \in \mathbf{R}^n) \end{aligned}$$

の解  $v$  である。 $(F(\cdot, s))$  は  $s$  を固定したときに定まる 1 変数関数  $\mathbf{R}^n \ni y \mapsto F(y, s) \in \mathbf{R}$  のことを意味する<sup>13</sup>。もう少し具体的な式で見たい場合は、1 次元の場合ではあるが、後述の例 1.3.3 を参考にしよう。)

まず明らかに

$$U(x, 0) = \int_0^0 \text{被積分関数 } ds = 0.$$

一方

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) ds + v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) \Big|_{s=t} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) ds$$

より

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = \int_0^0 \text{被積分関数 } ds = 0.$$

さらに

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) &= \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) ds + \frac{\partial}{\partial t} v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) \Big|_{s=t} \\ &= \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) ds + F(x, t), \\ \Delta U(x, t) &= \int_0^t \Delta v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) ds \end{aligned}$$

により

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \Delta U(x, t) &= \int_0^t \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) - c^2 \Delta v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) \right) ds + F(x, t) \\ &= \int_0^t 0 ds + F(x, t) = F(x, t). \end{aligned}$$

ゆえに  $U$  は問題 3 の解である。■

<sup>13</sup> 良くある質問に、「では  $F(y, s)$  と書けば良いのでは？」というのがあるが、 $F(y, s)$  は  $(y, s)$  における  $F$  の値と紛らわしい。

例 1.3.3 (1次元の場合) 1次元の場合、d'Alembert の波動公式から

$$v_\psi(x) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy,$$

$$w(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x - ct) + \phi(x + ct))$$

である ( $\frac{\partial v_\phi}{\partial t} = w$  が成立していることの確認は難しくない)。これから

$$v_{F(\cdot, s)}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} F(y, s) dy.$$

(余談であるが、右辺の積分は変数を  $y$  でないもの、例えば  $z$  に変えて  $\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} F(z, s) dz$  としても同じことである。一方で、 $s$  を他の文字に変えることは出来ない。 $F(\cdot, s)$  という記法の合理性を納得してもらえれば幸いである。)

ゆえに

$$(1.3.4) \quad U(x, t) = \int_0^t v_{F(\cdot, s)}(x, t-s) ds = \int_0^t \left( \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy \right) ds$$

$$= \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y, s) dy ds. \blacksquare$$

余談 1.3.1 (定数係数線形常微分方程式との比較) 大抵の常微分方程式の本に載っている事実 (普通「定数変化法」で解くように指示される)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad x(0) = 0 \quad \text{の解は} \quad x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds$$

は、

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = 1$$

の解を  $G(t)$  として、

$$x(t) := \int_0^t G(t-s) f(s) ds$$

とおくと、

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad x(0) = 0$$

が成り立つ、と言い換えられる。

この事実は、 $n$  階方程式にも拡張できる。「 $n$  階定数係数線形常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0, \\ x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

の解  $G(t)$  を取ると、

$$(1.3.5) \quad \begin{cases} x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = F(t), \\ x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = x^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

の解は

$$(1.3.6) \quad x(t) = \int_0^t G(t-s)F(s) ds$$

で与えられる (自分で証明を試みることを勧めるが、読みたければ例えば桂田 [16])。ここに  
出て来る  $G(t)$  を使うと、

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0, \\ x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = F(s) \end{cases}$$

の解は  $G(\cdot)F(s): t \mapsto G(t)F(s)$  であるから、これを  $v_{F(s)}$  と書くと、

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = F(t), \\ x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = x^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

の解は

$$x(t) = \int_0^t v_{F(s)}(t-s) ds$$

で与えられる、と言うことが出来る。問題1の解から問題3の解を作る手順はこれとそっくりだ。 ■

問 (1.3.6) が (1.3.5) の解になっていることを確かめよ (単純な計算をするだけ)。

問 定数  $\omega > 0$ ,  $a, b$  と連続関数  $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられたとき

$$x''(t) = -\omega^2 x(t) + F(t), \quad x(0) = a, \quad x'(0) = b$$

の解を求めよ。(少なくとも  $F \equiv 0$  の場合は解いてみることを勧める。)

### 1.3.2 Fourier 変換による解の表示

(Fourier 変換は非常に強力であるが、広義積分で定義されていて、厳密な扱いが少し難しい。そのため、この講義ではあまり使わないことにするが、形式的な計算だけでも紹介しておくのは有意義であろう。)

(上で調べたように、一般的な問題 (1.3.1) は、問題1を解くことに帰着されることが分かったわけだが) 実は問題1の解は次のように書ける。

$$(1.3.7) \quad v(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|} \hat{\psi}(\xi) d\xi.$$

ここで  $i$  は虚数単位であり、 $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$  ( $\mathbf{R}^n$  の内積), そして  $\hat{\psi}$  は  $\psi$  の Fourier 変換である:

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \psi(x) dx \quad (\xi \in \mathbf{R}^n).$$

この公式 (1.3.7) の (一つの) 厳密な定式化<sup>14</sup>と証明は、例えば熊ノ郷 [24] に載っている。 $\mathbf{R}^n$  上の積分の議論は面倒だが、形式的な計算は以下に紹介するように簡単である。

<sup>14</sup>例えば積分が存在するために、関数の範囲を適切に制限するなど。

## 証明のアウトライン

Fourier 変換と微分の関係<sup>15</sup>

$$\widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \widehat{v}(\xi)$$

より

$$\widehat{\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}}(\xi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}}(\xi) = (i\xi_j)^2 \widehat{v}(\xi) = -\xi_j^2 \widehat{v}(\xi).$$

これを  $j = 1, 2, \dots, n$  について加えて、Laplacian の Fourier 変換に関する公式

$$\widehat{\Delta v}(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{v}(\xi)$$

が得られる。これと波動方程式  $v_{tt} = c^2 \Delta v$  から

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 \widehat{v}(\xi, t) = -c^2 |\xi|^2 \widehat{v}(\xi, t)$$

が成り立つことが導かれる。これは (パラメーター  $\xi$  は付くものの) 定数係数 2 階線形常微分方程式であり<sup>16</sup>、容易に

$$\widehat{v}(\xi, t) = A(\xi) \cos(c|\xi|t) + B(\xi) \sin(c|\xi|t)$$

と解くことが出来る。ここで  $A(\xi), B(\xi)$  は任意定数であるが、初期条件から得られる条件

$$\widehat{v}(\xi, 0) = 0, \quad \frac{d\widehat{v}}{dt}(\xi, 0) = \widehat{\psi}(\xi)$$

から

$$A(\xi) \equiv 0, \quad B(\xi) = \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{c|\xi|}$$

と定められる。ゆえに

$$\widehat{v}(\xi, t) = \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|} \widehat{\psi}(\xi).$$

これを逆 Fourier 変換すると (1.3.7) を得る<sup>17</sup>。■

これから、この節の最初にあげた初期値問題の解  $u$  は (デュアメルの原理によって)

$$(1.3.8) \quad u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \left[ \cos(c|\xi|t) \widehat{\phi}(\xi) + \frac{\sin(c|\xi|t)}{c|\xi|} \widehat{\psi}(\xi) \right] d\xi \\ + \int_0^t \left[ \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \frac{\sin(c|\xi|(t-s))}{c|\xi|} \widehat{F}(\xi, s) d\xi \right] ds$$

<sup>15</sup>形式的な証明は、 $\int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) dx = - \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix \cdot \xi} \cdot v(x) dx = i\xi_j \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} v(x) dx$  と「部分積分一発」である。積分の収束などきちんとやるのはそれなりに手間がかかる。

<sup>16</sup>実は、有名な単振動の方程式  $x''(t) = -\omega^2 x(t)$  である ( $\omega = c|\xi|$ )。この一般解として  $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$  ( $A, B$  は任意定数) が取れるのは、理工系の常識である。

<sup>17</sup>Fourier の反転公式  $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$  による。余談であるが、「変換」という言葉には元に戻せる、というニュアンスがある。

で与えられる。ただし  $\widehat{F}(\xi, s)$  は、 $s$  をパラメーターとみなした  $x$  の関数  $x \mapsto F(x, s)$  の Fourier 変換である。すなわち

$$\widehat{F}(\xi, s) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} F(x, s) dx.$$

### 1.3.3 $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ における初期値問題の解の簡単な公式

1.3.2 で与えた、Fourier 変換を用いた解の公式 (1.3.8) は、解の性質を調べるには若干使いにくいところがある<sup>18</sup>。ここでは空間次元  $n$  が 2 または 3 の場合に、より分かりやすい解の公式 (Kirchhoff<sup>19</sup> の公式 (Kirchhoff's formula), Poisson<sup>20</sup> の公式) を紹介しよう。

$$(1.3.9) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty)),$$

$$(1.3.10) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

ただし、正の定数  $c$  と関数  $\phi, \psi$  は与えられているとする。

**定理 1.3.4**  $c > 0, \phi \in C^3(\mathbf{R}^n), \psi \in C^2(\mathbf{R}^n)$  とするとき、初期値問題 (1.3.9), (1.3.10) の解は次式で与えられる。

(1)  $n = 3$  の場合 (キルヒホフ (Kirchhoff) の波動公式)

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \int_{|y-x|=ct} \phi(y) d\sigma_y \right) + \frac{1}{t} \int_{|y-x|=ct} \psi(y) d\sigma_y \right].$$

ただし  $d\sigma_y$  は面積要素を表す。

(2)  $n = 2$  の場合 (ポアソン (Poisson) の波動公式)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{|y-x| \leq ct} \frac{\phi(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right) + \int_{|y-x| \leq ct} \frac{\psi(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right].$$

(この公式は少し複雑そうに見えるが、デュアメル原理を思い出せば、半分だけ覚えれば良いことが分かる。すなわち  $\psi$  のある項 (右辺第 2 項) の  $\psi$  を  $\phi$  で置き換えて  $\frac{\partial}{\partial t}$  をつけると、もともと  $\phi$  のある項 (右辺第 1 項) になる。)

<sup>18</sup>例えば、依存領域や影響領域が何であるか読み取れますか？

<sup>19</sup>Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887, Königsberg に生まれ、Berlin にて没する) は、電気回路の Kirchhoff の法則、黒体放射の Kirchhoff の放射法則、フラウンホーファー線がナトリウムのスペクトルであることの発見などで有名な物理学者。

<sup>20</sup>Siméon Denis Poisson (1781–1840, フランスの Pithiviers に生まれ、Sceaux にて没する。)



補題 1.3.5 ( $\mathbf{R}^3$  の Laplacian の極座標表示)  $\mathbf{R}^3$  における Laplacian  $\Delta \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$  を極座標表示すると

$$(1.3.11) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot u) + \frac{1}{r^2} \Delta_S u.$$

ただし  $\Delta_S$  は次式で定義される作用素で、球面上の **Laplace-Beltrami 作用素 (Laplace-Beltrami operator)** と呼ばれる。

$$(1.3.12) \quad \begin{aligned} \Delta_S u &:= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}. \end{aligned}$$

この補題の証明は省略する (微積分の演習問題である)。例えば桂田 [13] の付録, あるいは [15] を見よ。

定理 1.3.4 の証明 (1) (キルヒホッフの公式) 任意の  $x \in \mathbf{R}^3$  を固定して、各  $r > 0, t \geq 0$  に対して、球面  $|y - x| = r$  上の  $u(y, t)$  の平均値を  $\tilde{u}(r, t)$  とおく:

$$\tilde{u}(r, t) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} u(y, t) d\sigma_y.$$

主張 1  $\frac{1}{c^2} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{rr} + \frac{2}{r} \tilde{u}_r$  がなりたつ。

証明  $x$  を中心とする極座標

$$y = x + r\omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad ((\theta, \phi) \in \Sigma := [0, \pi] \times [0, 2\pi])$$

を用いると  $d\sigma_y = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$  となり、

$$\tilde{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(\theta, \phi) \in \Sigma} u(x + r\omega, t) \sin \theta d\theta d\phi.$$

積分記号化の微分は容易に正当化できて

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \tilde{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(\theta, \phi) \in \Sigma} \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 u(x + r\omega, t) \sin \theta d\theta d\phi.$$

$u$  は  $\frac{1}{c^2} u_{tt} = \Delta u$  の解であるから、

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \tilde{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(\theta, \phi) \in \Sigma} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S \right] u(x + r\omega, t) \sin \theta d\theta d\phi.$$

(1.3.12) と、

$$\int_0^\pi \frac{d}{d\theta} (\sin \theta F(\theta)) d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\phi} (G(\phi)) d\phi = 0 \quad (G \text{ は周期 } 2\pi \text{ の関数})$$

を考えると  $\triangle_S$  の項は落として

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \tilde{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(\theta, \phi) \in \Sigma} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] u(x + r\omega, t) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

再び積分と微分の順序交換をして

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \tilde{u}(r, t) &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{1}{4\pi} \iint_{(\theta, \phi) \in \Sigma} u(x + r\omega, t) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \tilde{u}(r, t). \end{aligned}$$

主張 2.  $v(r, t) := r\tilde{u}(r, t)$  とおくと  $\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru(r)) = ru_{rr} + 2u_r \right)$  という式変形に注意すると)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} v_{tt}(r, t) &= v_{rr}(r, t) \quad ((r, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)), \\ v(r, 0) &= r\tilde{\phi}(r), \quad v_t(r, 0) = r\tilde{\psi}(r) \quad (r \in (0, \infty)) \end{aligned}$$

ただし

$$\tilde{\phi}(r) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} \phi(y) \, d\sigma_y, \quad \tilde{\psi}(r) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} \psi(y) \, d\sigma_y.$$

主張 3.  $\tilde{u}(\cdot, t)$ ,  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\psi}$  を偶関数拡張して  $\mathbf{R}$  全体に延ばすとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} v_{tt}(r, t) &= v_{rr}(r, t) \quad ((r, t) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)), \\ v(r, 0) &= r\tilde{\phi}(r), \quad v_t(r, 0) = r\tilde{\psi}(r) \quad (r \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

ラスト d'Alembert の波動公式から

$$(\star) \quad v(r, t) = \frac{1}{2} \left( (r + ct)\tilde{\phi}(r + ct) + (r - ct)\tilde{\phi}(r - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} s\tilde{\psi}(s) \, ds.$$

両辺を  $r$  で割って、 $r \rightarrow 0$  とした極限を考える。

まず左辺については (平均値の極限が被積分関数になる、という良くある話で)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r} v(r, t) \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{u}(r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} u(y, t) \, d\sigma_y = u(x, t).$$

( $\star$ ) の右辺第 1 項については、 $\tilde{\phi}$  が偶関数であることに注意して

$$\frac{1}{2r} \left[ (r + ct)\tilde{\phi}(r + ct) + (r - ct)\tilde{\phi}(r - ct) \right] = \frac{(ct + r)\tilde{\phi}(ct + r) - (ct - r)\tilde{\phi}(ct - r)}{2r}$$

が関数  $s\tilde{\phi}(s)$  についての差分商であることに気がつく

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \left[ (r + ct)\tilde{\phi}(r + ct) + (r - ct)\tilde{\phi}(r - ct) \right] &= \frac{d}{ds}(s\tilde{\phi}(s)) \Big|_{s=ct} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (t\tilde{\phi}(ct)). \end{aligned}$$

(★) の右辺第 2 項については、

$$F(\xi) := \int_0^\xi s\tilde{\psi}(s) ds$$

とおくと、( $\psi$  が偶関数であるから)  $F$  は偶関数であり、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} s\tilde{\psi}(s) ds &= \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2r} (F(r+ct) - F(r-ct)) \\ &= \frac{1}{c} \cdot \frac{F(ct+r) - F(ct-r)}{2r} \\ &\rightarrow \frac{1}{c} F'(ct) = \frac{1}{c} \cdot ct\tilde{\psi}(ct) = t\tilde{\psi}(ct). \end{aligned}$$

以上まとめると

$$\begin{aligned} u(x, t) &= t\tilde{\psi}(ct) + \frac{\partial}{\partial t}(t\tilde{\phi}(ct)) \\ &= t \cdot \frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{|y-x|=ct} \psi(y) d\sigma_y + \frac{\partial}{\partial t} \left( t \cdot \frac{1}{4\pi(ct)^2} \int_{|y-x|=ct} \phi(y) d\sigma_y \right) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \left( \int_{|y-x|=ct} \frac{\psi(y)}{t} d\sigma_y + \frac{\partial}{\partial t} \int_{|y-x|=ct} \frac{\phi(y)}{t} d\sigma_y \right). \end{aligned}$$

定理の証明の途中であるが、問題を二つほどおいておく。(主張 3 の証明で  $(0, \infty)$  における初期値境界値問題が現れたが、これについては章末の練習問題で詳しく扱う。)

問題 主張 1 の証明中で、被積分関数中に  $\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$  を含む式が現れる。これを  $\theta$  について  $[0, \pi]$  で積分しているが大丈夫か。きちんと正当化せよ。

問題 主張 3 の方程式に現れる初期値  $\phi(r) := r\tilde{\phi}(r)$ ,  $\psi(r) := r\tilde{\psi}(r)$  について、d'Alembert の波動公式を用いるためには、 $\phi$  が  $C^2$  級,  $\psi$  が  $C^1$  級でなければならない。この点が大丈夫か確認せよ。(自力で詰まったら G.2 (p. 233) を見よ。)

(2) (Poisson の波動公式) Hadamard の次元降下法 (変数低減法とも言う) という論法を用いる。

$u$  が 2 次元波動方程式の初期値問題の解であるとき、

$$\tilde{u}(x, y, z, t) := u(x, y, t), \quad \tilde{\phi}(x, y, z) := \phi(x, y), \quad \tilde{\psi}(x, y, z) := \psi(x, y)$$

とおくと、 $\tilde{u}$  は 3 次元波動方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \tilde{u}_{tt}(x, y, z, t) &= \Delta \tilde{u}(x, y, z, t) \quad ((x, y, z, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}), \\ \tilde{u}(x, y, z, 0) &= \tilde{\phi}(x, y) \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3), \quad \tilde{u}_t(x, y, z, 0) = \tilde{\psi}(x, y) \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3) \end{aligned}$$

の解となる。Kirchhoff の公式から

$$(1.3.13) \quad \tilde{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=ct} \tilde{\phi}(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \right) + \frac{1}{t} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|=ct} \tilde{\psi}(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \right].$$

ここで次の補題を用いる (面積分に関する簡単な練習問題<sup>21</sup>)。

**補題 1.3.6**  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ ,  $r > 0$  に対して、

$$S := \{(x_1, x_2, x_3); (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2\},$$

$$D := \{(x_1, x_2); (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\}$$

とおくと、 $D$  上の連続関数  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、

$$\int_S \tilde{f} d\sigma = 2r \iint_D \frac{f(x_1, x_2)}{\sqrt{r^2 - (x_1 - a_1)^2 - (x_2 - a_2)^2}} dx_1 dx_2.$$

ただし  $\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) := f(x_1, x_2)$  ( $(x_1, x_2, x_3) \in S$ ) とおいた。

言い換えると、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ ,  $r > 0$  に対して、 $\mathbf{a}' := (a_1, a_2)$ ,

$$S := \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^3; |\mathbf{y} - \mathbf{a}| = r\}, \quad D := \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2; |\mathbf{z} - \mathbf{a}'| \leq r\}$$

とおくと、 $D$  上の連続関数  $f$  に対して、

$$\int_S \tilde{f} d\sigma = 2r \int_D \frac{f(\mathbf{z})}{\sqrt{r^2 - |\mathbf{z} - \mathbf{a}'|^2}} d\mathbf{z}.$$

この公式を用いて、(1.3.13) を変形すると、

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \cdot 2ct \int_{|\mathbf{z} - \mathbf{x}'| \leq ct} \frac{\phi(\mathbf{z})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{z} - \mathbf{x}'|^2}} d\mathbf{z} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{t} \cdot 2ct \int_{|\mathbf{z} - \mathbf{x}'| \leq ct} \frac{\psi(\mathbf{z})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{z} - \mathbf{x}'|^2}} d\mathbf{z} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi c} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{|\mathbf{z} - \mathbf{x}'| \leq ct} \frac{\phi(\mathbf{z})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{z} - \mathbf{x}'|^2}} d\mathbf{z} \right) + \int_{|\mathbf{z} - \mathbf{x}'| \leq ct} \frac{\psi(\mathbf{z})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{z} - \mathbf{x}'|^2}} d\mathbf{z} \right]. \blacksquare \end{aligned}$$

なお、さらに次元降下法を適用して、1次元波動方程式の初期値問題の公式を導出することも出来る (当然、d'Alembert の公式に一致する)。

### 1.3.4 <sup>ホイヘンス</sup> Huygens の原理

波動方程式の解は、空間の次元によって性質がずいぶんと異なる<sup>22</sup>。ここではホイヘンス<sup>23</sup>の原理を紹介しよう。

ここまでの結果から、 $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}^n \times (0, \infty)$  の依存領域は次のようになることが分かった。

<sup>21</sup>  $S$  を上側下側に分けて、 $z = c \pm \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}$  という曲面に対して面積分を計算する。 $z = F(x, y)$  というグラフでは、面積要素は  $d\sigma = \sqrt{1 + (F_x)^2 + (F_y)^2} dx dy$  となることを用いる。

<sup>22</sup> この点は熱方程式などとは対照的である。

<sup>23</sup> Christiaan Huygens (1629–1695, オランダの Hague に生まれ、Hague にて没する。土星の衛星と環の発見 (1657)、オリオン星雲の発見、振り時計の発明 (1656–1659)、光の波動説とホイヘンスの原理 (1678) などの業績がある。)

- $n = 1$  のときは閉区間  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  ( $\{y \in \mathbf{R}^1; |y - x_0| \leq ct_0\}$  と書き直せる。)
- $n = 2$  のときは円盤  $\{y \in \mathbf{R}^2; |y - x_0| \leq ct_0\}$
- $n = 3$  のときは球面  $\{y \in \mathbf{R}^3; |y - x_0| = ct_0\}$

実は  $n = 1$  を例外として、 $n \geq 2$  の範囲では、次の簡単なルールが成り立つことが知られている。

- (i)  $n$  が偶数ならば、 $x_0$  を中心とする半径  $ct_0$  の閉球:  $\{y \in \mathbf{R}^n; |y - x_0| \leq ct_0\}$
- (ii)  $n$  が奇数ならば、 $x_0$  を中心とする半径  $ct_0$  の球面:  $\{y \in \mathbf{R}^n; |y - x_0| = ct_0\}$

波の速さが  $c$  であることから、依存領域が球  $\{y \in \mathbf{R}^n; |y - x_0| \leq ct_0\}$  に含まれるのは、納得できるであろう (その外では間に合わないので届かない)。このことについては次元  $n$  が何であっても成立している。しかし (i) と (ii) の差は大きいと言わざるを得ない。

我々の音や光についての経験に基づく認識では、依存領域は球面  $\{y; |y - x_0| = ct_0\}$  であるように思われるであろうが (1km 離れた地点から発せられた今聞こえている音は 3 秒前の音であり (1000 m を音速 340 m/s で割ると大体 3 秒)、1 秒前の音はもちろん (まだ届いていない)、4 秒前の音も聞こえない (通り過ぎてしまった))、これは空間の次元が 3 であることが大事で、もしも (SF 的な仮定ではあるが) 空間の次元が 2 や 4 であつたら、そうはならないであろう (音は鳴り止まずにずっと響いている)、ということである。

$u(x_0, t_0)$  ( $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $t_0 > 0$ ) が超平面  $t = 0$  に含まれる球面  $\{y \in \mathbf{R}^n; |y - x_0| = ct_0\}$  上の初期データの上に依存することを **Huygens の原理 (Huygens' principle)** が成り立つという (そうでないとき「波動の拡散が起る」というらしい)。  $n = 3$  では Huygens の原理が成り立つが、 $n = 1$  や  $n = 2$  では成り立たない。

普通、理科で学ぶときの説明とはちょっと違うような気がするが…例えば広辞苑には以下のように書いてある。

広辞苑によると

ホイヘンスが一六七八年発表した光の波動説において、光波の進行の状況を作図するのに用いた原理。波動が伝播する際には一つの波面上のすべての点が新たに活動の中心となり、それぞれ二次波を出し、これらの重なりによって次の瞬間における波面が作られると考える。

## 1.4 初期値境界値問題

障害物のない波動現象なんて詰まらない (だって反射も起らないわけでしょう?)、というわけで初期値境界値問題を考えよう。

### 1.4.1 問題の設定

有限の長さの弦の振動あるいは有限の長さの細い管内の空気の振動のモデルである、有界区間  $[0, L]$  における波動方程式の問題を考える。解を一つに定めるには、初期条件だけでは不十

分で、境界条件 (boundary condition) と呼ばれる、空間領域の境界  $\{0, L\}$  における条件を指定することが多い。ここでは、 $\rho = \rho(x) (> 0)$ ,  $\phi = \phi(x)$ ,  $\psi = \psi(x)$  を与えられた関数、 $T$  を与えられた正定数として、

$$(1.4.1) \quad \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)),$$

$$(1.4.2) \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$(1.4.3) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in [0, L]).$$

を満たす  $u = u(x, t)$  を求めよ、という問題 (以下この問題を (W-IBP) で表わす) を考えよう。このように初期条件と境界条件を満たす微分方程式の解を求めよという問題を初期値境界値問題 (initial boundary value problem) または 混合問題 (mixed problem) と言う。

境界条件は (1.4.2) の代りに、

$$(1.4.4) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty))$$

という条件を考えることも多い。(1.4.2) のように未知関数  $u$  の値そのものを指定する境界条件を Dirichlet 境界条件 (Dirichlet boundary condition), (1.4.4) のように未知関数  $u$  の導関数の値を指定する境界条件を Neumann 境界条件 (Neumann boundary condition) と呼ぶ。

我々は当面、次のように定義される古典解を考えることにする。

(W-IBP) の古典解の条件

$u$  が (W-IBP) の古典解であるとは、次の (1), (2), (3) を満たすことをいう。

(1)  $u \in C^2((0, L) \times (0, \infty)) \cap C([0, L] \times [0, \infty))$ .

(2)  $u_t, u_x$  は  $[0, L] \times [0, \infty)$  で存在して連続。

(3) 上の方程式 (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3) を満たす。

((1) と (2) はまとめて  $u \in C^2((0, L) \times (0, \infty)) \cap C^1([0, L] \times [0, \infty))$  と書けば良いように思えるかもしれない。(1) というのを書く気分は、「定義域で連続、微分方程式の階数  $k$  だけ定義域の内部で  $C^k$  級」ということで、基本的な定理の証明に必要なだけの滑らかさを補足的に与える (2) とは、性格が異なるのであろう。)

## 1.4.2 (W-IBP) の解の存在

この問題の解の存在については、ひとことで言うと、Fourier の方法を用いて解が構成できる。ここでは、簡単のため特に  $\rho(x) \equiv \rho$  (定数) とした場合を考えよう (一般の場合は、例えば

ペトロフスキー [69] を見よ)。  $c := \sqrt{T/\rho}$  とおくと、問題は

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) && ((x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 && (t \in (0, \infty)), \\ u(x, 0) &= \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) && (x \in [0, L]) \end{aligned}$$

となる。

ここでは結果のみを掲げておく (導出は、第 2 章で詳述する熱方程式に対する Fourier の方法の議論を参考にすれば良い)。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}, \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

問  $\phi$  が  $C^4$  級、 $\psi$  が  $C^3$  級で、 $\phi(0) = \phi(1) = \phi''(0) = \phi''(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$  が成り立つとき、上の  $u$  は (W-IBP) の解であることを示せ。

ヒント:  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) が成り立つ。

余談 1.4.1 (音の物理学) 上の解の公式の物理的な意味を大急ぎで説明しよう。級数の各項を構成する

$$\left( a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

は両端を止めた弦の固有振動を表わす関数である (時間の経過とともに ( $x$  の関数としての) グラフがどう変化するか思い浮かべよ<sup>24</sup>)。  $n = 1$  に対する固有振動に従って振動する弦は<sup>25</sup>、いわゆる基音 (fundamental tone) を発する。  $n > 1$  なる  $n$  に対応する振動成分は倍音 (harmonic overtone) と呼ばれるものである<sup>26</sup>。固有値の平方根  $\frac{n\pi c}{L}$  は角振動数 (angular frequency) に相当し、それを  $2\pi$  で割った  $\frac{nc}{2L}$  が振動数 (周波数, frequency) であるが、これが基音の振動数  $\frac{c}{2L}$  の整数倍になっているのは、1 次元の振動の特徴である (そのため級数の和  $u(x, t)$  が、 $t$  について周期  $\frac{2L}{c}$  の周期関数になっている:  $u\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) = u(x, t)$ )。2 次元, 3 次元の振動では、振動数は一番低い振動数の整数倍になるとは限らない。このことを

弦の音が太鼓の音よりも耳に心地好いのはそのせいだ

<sup>24</sup>各点は単振動 (調和振動) するが、それだけでなくグラフの「形」が変わらず (相似というべき?)、高さが「一斉に」単振動している。

<sup>25</sup>形が、サイン・カーブの半周期分で、高さが単振動する。

<sup>26</sup>怪しい説明の補足: 例えばいわゆる時報にも採用されているラの音は 440Hz であると言われるが、ピアノの鍵盤でラのキーをたたくと、440Hz 以外に、その整数倍の 880Hz, 1320Hz, 1760Hz, ... の音が出て来る (弦楽器は 1 次元の波動現象だから)。だから 1 オクターブ上のラのキー (基音 880 Hz) を鳴らないようにそっと押さえておいてから、ラのキーを強く叩くと、上のラのキーの弦が共振して鳴る。あるいは、振動しているギター弦の中心を指で押さえると、奇数の倍音 (基音も含む) がみな消えて、音の高さが 2 倍になる。

と説明する人もいる (そうか、とは思うけれど証明できることではないなあ)。旋律を奏でる楽器のほとんどは 1 次元の振動現象を利用したものである (弦楽器、管楽器)。■

Mathematica で固有振動を見る

```
c=1; L=1; u[n_, x_, t_] := Sin[n Pi x/L] Cos[c n Pi t/L]

Animate[Table[
  Plot[{u[n, x, 0], u[n, x, t]}, {x, 0, L}, PlotRange -> {-1, 1}],
  {n, 1, 3}], {t, 0, 2L/c, 0.01}]
```

余談 1.4.2 (境界条件の意味) 上では Dirichlet 境界条件の場合を扱ったが、もちろん Neumann 境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

も考えることができる。高等学校の物理学で波動現象について学んでいる人のために補足しておく、Dirichlet 境界条件は固定端反射 (reflection from a hard boundary) の場合、Neumann 境界条件は自由端反射 (reflection from a free (soft) boundary) の場合に相当する。コンピューターで数値実験をする機会があれば (G.7.3 参照)、ぜひとも試してみてその違いを見てみることを勧める。■

### 1.4.3 (W-IBP) の解の一意性

波動方程式の解の一意性の証明には、以下に示すように「エネルギー」を導入して、その保存則を利用する<sup>27</sup>。証明はまったく数学的であるが、物理的な意味を持つ補助関数を導入するところが面白い<sup>28</sup>。

運動エネルギー  $E_k = E_k(t)$ , 位置エネルギー  $E_p = E_p(t)$ , 全エネルギー  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$  を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} E_k(t) &:= \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) u_t(x, t)^2 dx, \\ E_p(t) &:= \frac{1}{2} \int_0^L T u_x(x, t)^2 dx, \\ \mathcal{E}(t) &:= E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\rho(x) u_t(x, t)^2 + T u_x(x, t)^2] dx. \end{aligned}$$

<sup>27</sup>後で熱伝導方程式の古典解の一意性を証明するために「最大値原理」を導入するが、波動方程式については、最大値原理のような定理は成立しない。

<sup>28</sup>独り言: 物理的な考え方をすんなり認めれば極めて自然な補助関数となるわけだが、それをしないと正しいことは分かるが、どうやって思い付いたのか謎の証明、となるだろう。



定理 1.4.1 (波動方程式の解のエネルギー保存則)  $u$  を (W-IBP) の古典解、 $\phi \in C^1[0, L]$ ,  $\psi \in C[0, L]$  とするとき、 $\mathcal{E}$  は定数である:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho(x)\psi(x)^2 + T\phi'(x)^2) dx \quad (t > 0).$$

証明 簡単のため、区間の端点も含めて  $u$  は  $C^2$  級であると仮定して証明する。そう仮定すると、積分記号下の微分が容易に正当化できて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L [\rho(x)u_t(x, t)^2 + Tu_x(x, t)^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} [\rho(x)u_t(x, t)^2 + Tu_x(x, t)^2] dx \\ &= \int_0^L [\rho(x)u_{tt}(x, t)u_t(x, t) + Tu_{xt}(x, t)u_x(x, t)] dx \\ &= \int_0^L [Tu_{xx}(x, t)u_t(x, t) + Tu_{xt}(x, t)u_x(x, t)] dx \\ &= T \int_0^L [u_{xx}(x, t)u_t(x, t) + u_{xt}(x, t)u_x(x, t)] dx \end{aligned}$$

となる ( $u$  が波動方程式を満たすことを用いた)。

境界条件

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty))$$

から

$$u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty))$$

が導かれるので、

$$\begin{aligned} \int_0^L u_{xx}(x, t)u_t(x, t) dx &= [u_x(x, t)u_t(x, t)]_{x=0}^{x=L} - \int_0^L u_x(x, t)u_{tx}(x, t) dx \\ &= - \int_0^L u_x(x, t)u_{xt}(x, t) dx. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = T \int_0^L 0 dt = 0.$$

これから  $\mathcal{E}(t)$  は  $t$  によらない定数である。特に

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho(x)u_t(x, 0)^2 + Tu_x(x, 0)^2) dx$$

であるが、初期条件  $u_t(x, 0) = \psi(x)$  と、 $u(x, 0) = \phi(x)$  より導かれる  $u_x(x, 0) = \phi'(x)$  より結論を得る。■

(一般の場合)  $\varepsilon \geq 0, t \geq 0$  に対して、

$$\mathcal{E}_\varepsilon(t) := \frac{1}{2} \int_\varepsilon^{L-\varepsilon} \left[ \rho(x) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

とおく。まず明らかに

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(t) = \mathcal{E}_0(t).$$

そして  $\varepsilon > 0$  に対して、

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\varepsilon(t) = T \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=\varepsilon}^{x=L-\varepsilon} = T \left( \frac{\partial u}{\partial t}(L-\varepsilon, t) \frac{\partial u}{\partial x}(L-\varepsilon, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(\varepsilon, t) \frac{\partial u}{\partial x}(\varepsilon, t) \right).$$

古典解の定義により、 $\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}$  は  $[0, L] \times [0, \infty)$  で連続であり、境界条件から  $x = 0, L$  のとき 0 となるから、 $\varepsilon \downarrow 0$  のとき  $t \in [0, \infty)$  に関して広義一様に

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\varepsilon(t) \rightarrow 0.$$

これから  $\mathcal{E}_\varepsilon(t)$  は、 $\varepsilon = 0$  のときも  $t$  で微分できて、

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_0(t) = 0$$

であることが分かる。すなわち

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 0. \quad \blacksquare$$

問 任意の  $T > 0$  を固定する。 $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき、 $t \in [0, T]$  について一様に  $\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\varepsilon(t) \rightarrow 0$  が成り立つことを示せ。(ヒント: compact 集合上の連続関数は…)

系 1.4.2 (波動方程式の初期値境界値問題 (W-IBP) の古典解の一意性)  $\phi \in C^1[0, L]$ ,  $\psi \in C[0, L]$  とするとき、(W-IBP) の古典解は一意である。

証明 二つの解  $u_1, u_2$  があつたとすると、 $v := u_1 - u_2$  は

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} && ((x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)), \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0 && t \in (0, \infty), \\ v(x, 0) &= 0, \quad v_t(x, 0) = 0 && (x \in [0, L]) \end{aligned}$$

を満たす。このときエネルギーは

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho(x) \left( \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \right)^2 + T \left( \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right] dx \equiv \frac{1}{2} \int_0^L [\rho(x) \cdot 0 + T \cdot 0] dx = 0.$$

これから (被積分関数は非負なので、積分して 0 ならば、実は恒等的に 0 でなければならない)

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in [0, L] \times (0, \infty)).$$

ゆえに  $v$  は  $[0, L] \times [0, \infty)$  で定数であり、

$$v(x, t) \equiv v(x, 0) = 0.$$

すなわち  $u_1 \equiv u_2$  である。  $\blacksquare$

## 1.5 頭の中の整理・確認

(こういうのは自発的にやって欲しいのだけど、第1章ですから)

- (i) 波動方程式を書けますか？ 1次元波動方程式が  $n$  次元波動方程式の特殊な場合だとい  
うことが分かりますか？
- (ii) 初期値問題 (Cauchy 問題) と初期値境界値問題 (混合問題) とは何でしょう？ 違いを一  
言でまとめると？ 両方とも方程式がもれなく書けますか？
- (iii) 初期値問題の解の公式について簡単に説明できますか？ (全般的にどうか、次元によっ  
てどうなるか、デュアメル原理とは？)
- (iv) 1次元初期値問題の解の公式を自力で導けますか？
- (v) 初期値境界値問題の解の一意性の証明について一言でまとめると？
- (vi) 初期値境界値問題の解の存在について、どのように説明してあったでしょう？
- (vii) (ちょっと高度) 1, 2, 3次元の場合をのぞき、この講義での初期値問題の議論は形式的な  
ものになっているが、その理由は？

(ii) の答 波動方程式の解  $u = u(x, t)$  において、 $x$  の範囲  $\Omega$  が全空間であるかそうでない  
かの違いで、前者では初期値問題、後者では初期値境界値問題を考えることになる。具体的  
には、前者は「波動方程式以外に初期条件

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \Omega)$$

を満たす  $u$  を求めよ」という問題で、後者は「波動方程式と初期条件以外に例えば

$$u(x, t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega, t \in \mathbf{R})$$

のような境界条件を満たす  $u$  を求めよ」という問題である。少し乱暴な考え方だが、全空間  
の場合は境界が空集合になるので、境界条件がなくなってしまう、とも言える。

(iii) の答 空間次元  $n$  が 1, 2, 3 のいずれかである場合は、Fourier 変換によらない、分かり  
やすい解の公式を学んだ。一般の  $n$  に対しても形式的計算で Fourier 変換を用いた解の公式  
が得られるが、Fourier 変換は広義積分であり正当化はやや面倒であり、さらに式が複雑でそ  
の式の形から解の性質を調べるのはやや難しい。

Duhamel の原理とは、初期値問題

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) + F(x, t), \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

において、 $F \equiv 0$ ,  $\phi \equiv 0$ ,  $\psi$  は一般、としたときの解の公式が得られた場合に、一般の  $F$ ,  $\phi$ ,  
 $\psi$  についての解を表す公式である。

(iv) の答 「暗記しよう」と考えられては困るが、結果として覚えてしまうくらい、きちんと学ぶことを勧める。

(v) の答 物理的には力学的エネルギーとして解釈できる関数を導入し、それが実は時間によらずに定数であるという定理 (エネルギー保存則) を利用する、というのが要点。後は、二つ解があったとすると、その差を考えると、という線形方程式の解の一意性証明の定跡手段を用いる。

(vi) の答 Fourier の方法を用いる、ということで第2章を乞うご期待。

(vii) の答 (iii) の答に書いてありますね。

## 1.6 補足: 微積分の問題

問題 1. 次の命題 (割と有名) を証明せよ。「 $f: I = (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  が連続で、 $c \in I$ ,  $f$  は  $(a, c)$  と  $(c, b)$  の両方で微分可能、さらに

$$\exists A \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad A = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} f'(x)$$

が成り立つならば、 $f$  は  $c$  で微分可能で  $f'(c) = A$  である。さらに  $f$  が  $(a, c)$  と  $(c, b)$  の両方で  $C^1$  級ならば、実は  $f$  は  $I$  で  $C^1$  級である。」

問題 2. 次の命題を完成させ (適当な仮定を補う必要がある)、(c), (d), (e) を証明せよ ((a), (b) は良く知られている結果である)。

補題 1.6.1 (a)  $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy.$

(b)  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy = f(x).$

(c)  $\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(y) dy = f(\phi(x)) \phi'(x) - f(\psi(x)) \psi'(x).$

(d)  $\frac{d}{dx} \int_a^x g(x, y) dy = \int_a^x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy + g(x, x).$

(e)  $\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} g(x, y) dy = g(x, \phi(x)) \phi'(x) - g(x, \psi(x)) \psi'(x) + \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy.$

問題 3.  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  が連続であるとき、任意の  $x \in \mathbf{R}^n$  に対して、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n \omega_n} \int_{|y-x| \leq r} f(y) dy = f(x)$$

であることを示せ。ただし、 $\omega_n$  は  $\mathbf{R}^n$  の単位球の測度である:

$$\omega_n := \int_{B_1} dz, \quad B_1 := \{z \in \mathbf{R}^n; |z| \leq 1\}.$$

確認事項: 奇関数と偶関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  について、 $f$  が奇関数であるとは

$$f(-x) = -f(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

が成り立つことをいい、 $f$  が偶関数であるとは

$$f(-x) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

が成り立つことをいう …… 関数  $f(x) = x^k$  ( $k$  は自然数) の指数  $k$  の偶奇から来ているのだと想像する。

奇関数  $\times$  奇関数 = 偶関数, 奇関数  $\times$  偶関数 = 奇関数, 偶関数  $\times$  偶関数 = 偶関数 が成り立つことは容易に確認できる。

問題 4.  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は奇関数,  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は偶関数で、ともに十分な回数微分可能とすると、以下のことを示せ。

(1)  $\forall a \in \mathbf{R}$  に対して、 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ,  $\int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_0^a g(x) dx$  である。

(2)  $f'$  は偶関数、 $g'$  は奇関数である。

(3) 任意の  $k = 0, 1, 2, \dots$  に対して、 $f^{(2k)}(0) = 0$ ,  $g^{(2k+1)}(0) = 0$  である。(ゆえに、Taylor 展開が可能な場合、 $f$  の Taylor 展開は奇数次の項だけからなり、 $g$  の Taylor 展開は偶数次の項だけからなる。)

問題 5.  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  は  $C^2$  級とすると、

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & (x \geq 0), \\ -f(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

とおく。(自由に描いた  $f$  のグラフに対して、 $F$  のグラフを描け。) 以下のことを示せ。

(1)  $F$  が連続であるためには、 $f(0) = 0$  であることが必要十分である。

(2)  $f(0) = 0$  が成り立つとき、 $F$  は  $C^1$  級である。

(3)  $f(0) = 0$  が成り立つとき、 $F$  が  $C^2$  級であるためには、 $f''(0) = 0$  であることが必要十分である。

(注意  $f(0) = 0$  のとき、 $F$  は奇関数である。 $F$  のことを  $f$  の奇関数拡張と呼ぶ。)

問題 6. 上の問題の偶関数拡張バージョンに解答せよ。

問題 1 解答  $0 < |h| < \min\{c-a, b-c\}$  を満たす任意の  $h$  に対して、平均値の定理から、 $\exists \theta \in (0, 1)$  s.t.

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c + \theta h).$$

仮定より  $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} f'(x) = A$ , また  $h \rightarrow 0$  のとき  $|(c + \theta h) - c| = \theta |h| \leq |h| \rightarrow 0$  であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = A.$$

ゆえに  $f$  は  $c$  で微分可能で  $f'(c) = A$  である。 ■

## 問題 2 解説

- (a) 良く知られている (微分と積分の順序交換、積分記号下の微分、などと呼ばれる)。重積分を学ぶときに出て来る (証明が与えられる) ことが多い。
- (b) 良く知られている (「微分積分学の基本定理」と呼ばれる)。
- (c) ( $f$  は連続、 $\phi$  と  $\psi$  は微分可能くらいを仮定する。)  $F' = f$  となる  $F$  が取れる (「任意の連続関数は原始関数を持つ」 — 証明は  $F(x) := \int_a^x f(y) dy$ )。それを用いて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(y) dy &= \frac{d}{dx} [F(\phi(x)) - F(\psi(x))] \\ &= F'(\phi(x)) \phi'(x) - F'(\psi(x)) \psi'(x) \\ &= f(\phi(x)) \phi'(x) - f(\psi(x)) \psi'(x). \end{aligned}$$

- (d) ( $g$  は連続、 $\frac{\partial g}{\partial x}$  は連続くらいを仮定する。)

$$G(u, v) := \int_a^v g(u, y) dy$$

とおくと、

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \int_a^v \frac{\partial g}{\partial x}(u, y) dy, \quad \frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = g(u, v).$$

ゆえに

$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(x, y) dy = \frac{d}{dx} G(x, x) = \frac{\partial G}{\partial u}(x, x) + \frac{\partial G}{\partial v}(x, x) = \int_a^x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy + g(x, x).$$

- (e) ( $g$  は連続、 $\frac{\partial g}{\partial x}$  は連続くらいを仮定する。) 前問と同じ  $G(u, v)$  を用いる。

$$\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} g(x, y) dy = \int_a^{\phi(x)} g(x, y) dy - \int_a^{\psi(x)} g(x, y) dy = G(x, \phi(x)) - G(x, \psi(x))$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} g(x, y) dy &= \frac{d}{dx} G(x, \phi(x)) - \frac{d}{dx} G(x, \psi(x)) \\ &= \frac{\partial G}{\partial u}(x, \phi(x)) + \frac{\partial G}{\partial v}(x, \phi(x)) \phi'(x) - \left( \frac{\partial G}{\partial u}(x, \psi(x)) + \frac{\partial G}{\partial v}(x, \psi(x)) \psi'(x) \right) \\ &= \int_a^{\phi(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy + g(x, \phi(x)) \phi'(x) - \left( \int_a^{\psi(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy + g(x, \psi(x)) \psi'(x) \right) \\ &= \int_{\psi(x)}^{\phi(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy + g(x, \phi(x)) \phi'(x) - g(x, \psi(x)) \psi'(x). \blacksquare \end{aligned}$$

## 1.7 練習問題

ほとんどは微積分 (特に合成関数の微分法, 積分記号下の微分) の問題である。

問題 1.  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が  $C^2$  級の関数,  $c$  が定数であるとき、

$$u(x, t) := f(x - ct) + g(x + ct)$$

によって  $u: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  を定めると、 $u$  は 1 次元波動方程式

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

を満たすことを示せ。

問題 2.  $u(x, t) = f(x - ct)$  ( $c$  は実定数,  $f$  は  $C^2$  級の関数で  $f'' \neq 0$ ) が 1 次元波動方程式

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

の解ならば  $|c| = 1$  であることを示せ。またこのとき、 $u(x, 0), u_t(x, 0)$  を求めよ。(余談: 右側に進行する波を初期値問題の解として実現するには、初期値をどう取れば良いか、ということで、数値シミュレーション・プログラムのチェックに有用である。簡単なのだが、コンピューターの前に座ると「分からなくなってしまう」人が多い。)

問題 3. (平面波, plane wave)  $\nu$  を  $|\nu| = 1$  なる  $\mathbf{R}^n$  の元、 $c$  を正定数、 $U: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を  $C^2$  級の関数とするとき、

$$u(x, t) = U(\nu \cdot x - ct) \quad (x \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R})$$

で定義される  $u: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は、 $u_{tt}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t)$  を満たすことを示せ。ただし  $\nu \cdot x$  は  $\nu$  と  $x$  の内積を表すものとする。

問題 4. 正定数  $c$  と、 $C^2$  級の関数  $u: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbf{R}$  があるとき、

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

で新しい変数  $(\xi, \eta)$  を導入して、 $v(\xi, \eta) = u(x, t)$  とおくとき、

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = -4v_{\xi\eta}(\xi, \eta)$$

が成り立つことを示せ。

問題 5.  $f: \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbf{R}$  が  $C^1$  級とするとき、次の (1), (2) を示せ。

(1)  $f_x(x, y) \equiv 0$  であれば、 $\exists g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  s.t.  $f(x, y) = g(y)$  ( $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ) が成り立つ。

(2)  $f_x(x, y) \equiv F'(x)$ ,  $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  であれば、 $\exists g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  s.t.  $f(x, y) = F(x) + g(y)$  ( $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ) が成り立つ。

問題 6.  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^2$  の領域、 $f \in C^1(\Omega)$ ,  $f_x \equiv 0$  ( $\Omega$  内) とするとき、 $f(x, y) = g(y)$  ( $(x, y) \in \Omega$ ) を満たす関数  $g$  は必ず存在すると結論して良いか? (成立するならば証明し、そうでなければ反例を与えよ。)

問題 7.  $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられたとき 1 次元波動方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) & ((x, t) \in \mathbf{R}^2) \\ u(x, 0) &= \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & (x \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

の解は d'Alembert の波動公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy$$

で与えられることを示せ。(これまで出て来た問の結果を利用してよい。)

問題 8.  $\phi \in C^2(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ ,  $\psi \in C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R})$  とするとき、

$$u(x, t) := \frac{1}{2}(\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy \quad ((x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R})$$

で定めた  $u$  が

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad \text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \quad u(x, 0) = \phi(x) \quad (x \in \mathbf{R}), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

を満たすことを直接計算で示せ。

問題 9. 1次元波動方程式について、Duhamel の原理の「問題 1 の解から問題 2 の解を作る」が成り立つことを、d'Alembert の波動公式を用いて証明するため、以下の問に答えよ。

- (1)  $\frac{1}{c^2} v_{tt}(x, t) = v_{xx}(x, t)$  (in  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ),  $v(x, 0) = 0$  ( $x \in \mathbf{R}$ ),  $v_t(x, 0) = \phi(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) の解  $v$  を用いて  $w := v_t$  とおくと、 $w$  を  $\phi$  を用いて表せ。
- (2)  $w$  が  $\frac{1}{c^2} w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t)$  (in  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ),  $w(x, 0) = \phi(x)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ),  $w_t(x, 0) = 0$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) の解であることを示せ。

問題 10. 正定数  $c$  と連続な  $F: \mathbf{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられたとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t) & (x \in \mathbf{R}, t > 0), \\ U(x, 0) &= 0 & (x \in \mathbf{R}), \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) &= 0 & (x \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

を満たす  $U = U(x, t)$  を求める初期値境界値問題について、以下の問に答えよ。



- (1) d'Alembert の波動公式 (1.2.5) を Duhamel の原理 (1.3.3) (p. 27) に代入した式 (1.3.4) の  $U$  に対して、直接

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x, t), \quad \frac{\partial U}{\partial x}(x, t), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t)$$

を計算し、 $U$  が解であることを確かめよ。

- (2) 初期値境界値問題の解  $U$  が存在したと仮定し、 $\xi = x + ct$ ,  $\eta = x - ct$ ,  $V(\xi, \eta) := U\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right)$  と変数変換する。

- (a)  $V$  は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}F\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right) & ((\xi, \eta) \in \Omega), \\ V(\xi, \xi) &= 0 & (\xi \in \mathbf{R}), \\ \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi, \xi) &= \frac{\partial V}{\partial \eta}(\xi, \xi) & (\xi \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

を満たすことを示せ。ただし  $\Omega := \{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2; \xi > \eta\}$ 。

- (b) 任意の  $(\xi_0, \eta_0) \in \Omega$  に対して、

$$\begin{cases} V(\xi_0, \eta_0) = V(\eta_0, \eta_0) + \int_{\eta_0}^{\xi_0} \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi, \eta_0) d\xi, \\ \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi, \eta_0) = \frac{\partial V}{\partial \xi}(\xi, \xi) + \int_{\xi}^{\eta_0} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \xi}(\xi, \eta) d\eta \end{cases}$$

が成り立つことを利用して

$$(\star) \quad V(\xi_0, \eta_0) = - \int_{\eta_0}^{\xi_0} \left( \int_{\eta_0}^{\xi} g(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi, \quad g(\xi, \eta) := -\frac{1}{4c^2}F\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2c}\right)$$

を示せ。

- (c) 積分 (☆) を変数変換することによって  $U$  を求め (つまり  $F$  で表す)、(1) の結果 (式 (1.3.4)) と一致することを確認せよ。

**問題 11.** 半直線  $I = [0, \infty)$  上の波動方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned} (\text{WE}) \quad & \frac{1}{c^2}u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) & (x \in (0, \infty), t \in (0, \infty)), \\ (\text{NBC}) \quad & u_x(0, t) = 0 & (t \in (0, \infty)), \\ (\text{IC}) \quad & u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & (x \in I) \end{aligned}$$

を考える。ここで  $c$  は与えられた正定数、 $\phi \in C^2(I; \mathbf{R})$  と  $\psi \in C^1(I; \mathbf{R})$  は  $\phi'(0) = \psi'(0) = 0$  を満たす与えられた関数とする。

(1)  $\Phi(x) := \begin{cases} \phi(x) & (x \geq 0) \\ \phi(-x) & (x < 0) \end{cases}$ ,  $\Psi(x) := \begin{cases} \psi(x) & (x \geq 0) \\ \psi(-x) & (x < 0) \end{cases}$  で  $\Phi, \Psi$  を定めるとき、 $\Phi \in C^2(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ ,  $\Psi \in C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ であることを示せ。

(2) 初期値境界値問題 (WE), (NBC), (IC) の解を求めよ。初期値問題の解の公式 (ダランベールの公式) は既知として用いてよい。

(3) (NBC) の代りに Dirichlet 境界条件

$$(DBC) \quad u(0, t) = 0 \quad (t > 0)$$

を課した初期値境界値問題の解の公式を求めよ。ただし初期条件  $\phi, \psi$  に関する条件は適当に修正すること。

問題 12. 3次元波動方程式

$$\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, y, z, t) = u_{xx}(x, y, z, t) + u_{yy}(x, y, z, t) + u_{zz}(x, y, z, t)$$

の解  $u = u(x, y, z, t)$  で、適当な関数  $w$  を用いて

$$u(x, y, z, t) = w(r, t), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

の形に書けるものを球面波 (spherical wave) と呼ぶ。球面波は実は

$$u(x, y, z, t) = \frac{h_1(r - ct)}{r} + \frac{h_2(r + ct)}{r}$$

の形をしている ( $h_1, h_2$  は適当な 1 変数関数) ことを示せ。また  $n$  次元の球面波はどうなるか。

問題 13. (Fourier の方法を学んでから取り組むこと)  $[0, 1]$  上定義され、 $f(0) = f(1) = 0$  を満たす滑らかな関数  $f$  と、 $c \in \mathbf{R}$  が与えられたときに、波動方程式の初期値境界値問題

$$(1.7.1) \quad \frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)),$$

$$(1.7.2) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$(1.7.3) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in [0, 1])$$

を Fourier の方法で解け (実際に解であることは証明しなくて良い)。境界条件 (1.7.2) を Neumann 境界条件  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$  ( $t \in (0, \infty)$ ) に変えるとどうなるか。

問題 14.  $\mathbf{R}^n$  の有界領域  $\Omega$  における波動方程式の初期値境界値問題

$$u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) \quad ((x, t) \in \Omega \times \mathbf{R})$$

$$u(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R})$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in \overline{\Omega})$$

の解が  $\tilde{\Omega} \times \mathbf{R}$  で  $C^2$  級であるとするとき (ただし  $\tilde{\Omega}$  は  $\bar{\Omega}$  を含むある開集合)、

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ u_t(x, t)^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, t)^2 \right] dx \quad (t \in \mathbf{R})$$

は  $t$  によらない定数であることを示せ。

普通の意味での練習問題はここまで。以下は後始末的なもの、研究課題である。

問題 15.  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ ,  $r > 0$  に対して、

$$S := \{(x_1, x_2, x_3); (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = r^2\},$$

$$D := \{(x_1, x_2); (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\}$$

とおくと、 $D$  上の連続関数  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、

$$\int_S \tilde{f} d\sigma = 2r \iint_D \frac{f(x_1, x_2)}{\sqrt{r^2 - (x_1 - a_1)^2 - (x_2 - a_2)^2}} dx_1 dx_2.$$

が成り立つことを示せ。ただし  $\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) := f(x_1, x_2)$  ( $(x_1, x_2, x_3) \in S$ ) とおいた。(Poisson の波動公式を導出する議論の後始末。面積分を重積分で表せ、ということ。)

問題 16. 2次元、3次元の Laplacian を極座標で表す以下の公式を導け。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right).$$

(2次元の場合は自力で出来るようになって欲しい。3次元の場合を工夫なしにやるとかなり面倒になる。)

問題 17. Kirchhoff, Poisson の波動公式の一般次元バージョンを求めよ。(書いてある本を探し出して解説し、まとめ直す、という作業になるであろう。卒業研究レベル。もし出来たら、レポートとして提出してみよう。)

## 略解&ヒント

解答 1.  $u_{xx}$  も  $\frac{1}{c^2} u_{tt}$  も  $f''(x - ct) + g''(x + ct)$  に等しくなる。■

解答 2.  $u_{tt} = c^2 f''(x - ct)$ ,  $u_{xx} = f''(x - ct)$  であるから、 $u_{tt} = u_{xx}$  より  $(c^2 - 1)f''(x - ct) = 0$ .  $f'' \neq 1$  より  $c^2 = 1$ . ゆえに  $|c| = 1$ . そして  $u_t(x, t) = -cf'(x - ct)$  に注意して、

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = -cf'(x). \blacksquare$$

解答 3.  $u_{tt} = c^2 U''(\nu \cdot x - ct)$ ,  $u_{x_i x_i} = \nu_i^2 U''(\nu \cdot x - ct)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) となる。 ■

解答 4. 合成関数の微分法をするだけ。2年生向けの「多変数の微分積分学 1」(<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/tahensuu1/>) の演習問題でもある。 ■

解答 5. 1変数の場合の「 $f' \equiv 0$  ならば  $\exists C \in \mathbf{R}$  s.t.  $f(x) \equiv C$ 」の証明 (平均値の定理を用いるのが微積分のテキストの相場) を思い出して拡張するか、「 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が  $C^1$  級ならば、 $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$ 」を拡張する。 ■

解答 6. 成立しない。 $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y); y \geq 0\}$  として、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & (y < 0) \\ y^2 & (y \geq 0 \text{ かつ } x < 0) \\ y^3 & (y \geq 0 \text{ かつ } x > 0) \end{cases}$$

で定めると、これが反例になる。 ■

解答 7. 本文 (§1.2.2) に書いてある。 ■

解答 8.  $\psi$  の原始関数  $\Psi$  を取ると、

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} (\Psi(x + ct) - \Psi(x - ct))$$

と書けることを用いるとよい。 ■

解答 9.

(1)  $v(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \phi(y) dy$  となるので、 $w(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x - ct) + \phi(x + ct))$ 。

(2) d'Alembert の波動公式で  $\psi = 0$  とすると  $u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x - ct) + \phi(x + ct))$  で、これは (1) の  $w$  と一致する。 ■

解答 10. (1) は単なる微分の計算問題である。(2) は神保 [35] に書いてある。 ■

解答 11. 次の命題 (平均値の定理を用いると容易に証明できる) を認めよう。

命題 1.7.1  $f: I = (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$  が連続で、 $c \in I$ ,  $f$  は  $(a, c)$  と  $(c, b)$  の両方で微分可能、さらに

$$\exists A \in \mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad A = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \neq c}} f'(x)$$

が成り立つならば、 $f$  は  $c$  で微分可能で、 $f'(c) = A$ 。さらに  $f$  が  $(a, c)$ ,  $(c, b)$  の両方で  $C^1$  級ならば、実は  $f$  は  $I$  で  $C^1$  級である。

(1)  $\Phi$  は明らかに  $x \neq 0$  の範囲で  $C^2$  級である。また  $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が連続であるから、

$$\Phi(+0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \Phi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \phi(x) = \phi(0), \quad \Phi(-0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \Phi(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \phi(-x) = \phi(0),$$

となり、 $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = \phi(0) = \Phi(0)$  であるから、 $\Phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は連続である。導関数については

$$\Phi'(x) = \begin{cases} \phi'(x) & (x > 0) \\ -\phi'(-x) & (x < 0), \end{cases} \quad \Phi''(x) = \begin{cases} \phi''(x) & (x > 0) \\ \phi''(-x) & (x < 0). \end{cases}$$

であるから、 $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が  $C^2$  級であることと、仮定  $\phi'(0) = 0$  を用いて、

$$\begin{aligned} \Phi'(+0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \Phi'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \phi'(x) = \phi'(0) = 0, \\ \Phi'(-0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \Phi'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-\phi'(-x)) = -\phi'(0) = 0 \end{aligned}$$

となる。命題 1.7.1 から、 $\Phi$  は 0 でも微分可能 ( $\Phi'(0) = 0$ ) かつ  $\Phi'$  は 0 でも連続である。さらに

$$\begin{aligned} \Phi''(+0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \Phi''(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \phi''(x) = \phi''(0), \\ \Phi''(-0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \Phi''(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (\phi''(-x)) = \phi''(0) \end{aligned}$$

となるので、再び命題 1.7.1 から、 $\Phi'$  は 0 でも微分可能 ( $\Phi''(0) = \phi''(0)$ ) かつ  $\Phi''$  は 0 でも連続である。ゆえに  $\Phi$  は  $\mathbf{R}$  で  $C^2$  級である。

同様にして、 $\Psi$  が  $\mathbf{R}$  で  $C^1$  級であることが証明できる (省略)。

(2)  $\Phi \in C^2(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ ,  $\Psi \in C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R})$  より

$$\frac{1}{c^2} U_{tt}(x, t) = U_{xx}(x, t) \quad (x \in \mathbf{R}, t > 0), \quad U(x, 0) = \Phi(x) \quad (x \in \mathbf{R}), U_t(x, 0) = \Psi(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

は一意的な  $C^2$  級の解

$$U(x, t) = \frac{1}{2} (\Phi(x - ct) + \Phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(y) dy$$

を持つ。

$$U_x(x, t) = \frac{1}{2} (\Phi'(x - ct) + \Phi'(x + ct)) + \frac{1}{2c} [\Psi(x + ct) - \Psi(x - ct)]$$

であるから、

$$U_x(0, t) = \frac{1}{2} (\Phi'(-ct) + \Phi'(ct)) + \frac{1}{2c} [\Psi(ct) - \Psi(-ct)].$$

$\Phi, \Psi$  が偶関数であるから、 $\Phi'$  は奇関数で、 $\Phi'(-ct) = -\Phi'(ct)$ ,  $\Psi(-ct) = \Psi(ct)$  が成り立ち、

$$U_x(0, t) = \frac{1}{2} (-\Phi'(ct) + \Phi'(ct)) + \frac{1}{2c} (\Psi(ct) - \Psi(ct)) = 0.$$

ゆえに

$$u(x, t) := U(x, t) \quad (x \in [0, \infty), t \in [0, \infty))$$

とおくと、 $u$  は (WE), (NBC), (IC) の解である。

後はこれをなるべく具体的な ( $\Phi$  と  $\Psi$  でなく、 $\phi$  と  $\psi$  で表された) 形になるよう変形する。

(i)  $x - ct \geq 0$  のときは、 $\Psi$  を  $\psi$  に書き換えるだけでよい。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (\Phi(x - ct) + \Phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy. \end{aligned}$$

(ii)  $x - ct < 0$  のときは、 $y < 0$  の範囲で  $\Psi(y)$  を  $\psi(-y)$  へ置き換えることを実行する。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (\Phi(x - ct) + \Phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (\phi(-(x - ct)) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \left( \int_{x-ct}^0 (\psi(-y)) dy + \int_0^{x+ct} \psi(y) dy \right). \end{aligned}$$

右辺の最初の積分については、 $z = -y$  と変数変換することで

$$\int_{x-ct}^0 \psi(-y) dy = - \int_{ct-x}^0 \psi(z) dz = \int_0^{ct-x} \psi(z) dz$$

となるので、

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(ct - x) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \left( \int_0^{x+ct} \psi(y) dy + \int_0^{ct-x} \psi(y) dy \right).$$

以上をまとめて次式を得る。

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy & (x - ct \geq 0) \\ \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(ct - x)) + \frac{1}{2c} \left( \int_0^{x+ct} \psi(y) dy + \int_0^{ct-x} \psi(y) dy \right) & (x - ct < 0). \end{cases}$$

(3) 結果のみ示す。 $\phi(0) = \phi''(0) = \psi(0) = 0$  を仮定する必要がある、そのとき

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy & (x - ct \geq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} (\phi(x + ct) - \phi(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(y) dy. & (x - ct < 0 \text{ のとき}). \blacksquare \end{cases}$$

解答 12. (Laplace 方程式のところに書いてある Laplacian の極座標表示の公式)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rw) + \frac{1}{r^2} \Delta_S$$

を用いると、 $v = rw$  は

$$\frac{1}{c^2} v_{tt} = v_{rr}$$

を満たすことが分かる。これから  $C^2$  級の関数  $h_1, h_2$  が存在して<sup>29</sup>

$$v(r, t) = h_1(r - ct) + h_2(r + ct).$$

ゆえに

$$w(r, t) = \frac{v(r, t)}{r} = \frac{h_1(r - ct)}{r} + \frac{h_2(r + ct)}{r}. \blacksquare$$

解答 13. 波動方程式と境界条件を満たす変数分離解  $u(x, t) = X(x)T(t)$  で、恒等的に 0 でないものは、適当な定数  $\lambda$  に対して、

$$\begin{aligned} X''(x) &= \lambda X(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad X(0) = X(1) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \\ T''(t) &= c\lambda T(t) \quad (t > 0) \end{aligned}$$

を満たす。これから (第 2 章で示すように)

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_n := -n^2 \pi^2, \\ X(x) &= X_n(x) := C_n \sin n\pi x, \\ T(t) &= A_n \cos n\pi ct + B_n \sin n\pi ct \quad (C_n, A_n, B_n \text{ は任意定数}; n \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

これから解の候補として、

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi ct + b_n \sin n\pi ct) \sin n\pi x$$

とおくことが出来る。初期条件に代入すると、

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c b_n \sin n\pi x.$$

これから

$$a_n = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin n\pi x \, dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^1 \psi(x) \sin n\pi x \, dx. \blacksquare$$

<sup>29</sup>実はここの議論は少し乱暴である。 $r$  は  $r \geq 0$  の範囲しか動かないはずなので、直接定理 1.2.2 が適用できるわけではない。

解答 14.

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + \nabla u \cdot \nabla u) dx \quad (\nabla u = \text{grad } u)$$

なので、積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換) と、積の微分法<sup>30</sup>と、波動方程式の代入と、偏微分の順序交換をして、

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + \nabla u \cdot \nabla u) dx = \int_{\Omega} \left( u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u \right) dx \\ &= \int_{\Omega} (u_t \Delta u + \nabla u \cdot \nabla u_t) dx. \end{aligned}$$

Green の公式と、境界条件  $u = 0$  (on  $\partial\Omega$ ) より導かれる  $u_t = 0$  (on  $\partial\Omega$ ) から、

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} u_t d\sigma - \int_{\Omega} \Delta u u_t dx = - \int_{\Omega} u_t \Delta u dx$$

であるから、

$$E'(t) = \int_{\Omega} (u_t \Delta u - u_t \Delta u) dx = \int_{\Omega} 0 dx = 0.$$

ゆえに  $E$  は定数である。■

おまけの問題  $c$  は正の定数,  $I = [0, \infty)$  とする。

(1) “ $\forall x \leq 0$  に対して  $f(x) = g(x) = 0$ ” を満たす任意の  $f, g \in C^2(\mathbf{R}; \mathbf{R})$  に対して、

$$(\#) \quad u(x, t) := f(x - ct) + g(x + ct) - g(-(x - ct)) \quad (x \in \mathbf{R}, t \geq 0)$$

で  $u$  を定めるとき、以下の問に答えよ。

(i)  $\frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$  ( $x \in \mathbf{R}, t > 0$ ) を示せ。

(ii)  $u(0, t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) であることを示せ。

(iii)  $x \geq 0$  のとき、 $u(x, 0)$  と  $u_t(x, 0)$  を求めよ。

(2)  $\phi \in C^2(I; \mathbf{R})$  と  $\psi \in C^1(I; \mathbf{R})$  が  $\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(0) = \psi(0) = \psi'(0) = 0$  を満たすとき、(1) の  $f$  と  $g$  をうまく選んで、

$$(WE) \quad \frac{1}{c^2} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty))$$

$$(DBC) \quad u(0, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty))$$

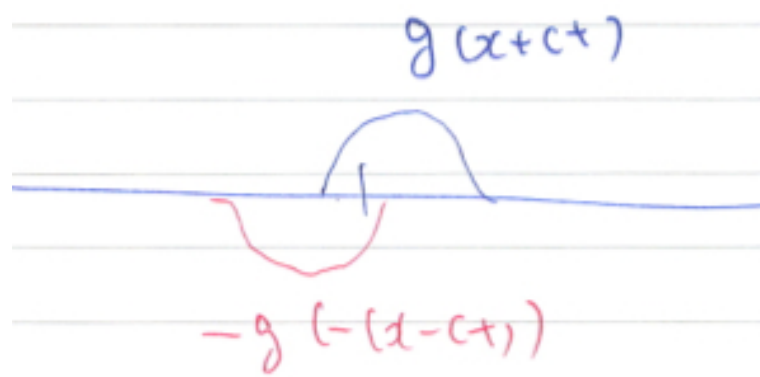
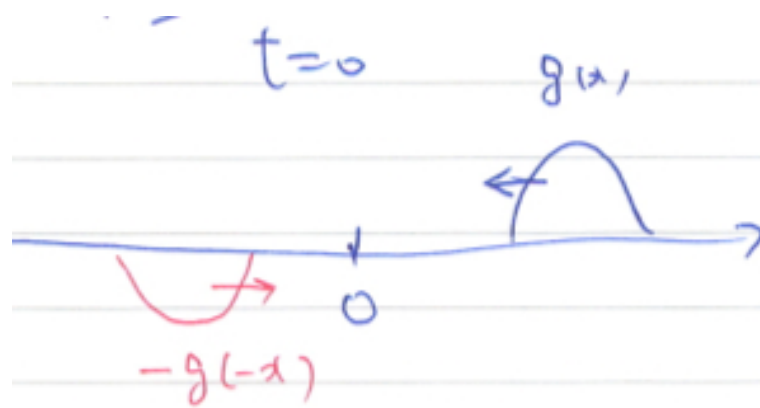
$$(IC) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (t \in (0, \infty))$$

の解を求めよ。

(3) 波が  $x = 0$  で反射されると、「山は谷になって」戻って来ることを説明せよ。

<sup>30</sup>1 次元でいうと  $(f^2)' = 2f'f$  という感じで、 $\frac{\partial}{\partial t}(u_t)^2 = 2u_t u_{tt}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla u \cdot \nabla u) = 2\nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla u$ .





## 第2章 熱方程式

この章は多くを藤田他 [59] に負っている。

### 2.1 1 次元熱方程式の導出

一様で真っ直ぐな針金 (細いため断面が点であると理想化できる) を考え、時間の経過とともに、温度分布がどう変化するかを問題にする。

針金は  $x$  軸の区間  $I = [a, b]$  におかれているとし、針金上の点  $x$  の時刻  $t$  における温度を  $u(x, t)$  とする。

針金上の任意の点  $x_0 \in (a, b)$  を考える。 $x_0$  を含む小さな开区間  $V = (\alpha, \beta)$  で  $a < \alpha < x_0 < \beta < b$  を満たす任意のものをとる。時刻  $t$  において、 $V$  内にある総熱量は

$$J(t) = \int_{\alpha}^{\beta} c(x) u(x, t) dx$$

で与えられる。ここで  $c = c(x)$  は針金の単位長さあたりの熱容量である。

時刻  $t$  から時刻  $t + \Delta t$  までの時間  $\Delta t$  の間の、熱量  $J$  の変化  $\Delta J$  は

$$\Delta J = J(t + \Delta t) - J(t) \doteq J'(t) \Delta t = \left( \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} (c(x) u(x, t)) dx \right) \Delta t = \left( \int_{\alpha}^{\beta} c(x) u_t(x, t) dx \right) \Delta t$$

で与えられる。

一方、同じ時間に  $V$  の両端  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  から  $V$  に流れ込んだ熱量を考える。 $x = \alpha$  から  $V$  に流れ込んだ熱量は

$$-k(\alpha) u_x(\alpha, t) \Delta t$$

である。これは

**Fourier の熱伝導の法則 (Fourier's law of heat conduction)**

熱の流れの速さは、温度の勾配に比例する  
(向きは温度の高い方から低い方)

による<sup>1</sup>。ここで比例定数  $k = k(x)$  は熱伝導率 (thermal conductivity) と呼ばれる。

同様にして、反対側の点  $x = \beta$  から  $V$  に流れ込んだ熱量は

$$k(\beta) u_x(\beta, t) \Delta t$$

<sup>1</sup>この法則は「熱は温度の高い方から低い方に流れる」という誰でも「知って」いる事実を定量的に表したものである。

である。

熱量保存則によると、 $\Delta J$  は、時刻  $t$  から時刻  $t + \Delta t$  の間に  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  から  $V$  に流れ込んだ熱量に等しい。すなわち

$$\left( \int_{\alpha}^{\beta} c(x) u_t(x, t) dx \right) \Delta t \doteq \Delta J = k(\beta) u_x(\beta, t) \Delta t - k(\alpha) u_x(\alpha, t) \Delta t.$$

これから

$$\int_{\alpha}^{\beta} c(x) u_t(x, t) dx = k(\beta) u_x(\beta, t) - k(\alpha) u_x(\alpha, t) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x} (k(x) u_x(x, t)) dx.$$

両辺を  $\beta - \alpha$  で割ってから、 $\alpha \rightarrow x_0$ ,  $\beta \rightarrow x_0$  とすると、

$$c u_t(x_0, t) = \frac{\partial}{\partial x} (k(x) u_x(x, t)) \Big|_{x=x_0}.$$

つまり

$$(2.1.1) \quad c u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} (k(x) u_x(x, t)).$$

針金は一様で、 $c$ ,  $k$  は定数であると仮定すると、 $\kappa := k/c$  として

$$u_t(x, t) = \kappa u_{xx}(x, t).$$

まとめておくと：一様な針金における温度  $u = u(x, t)$  の満たす微分方程式は

$$u_t(x, t) = \kappa u_{xx}(x, t).$$

なお、適当に変数の単位を取り替えることにより  $\kappa = 1$  とすることができる（詳細は後述 — p. 109 の例 2.14.1）。

**注意 2.1.1** 上の議論で、熱の持つ性質について、Fourier の熱伝導の法則以外に使っているのは、次の中学校の理科の問題を解くために必要な事項くらいである。

問題

20°C の水 100 g と、80°C の水 50 g を混ぜたときの水の温度を求めよ。

答 混ぜた後の水の温度を  $x^\circ\text{C}$  とすると、

$$20 \times 100 + 80 \times 50 = x(100 + 50).$$

これを解いて  $x = \frac{300}{7} \doteq 42.9^\circ\text{C}$ . — この解答を振り返ると、

- (1) 温度  $\times$  水の量（ここではグラム数）で、水が持っている熱の「量」が測れる。
- (2) 混ぜる前と混ぜた後で熱の総量は変わらない。

ということを用いていることが分かる。■

余談 2.1.1 (熱伝導率) 熱伝導率は、単位時間に単位面積を通過する熱エネルギーを温度勾配 (単位長さあたりの温度差) で割った量なので、SI 単位系では  $\text{W/K} \cdot \text{m}$  が単位である。空気  $0.024 \text{ W/K} \cdot \text{m}$  ( $0^\circ\text{C}$ ), 乾燥木材  $0.1 \text{ W/K} \cdot \text{m}$  程度 ( $0^\circ\text{C}$ ), 水  $0.6 \text{ W/K} \cdot \text{m}$  ( $0^\circ\text{C}$ ), ステンレス  $16 \text{ W/K} \cdot \text{m}$ , 鉄  $79.5 \text{ W/K} \cdot \text{m}$  ( $20^\circ\text{C}$ ), アルミ  $237 \text{ W/K} \cdot \text{m}$  ( $20^\circ\text{C}$ ), 銅  $390 \text{ W/K} \cdot \text{m}$  など。

上の数値に温度が添えてあるのは、実は熱伝導率は温度にも依存するからである。つまり、 $k$  は  $u$  の関数  $k = k(u)$  である。この場合、上の議論には大幅な修正が必要になるが、 $u$  が変化したときの  $k$  の変化は緩やかなので、温度変化が小さな幅に納まっているときは、 $k(u)$  を定数としても結果に大きな違いが生じない、とのことである。■

## 2.2 多次元熱方程式の導出

前節では、空間 1 次元の熱伝導現象 (十分細くて断面が点であると理想化された針金上の熱伝導) を記述する方程式を導出したが、日常の熱現象は 3 次元であるし、 $\mathbf{R}^n$  における熱方程式がどんなものであるか、興味がわくところである。結論から言うと、

$$(2.2.1) \quad c \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \text{ grad } u)$$

となる ( $c$  は単位体積あたりの熱容量、 $k$  は熱伝導率)。これは (2.1.1) の素直な拡張になっている。

物質が一様で、 $c$  と  $k$  が定数の場合は、 $\kappa := k/c$  として

$$(2.2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u$$

を得る<sup>2</sup>。変数の単位を取り替えることで  $\kappa = 1$  とすることもできる。

(2.2.1) の導出 考えている領域  $\Omega$  内の任意の点  $x_0$  を取る。つぎに

$$x_0 \in V \subset \bar{V} \subset \Omega$$

となる任意の領域  $V$  を取り、 $V$  の表面 (数学的には境界) を出入りする熱量を考える。

単位体積あたりの熱容量を  $c = c(x)$  とすると、 $V$  に含まれる総熱量は、温度  $u$  を用いて、次の積分で表現できる。

$$J(t) := \int_V c(x) u(x, t) dx$$

よって、 $V$  における総熱量  $J$  の、時刻  $t$  から時刻  $t + \Delta t$  までの間の増分  $\Delta J$  は

$$\Delta J = J(t + \Delta t) - J(t) \doteq J'(t) \Delta t = \left( \int_V c u_t dx \right) \Delta t.$$

---

<sup>2</sup>念のため:  $\text{div grad} = \Delta$  というベクトル解析の公式を使った。

一方、空間における Fourier の熱伝導の法則は、次のようになる: ある瞬間  $t$ , ある点  $x$  における熱流束密度<sup>3</sup>は、温度勾配に比例する。ゆえに、比例定数を  $k = k(x)$  (熱伝導率 (thermal conductivity) と呼ばれる) とすると、

$$\text{熱流束密度} = -k(x) \operatorname{grad} u(x, t)$$

である (熱は温度の高い方から低い方に流れるので、比例定数  $k(x)$  を正とすれば<sup>4</sup>、負号が必要になる)。これから、時刻  $t$  から  $t + \Delta t$  の間に、 $V$  の境界  $S$  を通って  $V$  から流出する熱量は

$$\left( \int_S (-k \operatorname{grad} u) \cdot \vec{n} \, d\sigma \right) \Delta t$$

となる<sup>5</sup>。ここで  $\vec{n}$  は、 $S$  上の点における外向き単位法線ベクトルである。(説明:  $S$  上の点  $x$  を含む  $S$  の小部分  $\Delta S$  から、 $V$  の外部に流出する熱量は、 $(-\operatorname{grad} u(x, t)) \cdot \vec{n} |\Delta S| \Delta t$  である。ただし  $|\Delta S|$  は  $\Delta S$  の面積を表す。)  $V$  に流入する熱量は、符号を変えたものである。

熱量の保存則より、

$$\int_V c(x) u_t(x, t) \, dx = \int_S k(x) \operatorname{grad} u(x, t) \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

右辺を Gauss の発散定理 (p. 156) を用いて体積積分に直すと

$$\int_V c(x) u_t(x, t) \, dx = \int_V \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u(x, t)) \, dx.$$

これが  $x_0$  の任意の近傍  $V (\subset \Omega)$  で成り立つことから、

$$c u_t(x_0, t) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u(x, t))|_{x=x_0}.$$

ゆえに、

$$u_t(x, t) = \frac{1}{c(x)} \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u(x, t)) \quad (x \in \Omega, t > 0).$$

問 連続関数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  が、 $0$  の任意の有界閉近傍  $V$  で

$$\int_V f(x) \, dx = 0$$

を満たすならば、実は  $f(0) = 0$  であることを示せ。(ヒント: 積分の平均値の定理、あるいは背理法を用いると簡単である。)

<sup>3</sup>heat flux density の訳語。単位時間に単位面積を通過する熱量。小さな面の面積ベクトルとの内積がその面を単位時間に通過する熱量となる。

<sup>4</sup>自然科学に現れる比例定数は、できる限り正とするのが不文律らしい。

<sup>5</sup>次のことが理解出来ているか:  $\mathbf{v}(x)$  を水のような縮まない流体の速度場とすると、流束積分  $\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$  は、単位時間あたりに  $S$  を通り抜ける水の体積を表す。

問 連続関数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{|B(x_0; \varepsilon)|} \int_{B(x_0; \varepsilon)} f(x) dx = f(x_0)$$

が成り立つことを示せ。ただし  $B(x_0; \varepsilon) := \{x \in \mathbf{R}^n; |x - x_0| < \varepsilon\}$  で、 $|B(x_0; \varepsilon)|$  は  $B(x_0; \varepsilon)$  の測度 ( $n = 2$  のときは面積、 $n = 3$  のときは体積) を表すとする。

注意 2.2.1 (熱方程式と波動方程式の違い — すぐ分かること) 初めて学ぶときは、ちょっと見た目には ( $\Delta$  に目が行って) 熱方程式  $u_t = \Delta u$  と波動方程式  $u_{tt} = \Delta u$  は似ているように思うかも知れない (差は  $t$  についての微分の階数のみ)。しかし、その性質はかなり異なっている (前者は放物型、後者は双曲型と違う「型」に分類される)。その違いは、常微分方程式のアナロジーで説明すると、 $A$  を正定数とするときの

$$(2.2.3) \quad \frac{dx}{dt} = -Ax \quad (\text{放射性元素の崩壊の方程式})$$

と

$$(2.2.4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -Ax \quad (\text{単振動の方程式})$$

の違いに似ている。(2.2.3) の一般解は

$$x(t) = Ce^{-At} \quad (C \text{ は任意定数})$$

であるが、(2.2.4) の一般解は

$$x(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t, \quad \omega := \sqrt{A} \quad (C, D \text{ は任意定数})$$

であり、その性質はまったく異なることが分かる (前者は  $t$  の増加とともに単調に減少して 0 に近づくが、後者は減衰せずいつまでも振動し続ける)。— 実は、熱方程式と波動方程式の初期値境界値問題を Fourier の方法で解く際に現れる  $t$  についての常微分方程式は、それぞれ上のタイプになっているので、単なる類似以上のものになっている。とある友人 (双曲型方程式に詳しい) が

「双曲型方程式はつまりは運動方程式だから」

という言葉漏らしたが、含蓄があると感じている。■

## 2.3 初期値境界値問題、適切性

### 2.3.1 定式化

以下しばらくは次の問題を考える。

### (H-IBP)

次の (HE), (DBC), (IC) を満たす  $u = u(x, t)$  を求めよ:

$$(HE) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad (x \in (0, 1), t > 0),$$

$$(DBC) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

ただし  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  は与えられた連続関数であるとする。

- (DBC) のように空間領域の境界<sup>6</sup>における状態を指定する条件を境界条件 (boundary condition) と呼ぶが、特に (DBC) のように 未知関数の値そのものを指定する条件を ディリクレ Dirichlet 境界条件 (Dirichlet boundary condition) あるいは第一種境界条件 と呼ぶ。このように値が 0 であるという条件を同次 Dirichlet 境界条件 (homogeneous Dirichlet boundary condition)<sup>7</sup> と呼ぶ。
- (IC) のように初期時刻における状態を指定する条件を初期条件 (initial condition) と呼ぶ。また  $f$  を初期値 (initial value) または初期データ (initial condition) と呼ぶ。
- (H-IBP) のように微分方程式以外に初期条件と境界条件を課した問題を、初期値境界値問題 (initial boundary value problem) または混合問題 (mixed problem) と呼ぶ。特に「Dirichlet 混合問題」という呼び方もあって便利である (境界条件を Neumann 境界条件に変えた場合は「Neumann 混合問題」と呼ぶわけである)。

## 2.3.2 適切性

このような数理物理学の問題に対して、アダマール (Jacques Salomon Hadamard, 1865–1963, フランスの Versailles に生まれ、Paris にて没する) は、適切性 (well-posedness) という概念の重要性を提唱した。問題が適切 (well-posed) であるとは、問題の解が一意的に存在し、かつ解がデータに連続的に依存することである。

問題が適切であることは、ほぼ自然な要請 (願望?) であると言ってよいが<sup>8</sup>、一部の人が素朴に信じているように「当然成り立つこと」ではない<sup>9</sup>。現実存在する現象を記述するよ

<sup>6</sup>ここでは、空間領域とは开区間  $(0, 1)$  のことで、その境界は二点からなる集合  $\{0, 1\}$  である。

<sup>7</sup>あるいは、せいじ 齊次 Dirichlet 境界条件とも呼ぶ。「同次」=「齊次」=“homogeneous”である。

<sup>8</sup>まず解が存在しないと話にならない。また一意性がないというのは、解が特定できないということで理論が不十分であるとも考えられるであろう (人によっては一意性の要請は当たり前だと思うかもしれない) — 実はそうとも限らないのだが。それから、「未来のことを予言する」ためには、現在の状況を観測して、そのデータをもとにして計算するわけだが、現実の測定データには必ず誤差があるため、データへの連続性も成り立ってほしいところである。

<sup>9</sup>現代的な観点からの適切性「批判」：連続性の否定というわけではないのだが、データのごくわずかな擾乱が結果の大きな相違を生むというカオス系のバタフライ効果の発見により、「結果の予言可能性」はそう簡単に期待できるものではないと最近では認識されるようになっていく。また、非線型問題では、解の一意性が成り立たないことが非常にしばしばある — しかもそれが自然であり、特に困ったことではない、ということもよく分ってきた (例えば話として、2 次方程式で解が二つになっても、問題の物理的な意味から、負の値は捨てて正の解を選ぶように、選びだすための適当な条件があればよい)。さらに、逆問題と呼ばれる分野 (解からデータを求め



うに (そうなるように願って) 作られた数学モデルではあるが、そうして得られた数学モデルと元の現象とは、あくまでも別のものであって、現象が実際に起こることから、数学モデルに解が存在することは保証できない。数学モデルが正しく現象を記述しているかどうかは、我々には証明しようがないことである (せいぜい状況証拠をあげるくらいしかできない)。もちろん、数学モデルがどのような性質をもつか、数学的に解析することは可能である (それをするのが数学である)。

### 2.3.3 古典解

適切性の議論をするには、考察の対象とする解を明確に定義する必要がある。

我々は、以下では、古典解を考察の対象とする。(H-IBP) の古典解とは、次のように定義される。

初期値境界値問題 (H-IBP) の古典解

$u$  が (H-IBP) の古典解であるとは、以下の 3 条件が成り立つことである。

- (1)  $u$  は  $[0, 1] \times [0, \infty)$  で連続。
- (2)  $u_t, u_x, u_{xx}$  は  $(0, 1) \times (0, \infty)$  で存在し、連続。
- (3) (HE), (DBC), (IC) が成り立つ。

注意 2.3.1 (「古典解」という語のニュアンスについて) 偏微分方程式の問題は難しいので、解の存在を示すために、しばしば次のような論法を使う。

まずもとの方程式の意味を緩めた「弱い方程式」の解 (弱解 (weak solution) または広義解 (generalized solution) と呼ぶ) を求めて<sup>10</sup>、後から、それがもとの方程式を満たすことをチェックする。

現在では、単に解と言った場合、むしろこれらの弱解、広義解を意味する場面がかなり多くなってきている。そこで、これらの「近代的な解」と異なることを明確にする意味で、「古典解」という言葉が使われている。■

常微分方程式の問題の適切性を示すのは簡単だが (一般的な定理を学んだはずである)、偏微分方程式の問題の適切性を示すのは、しばしばかなり難しい。一般的に議論するのはほとんど絶望的で、個々の偏微分方程式のタイプに応じた証明が必要になる。さらには、一つの方程式の問題で、解の存在を示すための方法と、解の一意性を示すための方法がまったく異なってしまうことも珍しくはない。我々がここで考えている初期値境界値問題 (H-IBP) も、この典

ようとする。例えば今の場合では、ある時刻における  $u$  についての情報から時間を遡って初期値  $f$  を求めようとしたこと。) では、設定をかなり工夫しないと (一意性、連続性は言うに及ばず) 解の存在すら期待するのが難しいことが理解されるようになってきた。ともあれ、取り組んでいる問題が適切であるかどうかは、まず最初に調べるべき重要なことであるという認識は変わっていない。— なお、カオスについては (数学書ではないが) グリック [26] がお勧めの入門書である。

<sup>10</sup> これはしばしば古典解の存在を示すよりも簡単になる。



型的な例であり、解の存在は Fourier の方法 (後述) で示せるが、解の一意性やデータに関する連続性は、最大値原理 (後述) という定理を用いることになる。

脱線: 連立 1 次方程式の解の存在と一意性

高等学校までの数学では、方程式の問題を解けと要求された場合、実際に解を表現する式を求めるのが普通であった。ところが、一般には、問題の解を具体的な式で表現することがいつも可能であるとは限らない。それどころか、解の存在と一意性の証明は、あくまでも別物であることに注意しよう。筆者が大学一年生で、線形代数学を学んでいる時に、次の定理と証明に出会った。

**定理** 行列  $A$  が正則のとき、方程式  $Ax = b$  の解は  $x = A^{-1}b$ .

**証明**  $Ax = b$  の両辺に左から  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  をかけると  $x = A^{-1}b$ .

逆に  $x = A^{-1}b$  のとき、 $Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$ . ■

この定理も、証明中の式変形も、きわめて明解だが、当時の私には、証明の二行目がなぜ必要であるかが理解できなかった (本当に納得するまで何カ月もかかった)。実は一行目では、「もし方程式の解が存在すると仮定すると、それは  $A^{-1}b$  以外にはありえない」ということ (いわば解の一意性) しか証明しておらず、解の存在は証明できていないのである。二行目の議論によって、解の存在が確かめられたわけである。線形代数のような簡単な問題においては、解の一意性と解の存在は、ほとんど同じ方法 (逆行列の性質の利用) で証明できたが、偏微分方程式の問題では、そうは問屋が卸さない。

## 2.4 最大値原理と解の一意性

任意に正の数  $T$  を固定して、

$$Q = Q_T := [0, 1] \times [0, T],$$

$$\Gamma = \Gamma_T := \{(0, t); 0 \leq t \leq T\} \cup \{(1, t); 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x, 0); 0 \leq x \leq 1\},$$

$$Q^\circ = Q_T^\circ := Q_T \setminus \Gamma_T = (0, 1) \times (0, T]$$

とおく。 $\Gamma$  のことを  $Q$  の放物境界 (parabolic boundary) と呼ぶ<sup>11</sup>。

$u$  が熱方程式  $u_t = u_{xx}$  の  $Q_T$  における古典解であるとは、 $u$  が次の条件を満たすことであるとする。

ほうぶつがたほうていしき

<sup>11</sup>熱方程式は、放物型方程式 (parabolic equation) と呼ばれるタイプの偏微分方程式である。ここで示しているような熱方程式の性質の多くは、放物型方程式に共通に成り立つことが多い。そのため、用語にも「放物」というのが登場してしまったわけである。なお、「放物境界」は位相空間論の用語の「境界」とは一致しないことを注意しておく。

熱方程式の  $Q_T$  における古典解の条件

- (1)  $u$  は  $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$  で連続。
- (2)  $u_t, u_x, u_{xx}$  は  $Q_T^\circ = (0, 1) \times (0, T]$  で存在し、連続。
- (3)  $Q_T^\circ$  で  $u_t = u_{xx}$  が成り立つ。

我々は、初期値境界値問題 (H-IBP) を、 $t$  について  $[0, \infty)$  の範囲で考えているが、技術的な都合から、考察の範囲を一時的に  $Q_T$  に限定するのである<sup>12</sup>。

**定理 2.4.1 (熱方程式の解の最大値原理 (maximum principle))**  $v = v(x, t)$  が、熱方程式の  $Q_T$  における古典解ならば、

$$(2.4.1) \quad \max_{(x,t) \in Q_T} v(x, t) = \max_{(x,t) \in \Gamma_T} v(x, t),$$

$$(2.4.2) \quad \min_{(x,t) \in Q_T} v(x, t) = \min_{(x,t) \in \Gamma_T} v(x, t).$$

$Q_T$  は  $\mathbf{R}^2$  の有界閉集合であるから、コンパクトであり、その上で連続な関数  $v$  は、必ず最大値と最小値を持つことに注意しよう。考察の範囲を  $Q_T$  にしぼったのは、このように最大値、最小値の存在を保証するためでもある。

証明 最大値について証明する (最小値についても同様に証明できる)。

$$\lambda := \max_{(x,t) \in \Gamma_T} v(x, t)$$

とおき、

$$(2.4.3) \quad v(x, t) \leq \lambda \quad ((x, t) \in Q_T)$$

の証明を目標とする。そのため

$$w(x, t) := e^{-t}(v(x, t) - \lambda)$$

とおくと、まず明らかに

$$w \leq 0 \quad (\Gamma_T \text{ 上})$$

であるが、さらに

$$(2.4.4) \quad w_t + w = w_{xx} \quad (Q_T^\circ \text{ 上})$$

という微分方程式が成り立つことがわかる (実際  $v = e^t w + \lambda$  より、 $v_t = e^t v + e^t v_t$ ,  $v_{xx} = e^t w_{xx}$  が得られ、これを熱方程式  $v_t = v_{xx}$  に代入して  $e^t w_t + e^t w = e^t w_{xx}$ .  $e^t > 0$  であるから、両辺を  $e^t$  で割れば (2.4.4) が得られる)。

主張:  $Q_T$  上  $w \leq 0$ . (これが分かれば (2.4.3) が分かる。)

<sup>12</sup>細かい注釈:  $Q_T^\circ$  が、普通の意味での  $Q_T$  の内部  $(0, 1) \times (0, T)$  ではなく、長方形の上辺 (ただし端点はいらない) を含めるのは、この上辺は、もともと偏微分方程式を考えている範囲  $[0, 1] \times [0, \infty)$  の内部  $(0, 1) \times (0, \infty)$  に属するからである。

主張の証明  $\mu := \max_{(x,t) \in Q_T} w(x,t)$  とおき、 $\mu \leq 0$  を背理法で証明する。正の最大値が  $(x_0, t_0) \in Q_T$  で到達されると仮定する:

$$\mu = w(x_0, t_0) > 0.$$

条件  $w \leq 0$  ( $\Gamma_T$  上) より  $(x_0, t_0) \notin \Gamma$  であるから、 $(x_0, t_0) \in Q_T^\circ$  である。それゆえ、(2.4.4) に  $(x, t) = (x_0, t_0)$  を代入して得られる等式

$$w_t(x_0, t_0) + \mu = w_{xx}(x_0, t_0)$$

において、以下の 3 つが成り立ち、矛盾が導かれる。

(1) 左辺第 1 項  $\geq 0$ .

(まず  $0 < t_0 \leq T$  に注意する。関数  $w(x_0, \cdot): t \mapsto w(x_0, t)$  は  $t = t_0$  で最大値となるわけであるが、 $0 < t_0 < T$  であれば  $w_t(x_0, t_0) = 0$  となるし<sup>13</sup>、 $t_0 = T$  であれば  $w_t(x_0, t_0) \geq 0$  である。実際  $t = t_0 = T$  で最大であることから、 $\forall t \in [0, T) w(x_0, t) \leq w(x_0, t_0)$  であるから、 $\forall h \in (-T, 0)$  に対して  $w(x_0, t_0 + h) - w(x_0, t_0) \leq 0$ 。ゆえに ( $h < 0$  に注意して)  $\frac{w(x_0, t_0 + h) - w(x_0, t_0)}{h} \geq 0$ 。これから  $w_t(x_0, t_0) \geq 0$  が得られる<sup>14</sup>。)

(2) 左辺第 2 項  $> 0$ .

(これは背理法の仮定であった。)

(3) 右辺  $\leq 0$ .

( $0 < x_0 < 1$  ゆえ、関数  $w(\cdot, t_0): x \mapsto w(x, t_0)$  は内点  $x_0$  で最大値を持つことになるから、良く知られた定理によって、 $w_x(x_0, t_0) = 0$  であるのみならず、 $w_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$  が成り立つ。実際、もしも  $w_{xx}(x_0, t_0) > 0$  ならば、 $w(\cdot, t_0)$  は  $x_0$  で狭義の極小値をとることになり、 $x_0$  で最大値をとることと矛盾する。)

であるから、左辺  $> 0$ 、右辺  $\leq 0$  となり矛盾が生じる。ゆえに  $\mu \leq 0$  であり、 $Q_T$  上  $w \leq 0$  が成り立つ。[主張の証明終了]

上の主張から (2.4.3) はすぐに導かれる。ゆえに

$$\max_{(x,t) \in Q_T} v(x,t) \leq \lambda = \max_{(x,t) \in \Gamma_T} v(x,t).$$

逆向きの不等式は当然成り立つ<sup>15</sup>から、

$$\max_{(x,t) \in Q_T} v(x,t) = \max_{(x,t) \in \Gamma_T} v(x,t). \blacksquare$$

最大値原理は、証明も初等的だし、見たところ単純な定理であるが、非常に幅広い応用がある。様々な深い結果を導くために使うことができるが、ここではごく簡単なものをあげておこう。

<sup>13</sup>微分可能な関数  $f$  が内点  $a$  で極値を取れば  $f'(a) = 0$ .

<sup>14</sup>これは、内点で極値を取れば微分係数が 0、という定理の証明 (の半分) を実行したことになる。

<sup>15</sup> $Q_T \supset \Gamma_T$  であり、「広い範囲の最大値の方が、狭い範囲の最大値よりも大きい」ので、 $\max_{(x,t) \in Q_T} v(x,t) \geq \max_{(x,t) \in \Gamma_T} v(x,t)$ .

系 2.4.2 (順序の保存, 比較定理)  $u, w$  がともに  $Q_T$  における熱方程式の古典解で、 $\Gamma$  上  $u \geq w$  をみたすならば、 $Q_T$  上で  $u \geq w$ .

証明  $v := u - w$  とおくと、 $v$  は  $Q_T$  における熱方程式の古典解になる。実際

$$v_t = \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{\partial}{\partial t} (u - w) = u_t - w_t = u_{xx} - w_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u - w) = v_{xx}.$$

ゆえに最大値の原理から

$$\min_{(x,t) \in Q_T} v(x,t) = \min_{(x,t) \in \Gamma_T} v(x,t)$$

であるが、仮定から  $\Gamma_T$  上で  $v \geq 0$  であり、上式の右辺は 0 以上である。ゆえに

$$\min_{(x,t) \in Q_T} v(x,t) \geq 0.$$

すなわち  $Q_T$  上で  $u \geq w$ . ■

系 2.4.3 (正値性の保存)  $v$  が  $Q_T$  における熱方程式の古典解で、 $\Gamma_T$  上  $v \geq 0$  を満たすならば、 $v$  は  $Q_T$  上  $v \geq 0$  を満たす。

証明 (実は定数関数 0 が熱方程式の古典解であることに注意すれば、上の系 2.4.2 の系であるとも考えられる。しかし直接証明しよう。) 最大値の原理より

$$\min_{(x,t) \in Q_T} v(x,t) = \min_{(x,t) \in \Gamma_T} v(x,t) \geq 0$$

であるから、 $Q_T$  上  $v \geq 0$ . ■

系 2.4.4 (熱方程式の初期値境界値問題 (H-IBP) の古典解の一意性) 熱方程式の初期値境界値問題 (H-IBP) の古典解は一意である。

証明  $u_1, u_2$  をともに初期値境界値問題 (H-IBP) の古典解とする。任意に  $T > 0$  を取って固定して、 $Q_T$  に制限して考える<sup>16</sup>。  $v := u_1 - u_2$  とおくと、 $v$  は  $Q_T$  における熱方程式  $v_t = v_{xx}$  の古典解になり、 $\Gamma_T$  上で  $v = 0$  が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned} \max_{(x,t) \in Q_T} v(x,t) &= \max_{(x,t) \in \Gamma_T} v(x,t) = 0, \\ \min_{(x,t) \in Q_T} v(x,t) &= \min_{(x,t) \in \Gamma_T} v(x,t) = 0 \end{aligned}$$

であるから、 $Q_T$  上  $v = 0$ . すなわち  $Q_T$  上  $u_1 = u_2$ .  $T$  は任意ゆえ  $u_1 = u_2$  on  $[0, 1] \times [0, \infty)$ . ■

以下の説明は軽く読み流してもらえれば十分である。

<sup>16</sup>この後、すぐに順序の保存を用いて、 $u_1 \geq u_2, u_1 \leq u_2$  から  $u_1 = u_2$  としても証明できるが (わかりますか? ), ここでは最大値原理から直接証明しておく。

発展 1: 強最大値原理 上に掲げた最大値原理は、 $Q$  における最大値は  $\Gamma$  で生じることを主張しているだけで、最大値が  $Q^\circ$  でも生じることを否定はしていない (「 $Q^\circ$  では最大値を取らない」とは言っていない)。実際、 $v \equiv \text{定数}$  の場合は、どこも最大値なわけで、 $Q^\circ$  の点でも最大値になっている。実は、 $Q^\circ$  で最大値を取りうるのは、このような (定数関数の) 場合しかないという定理が証明できる。それを強最大値原理という。■

発展 2: 最大値原理は色々な方程式について成り立つ かなり広い範囲の 2 階の微分方程式<sup>17</sup> に対して (強) 最大値原理が成り立つ。例えば、定理 3.3.1 (調和関数に関する最大値原理) や、複素関数論における次の定理など。

命題 2.4.5 (正則関数の絶対値に対する最大値原理)  $D$  は複素平面  $\mathbf{C}$  の有界な領域で、 $f: \overline{D} \rightarrow \mathbf{C}$  は連続、かつ  $f$  は  $D$  で正則とすると、

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|, \quad \min_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \min_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

もっと強く、 $D$  の内部で最大値または最小値が到達されるならば、 $f \equiv \text{定数}$ 。

一方、熱方程式を一般化した (空間を  $n$  次元にして、1 階微分の項をつけた)

$$u_t = \Delta u + \sum_{j=1}^n b_j(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

について、上の定理と同じ形の最大値原理を証明するのは簡単である (本当に簡単であるから、自分でやってみるとよい。さらには、強最大値原理も成り立つ。)。0 階の項  $c(x, t)u$  を含めた

$$u_t = \Delta u + \sum_{j=1}^n b_j(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x, t)u$$

については、最大値原理はそのままでは成り立たない ( $c \leq 0$  や、最大値の符号についての条件を加えるなど、若干の修正が必要になる)。ただし、順序の保存、正值性の保存、解の一意性は成り立つ<sup>18</sup>。もっと一般に、線形でない

$$u_t = \Delta u + \sum_{j=1}^n b_j(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + F(x, t, u(x, t))$$

の形の方程式に対しても、(適当な仮定の下で) 順序の保存や解の一意性は証明できる。

なお、2 階の項  $\Delta u$  についても一般化ができる (どういう一般化が可能か説明に少し手間がかかるので省略しただけである)。■

最大値原理については、Protter-Weinberger [84] が便利なテキストである。

## 2.5 解の安定性、初期データへの連続的依存性

適切性のところで述べたように、解  $u$  が初期データ  $f$  に連続的に依存する、すなわち解  $u$  を初期値  $f$  の関数  $T(f)$  とみなしたとき、 $T$  は連続であるということを示そう。

<sup>17</sup>まだ紹介していない言葉を使うと、放物型方程式と楕円型方程式について (強) 最大値原理が成り立つ。

<sup>18</sup>最大値原理の証明と同様に、 $u$  の代わりに  $w = e^{\lambda t}u$  を考えるというテクニックを用いる。

「連続」の意味を定めるには、関数の集合に適当な位相を入れる必要がある。ここでは、 $[0, 1]$  上の実数値連続関数全体の集合  $X = C[0, 1]$  に、次式でノルムを定義する。

$$(2.5.1) \quad \|f\| := \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad (f \in X).$$

補題 2.5.1 (2.5.1) で定義した  $\|\cdot\|$  は、 $X = C[0, 1]$  のノルムであり、 $X$  はこのノルムで Banach 空間になる。すなわち次の 4 条件が成り立つ。

(1) (正値性)

$$(a) \quad \forall f \in X \text{ に対して } \|f\| \geq 0.$$

$$(b) \quad \forall f \in X \text{ に対して } \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

$$(2) \quad \forall f \in X, \forall \lambda \in \mathbf{R} \text{ に対して } \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|.$$

$$(3) \quad (\text{三角不等式}) \quad \forall f \in X, \forall g \in X \text{ に対して } \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

$$(4) \quad (\text{完備性: Cauchy 列は必ず収束する}) \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| = 0 \text{ ならば、} \exists f_\infty \in X \text{ s.t.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_\infty\| = 0.$$

証明 (簡単だから省略。) ■

定理 2.5.2 (安定性) 熱方程式の初期値境界値問題 (H-IBP) の古典解  $u$  と初期値  $f$  について次の不等式が成り立つ。

$$(2.5.2) \quad \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \quad (\forall t \in [0, \infty)).$$

ノルムの記号を使って書き改めると

$$\|u(\cdot, t)\| \leq \|f\| \quad (\forall t \in [0, \infty)).$$

証明  $\|f\| = M$  とおくと、ノルムの定義から  $-M \leq f(x) \leq M$  ( $x \in [0, 1]$ ). それと  $u$  の境界値が 0 であることから、任意の  $T > 0$  に対して

$$-M \leq u(x, t) \leq M \quad ((x, t) \in \Gamma_T).$$

ゆえに最大値原理から

$$-M \leq u(x, t) \leq M \quad ((x, t) \in Q_T).$$

$T$  は任意であるから、

$$-M \leq u(x, t) \leq M \quad ((x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)).$$

これから (2.5.2) が導かれる。 ■



系 2.5.3 (H-IBP) の初期値  $f = f_j$  に対する古典解を  $u = u_j$  とするとき ( $j = 1, 2$ )、次式が成り立つ:

$$\|u_1(\cdot, t) - u_2(\cdot, t)\| \leq \|f_1 - f_2\| \quad (\forall t \in [0, \infty)).$$

これから、初期値が十分近ければ解も十分近いことが分かる。すなわち、解は初期データに連続的に依存する。

## 2.6 Fourier の方法で解を求める (1) 解の形式的な導出

前節で解の一意性を証明した、初期値境界値問題

再掲 (H-IBP)

次の (HE), (DBC), (IC) を満たす  $u = u(x, t)$  を求めよ:

$$(HE) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad (x \in (0, 1), t > 0),$$

$$(DBC) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

の解を **Fourier** の方法 (Fourier の変数分離法) で求めることがこの節の目標である。

**Fourier** の方法を用いることについて 熱方程式ならば、どんな問題でも Fourier の方法で解けるというわけではない。考えている空間領域  $(0, 1)$  が簡単なため、Fourier 級数が使えるということが大きい。一方で Fourier の方法は熱方程式以外の多くの方程式に対しても使える。そこにひそむ固有関数という概念の理解は非常に重要である。Fourier の方法は基本的ではあるが、偏微分方程式入門としては、ここから始めるのが適切である、と信じる。

### Fourier についてのメモ

**Fourier** の人となり Fourier (Jean-Baptiste-Joseph Fourier) は、ナポレオンの時代のフランスの数学者かつ物理学者かつエジプト学者であり、エジプトのヒエログリフ (神聖文字) を解読したジャン・フランソワ・シャンポリオン (Jean François Champollion, 1790–1832) にエジプトの知識を与えたことでも有名である。

筆者が初めて Fourier の名前を知ったのは、エジプトに関連してのことであった。当時読んでいた本から引用する (今では、有名な数学者の伝記的情報は、MacTutor History of Mathematics archive で簡単に得られるが<sup>19</sup>、これはこれで面白い)。

「十八世紀末から十九世紀初頭にかけて活躍したフランスの数学者、物理学者。1768 年中部フランスのオークセルで仕立屋の子として生まれ、八歳のとき<sup>20</sup>孤児となっている。生地陸軍士官学校で数学を学び、十八歳でパリに出て数学の研究に従事し、二十八歳で理工科大学教授となる。1798 年、ナポレオンのエジプト遠征には学者として参加した。帰国後は政治家に転じ、イゼール、ローヌの県知事となり、その功績で男爵となる。後、学会に復帰し、1828 年には、フランス・アカデミー会員に任ぜ

<sup>19</sup>Fourier の項目は、<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Fourier.html>

<sup>20</sup>細かいことだが、9 歳としてある情報が多い。

られた。1830 年没。」「フーリエは元気にカイロに入場し、エジプト学会の常任理事を勤る反面、エジプトを治めるトルコ政府機関との連絡官を兼任した。彼の柔和な床しい性質、公平な精神は、たちまち現地人の心を捕らえ、驚くほどの信用を博した。そのため彼は遠征軍が撤収してからも、なお一人エジプトにとどまり、古代記念碑への覚え書きやオアシスに関する研究などを本国あてに送り続けた。専門の数学の分野では、アラビアの代数学に関する考察などを記した。」<sup>21</sup>

**Fourier の仕事の意義** Fourier の仕事に先駆けること 60 年ほど前に、d'Alembert 等による波動方程式の研究 (1750 頃) があつたが、Fourier が活躍を始める頃には、解析学はある意味では行き詰りの感じられる状態にあつたらしい (Fourier 解析の生き生きとした姿が解説してあるケルナー [27] の §91 等)。

Fourier は波動方程式の変数分離解などについての考察<sup>22</sup>をヒントに、熱伝導方程式の解を変数分離解の線形無限結合 (Fourier 級数) で表示するという Fourier の方法を編み出した。彼の「すべての周期関数は、それがたとえ連続ですらなくとも、その周期の整数分の 1 を周期とする  $\sin$ ,  $\cos$  を項とする無限級数で表現できる」という主張は、当時の数学者には受け入れにくいものであつた<sup>23</sup>。彼は 1807 年にフランスの学士院に論文を提出したが、出版することが出来ず、1822 年ようやく「熱の解析的理論」という大著 (西村・高瀬 [65] という邦訳がある) を出版できた。現在の視点から見れば、Fourier の主張は、若干の修正は必要であるが<sup>24</sup>、大筋で正しかったと言って良い<sup>25</sup>。しかし当時の数学のレベルでは、証明は到底不可能であつた。むしろ Fourier の主張を正当化するために、様々な数学が生まれ、また育っていったと言えるであろう。

## 2.6.1 第 1 ステップ: 変数分離解を探せ

まず (IC) は無視して、(HE), (DBC) の変数分離解、すなわち  $u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$  の形をした (HE), (DBC) の解を求めることを目標にする。

計算に入る前に、定数関数 0 は条件を満たすことを注意しておく。これは自明解であるから、以下ではそれ以外のものを求めることにしよう<sup>26</sup>。

$u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$  を (DBC) に代入すると

$$\zeta(0)\eta(t) = \zeta(1)\eta(t) = 0 \quad (\forall t > 0).$$

<sup>21</sup>NHK 放送 50 周年記念番組をまとめた「未来への遺産 1」, 学研 (1974) から引用した。数学者でもあつた、というような書き方でちょっと愉快である。なお、様々な数学者のエピソードを集めてあるベル [70] (これは楽しい読み物である) にも Fourier の話が載っている。

<sup>22</sup>波動方程式の場合には、変数分離解は固有振動を表すので、意味が分かりやすい。

<sup>23</sup>そもそも  $\sin$  や  $\cos$  のような解析関数は、これ以上ないというくらい滑らかな関数であるのに、それらを項に持つ級数で、微分不可能な関数はおろか、不連続な関数まで表示できるというのは、実に大胆な主張である。巾級数が解析関数しか表現できないのとは対照的である。

<sup>24</sup>後になって分かったように、Fourier 級数が収束しない連続関数も存在するので、関数の範囲の制限や収束の意味づけについて考える必要がある。しかし、当時は関数概念すら現在のように定まっていなかった時代だから、Fourier がきちんと定理を述べるのは不可能であつたと言えよう。

<sup>25</sup>大抵の人は、Carleson-Hunt の概収束定理 (1966, 1968) 「 $p > 1$  なる実数  $p$  に対して  $f \in L^p$  ならば、 $f$  の Fourier 級数はほとんど至るところ  $f$  に収束する」でカタがついたと思っている。もっとも、現代の数学は、まだ Fourier の主張 (思想?) を汲み取っていない (もっと奥が深いのだ)、という人もいるようである。

<sup>26</sup>以下の計算のあちらこちらで定数関数 0 が出て来る。これは確かに解であるが、一々それを相手にすると面倒なので、最初に注意しておいた。



これから

$$(2.6.1) \quad \zeta(0) = \zeta(1) = 0$$

が得られる。実際、もしもそうでなければ

$$\eta(t) = 0 \quad (\forall t > 0)$$

となり、 $u(x, t) = \zeta(x)\eta(t) \equiv 0$  が得られるが、これは定数関数 0 以外のものを求めるという目標に反する。

次に  $u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$  を (HE) に代入すると

$$\zeta(x)\eta'(t) = \zeta''(x)\eta(t).$$

これから

$$\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)}.$$

この式の値は、左辺を見れば  $x$  によらず、右辺を見れば  $t$  によらない、したがって、 $x$  にも  $t$  にもよらない定数であることが分かる。それを  $\lambda$  とおく：

$$(2.6.2) \quad \frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)} = \lambda.$$

これから

$$(2.6.3) \quad \zeta''(x) = \lambda\zeta(x),$$

$$(2.6.4) \quad \eta'(t) = \lambda\eta(t)$$

が得られる。(2.6.3) は定数係数線形常微分方程式であるから、特性根の方法で解ける。特性根を  $s$  と書くことにすれば、(2.6.3) の特性方程式は

$$s^2 = \lambda$$

であるから、特性根は  $s = \pm\sqrt{\lambda}$ .

(i)  $\lambda = 0$  の場合、特性根は  $s = 0$  (重根) となり、(2.6.3) の一般解は

$$\zeta(x) = Ax + B \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

定数  $A, B$  を (2.6.1) が成り立つように定めると  $A = B = 0$ . これから  $\zeta(x) \equiv 0$  となり、不適である。

(ii)  $\lambda \neq 0$  の場合、(2.6.3) の一般解は

$$\zeta(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

定数  $A, B$  を (2.6.1) が成り立つように定める。

$$\begin{aligned} \zeta(0) = \zeta(1) = 0 &\Leftrightarrow A + B = 0 \quad \text{and} \quad Ae^{\sqrt{\lambda}} + Be^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \\ &\Leftrightarrow B = -A \quad \text{and} \quad A(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0. \end{aligned}$$

もしも  $A = 0$  ならば  $B = 0$  となり  $\zeta(x) \equiv 0$  が導かれ不適である。ゆえに  $A \neq 0$  とすると  $e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$ , すなわち

$$(2.6.5) \quad e^{2\sqrt{\lambda}} = 1.$$

したがって (後述のよく知られた補題により)、

$$\exists n \in \mathbf{Z} \text{ s.t. } 2\sqrt{\lambda} = 2n\pi i, \quad i = \sqrt{-1}.$$

ゆえに

$$\sqrt{\lambda} = n\pi i, \quad \lambda = -n^2\pi^2.$$

対応する  $\zeta$  は

$$\zeta(x) = A(e^{n\pi i x} - e^{-n\pi i x}) = 2iA \sin n\pi x.$$

ここで  $A$  は任意定数であるので、 $n$  と  $-n$  が同じ  $\zeta, \lambda$  を与えること、それから  $\lambda \neq 0$  に注意すると (0 や負の整数は捨ててしまつて)、 $n$  は  $\mathbf{N}$  全体を動くとして構わない。

一方  $\eta$  については、

$$\eta(t) = Ce^{\lambda t} \quad (C \text{ は任意定数}).$$

こうして (HE), (DBC) の変数分離解として

$$u(x, t) = \zeta(x)\eta(t) = c_n u_n(x, t), \quad u_n(x, t) := e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x \quad (c_n \text{ は任意定数}, n \in \mathbf{N})$$

が得られた ( $c_n = 2iAC$  であるが、 $A, C$  とも任意定数だったので、 $c_n$  も任意定数である)。この結果に任意定数が入っているのは、(HE), (DBC) が線形同次方程式だからであり<sup>27</sup>、この定数は他の条件がないと定まらない。■

(2.6.5) を解くのに使った補題を説明しておこう。

**補題 2.6.1**  $\mathbf{C}$  上の方程式  $e^z = 1$  の解は  $z = 2n\pi i$  ( $n \in \mathbf{Z}$ )。ただし  $i$  は虚数単位である。

**注意 2.6.2** この補題 2.6.1 は、複素対数の定義をするための次の命題の特別の場合とも考えられる。

$\forall z \in \mathbf{C}, \forall r > 0, \forall \theta \in \mathbf{R}$  に対して、

$$\exp z = re^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbf{Z} \text{ s.t. } z = \log r + i(\theta + 2n\pi).$$

(ただし  $\log r$  は実関数としての対数関数を表すとする。すなわち  $e^x = r$  を満たす unique な  $x \in \mathbf{R}$  のことを  $\log r$  と書く。) ■

**証明**  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbf{R}$ ) とすると、

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

---

<sup>27</sup>線形同次という言葉の意味は (線形代数などで学んでいるはずであるが念のため) 後述する。

であるが、 $|e^z| = e^x$  であることに注意すると、

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\Leftrightarrow e^x = 1 \quad \text{and} \quad \cos y + i \sin y = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{and} \quad \exists n \in \mathbf{Z} \text{ s.t. } y = 2n\pi \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{Z} \text{ s.t. } z = 2n\pi i. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

注意 2.6.3 ((2.6.2) の分母 = 0 が気になる人へ) 上の議論で、

$$(2.6.6) \quad \eta'(t)\zeta(x) = \eta(t)\zeta''(x) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty))$$

を

$$\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \frac{\zeta''(x)}{\zeta(x)}$$

と変形して議論しているが (こうするのが普通のテキストの相場である)、分母が 0 になるところではどうするか、ちょっと気になるところである<sup>28</sup>。実は次の命題が成立するので、すっきり解決する<sup>29</sup>。

命題 2.6.4 (たすき掛けが等しければ比例している) 空でない集合  $A, B$  とその上で定義された複素数値関数  $\zeta_1, \zeta_2: A \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $\eta_1, \eta_2: B \rightarrow \mathbf{C}$  が条件

$$\zeta_1(x)\eta_1(t) \neq 0,$$

$$(2.6.7) \quad \zeta_2(x)\eta_1(t) = \zeta_1(x)\eta_2(t) \quad ((x, t) \in A \times B)$$

を満たすならば

$$\exists \lambda \in \mathbf{C} \quad \text{s.t.} \quad \zeta_2(x) = \lambda \zeta_1(x) \quad (x \in A) \quad \text{かつ} \quad \eta_2(t) = \lambda \eta_1(t) \quad (t \in B).$$

証明

恒等的に 0 でないという仮定から

$$\exists x_0 \in A \quad \exists t_0 \in B \quad \text{s.t.} \quad \zeta_1(x_0)\eta_1(t_0) \neq 0.$$

(2.6.7) に  $x = x_0, t = t_0$  を代入して、 $\zeta_1(x_0) \neq 0, \eta_1(t_0) \neq 0$  に注意すると

$$\frac{\zeta_2(x_0)}{\zeta_1(x_0)} = \frac{\eta_2(t_0)}{\eta_1(t_0)}.$$

この等式の値を  $\lambda$  とおく。(2.6.7) に  $x = x_0$  を代入して整理すると

$$\eta_2(t) = \frac{\zeta_2(x_0)}{\zeta_1(x_0)} \eta_1(t) = \lambda \eta_1(t) \quad (t \in B).$$

<sup>28</sup>時々、期末試験の答案の中で、分母が 0 にならないことを「証明してしまっ」ている人がいるが、この議論の後で出て来る結果 ( $\zeta(x) = C \sin n\pi x, n \in \mathbf{N}$ ) を見ると、それは成り立たないことが分かる (もちろん「証明」は間違いである)。

<sup>29</sup>まあ、あまりうるさいことを言わない方が良いのかもしれない…

同様に (2.6.7) に  $t = t_0$  を代入して整理すると

$$\zeta_2(x) = \frac{\eta_2(t_0)}{\eta_1(t_0)} \zeta_1(x) = \lambda \zeta_1(x) \quad (x \in A). \blacksquare$$

この命題は、筆者が自力で発見したのだが、後になって、ほぼ同様のことが、ペトロフスキー [69] 第2章 §21 に書いてあるのを発見した。この本には、その他にも、類書には見られない、ていねいな議論が載っていて (名著とされているので、こう言うては失礼かもしれないが) 非常に感心した。

問 未知関数がベクトル値関数である場合も「割り算」は問題となる。恒等的に  $\mathbf{0}$  ではない関数  $\mathbf{u}(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$  が

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{L} \mathbf{u}$$

という微分方程式を満たしている場合はどうなるか調べよ ( $\mathcal{L}$  は  $x$  についての微分作用素,  $\zeta$  はベクトル値関数,  $\eta$  はスカラー値関数とする)。

## 2.6.2 第2ステップ: 変数分離解を重ね合わせても (HE), (DBC) の解

(HE), (DBC) は線形同次方程式であることに注意すると、任意の定数  $c_1, c_2, \dots, c_n$  に対して、

$$c_1 e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + c_2 e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x + c_3 e^{-9\pi^2 t} \sin 3\pi x + \dots + c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

は (HE), (DBC) の解である (重ね合せの原理)。さらには任意の数列  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  について、無限級数

$$(2.6.8) \quad u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

で定義される  $u$  が (HE), (DBC) の解であると期待される。あるいは、もう少し具体的に言うと、級数が必要なだけ項別微分可能であれば (HE), (DBC) の解である。

注意 2.6.5 (「期待される」と一歩後退してしまうわけ) ここはあくまでも「期待」に過ぎない。級数で定義される  $u$  が実際に解になるかどうかは、係数  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  による。そもそも級数が収束しないような  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  だってありうるし、たとえ収束しても項別微分<sup>30</sup>が成立するかどうかはまた別の問題で、(HE) を満たさなくなってしまうかもしれない。■

---

<sup>30</sup>関数項級数  $\sum_n f_n(x)$  に対して、 $\left(\sum_n f_n(x)\right)' = \sum_n f_n'(x)$  が成り立つことを「項別微分が成り立つ」という。

### 2.6.3 第3ステップ: (IC) が成り立つように係数 $\{c_n\}$ を選ぶ

式 (2.6.8) で  $t = 0$  とおくと

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x$$

となるが、もしもこれが  $f(x)$  に等しくなる、つまり

$$(2.6.9) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \quad (x \in [0, 1])$$

となるような  $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  を見い出すことが出来れば、 $u$  は (HE), (DBC), (IC) のすべてを満たす、すなわち (H-IBP) の解である (と期待される) ことになる。

Fourier 級数に慣れていれば、上の等式は  $f$  の Fourier 正弦級数展開の式であることが分かる。ゆえに  $f(0) = f(1) = 0$  で、 $f$  がある程度滑らかであれば (例えば  $C^1$  級)、 $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  を

$$c_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

で定めることが (2.6.9) が成り立つための必要十分条件であることが分かる (付録 B.2.7 参照)。

Fourier 級数に関する知識がない場合も、半分くらいは簡単な計算で理解できる。(2.6.9) の両辺に  $\sin m\pi x$  をかけて  $[0, 1]$  で積分して

$$\int_0^1 f(x) \sin m\pi x \, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \sin m\pi x \, dx \quad (x \in [0, 1]).$$

項別積分が可能であると仮定して、

$$\int_0^1 f(x) \sin m\pi x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 \sin n\pi x \sin m\pi x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\delta_{nm}}{2} = \frac{c_m}{2}.$$

ゆえに

$$c_m = 2 \int_0^1 f(x) \sin m\pi x \, dx$$

と  $c_m$  が定まる。逆に  $c_m$  をこの式で定めるときに (2.6.9) が成り立つのであるが、それは簡単には出来ない (そのために Fourier 級数に関する講義科目が用意されている)。

この節のまとめ

( $f$  について若干の仮定をおくとき)

$$(2.6.10) \quad c_n := 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

で定まる  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  を用いて

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

で定義される  $u$  は、初期値境界値問題 (H-IBP) の解である (と期待できる)。

例題 2.6.1 (簡単な初期値に対する解) (1)  $f(x) = \sin \pi x$  のとき  $u(x, t)$  を求めよ。 (2)  $f(x) = \sin^3 \pi x$  のとき  $u(x, t)$  を求めよ。

解答 (1)  $f(x) = \sin \pi x$  はそれ自身が  $f$  の Fourier 級数展開であるから、 $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ .  
 (2)  $f(x) = \sin^3 \pi x = (3 \sin \pi x - \sin 3\pi x)/4$  が  $f$  の Fourier 級数展開であるから<sup>31</sup>、 $u(x, t) = (3e^{-\pi^2 t} \sin \pi x - e^{-9\pi^2 t} \sin 3\pi x)/4$ . ■

## 2.7 Fourier の方法で解を求める (2) 解であることの確認

第 4 ステップとして、前節の議論で得られた「解の候補」が本当に解であることを証明しよう。

### 2.7.1 何を証明しなければいけないか

初期値を  $f$  とする、初期値境界値問題 (H-IBP) の解の候補として得られた級数を  $S_f(x, t)$  と書こう。すなわち

$$(2.7.1) \quad S_f(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x, \quad c_n := 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

この項の目標を手短に言うと、次の定理を証明することである。

定理 2.7.1 (初期値が  $C^1$  級の場合の (H-IBP) の解の存在)  $f$  が  $[0, 1]$  上の  $C^1$  級関数で  $f(0) = f(1) = 0$  を満たすならば、 $u := S_f$  は (H-IBP) の古典解である。

注意 2.7.2 (条件  $f(0) = f(1) = 0$  の必要性について)  $f(0) = f(1) = 0$  という条件が出て来たが、この条件の意味は、初期値が境界条件を満たす、ということである。つまり境界条件は、任意の  $t > 0$  に対して

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

が成り立つ、というものであったが、古典解の定義では、 $u$  は  $[0, 1] \times [0, \infty)$  で連続であるから、 $t \downarrow 0$  として

$$u(0, 0) = u(1, 0) = 0$$

が成り立たねばならない。ところが、初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

を課しているから、 $f$  は

$$f(0) = f(1) = 0$$

を満たさなければならない。つまり

<sup>31</sup>3 倍角の公式  $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$  を整理して得られる。昔は「サンシャイン引いて夜風が身に染みる」なんて覚えさせられましたが (Google で 183 件しかヒットしないぞ)、駄洒落はやめて、 $\sin 3\theta = \operatorname{Im}(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \operatorname{Im} e^{3i\theta} = \operatorname{Im}[(\cos \theta + i \sin \theta)^3] = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta$  とするのでしよう。

(H-IBP) の古典解が存在するためには、  
初期値  $f$  は  $f(0) = f(1) = 0$  を満たさなければならない

ということが分かる。境界条件と初期条件のつじつまが合っている、という意味で、これは整合条件 (compatibility condition) と呼ばれる。(細かい注: 古典解ではなく、弱解を考える場合には、この整合条件は不要になることもある。) ■

定理を証明するために、チェックすべきことは、

- (1) 任意の  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)$  に対して級数  $S_f$  は収束し、 $S_f$  は  $[0, 1] \times [0, \infty)$  上の連続関数であること。
- (2)  $S_f$  の偏導関数  $\frac{\partial}{\partial t} S_f, \frac{\partial}{\partial x} S_f, \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_f$  が  $(0, 1) \times (0, \infty)$  で存在し、連続であること。
- (3) (a)  $S_f$  が熱方程式 (HE) を満たすこと  
(b)  $S_f$  が Dirichlet 境界条件 (DBC) を満たすこと  
(c)  $S_f$  が初期条件 (IC) を満たすこと

である。

元々、熱方程式 (HE), Dirichlet 境界条件 (DBC) を満たす変数分離解を求めて、その和で  $S_f$  を作ったことから、 $S_f$  が (HE), (DBC) を満たすのは一見して明らかに思えるかも知れない。ところが、(3b)  $S_f$  が (DBC) を満たすことは確かに明らかであるが、(3a)  $S_f$  が (HE) を満たすことは明らかではない。それは無限級数については無条件で項別微分が成り立たないからである。こうしてみると、(1) & (2)  $S_f$  の滑らかさも、きちんとチェックすべきことであることが分かる。

#### 確認事項

級数の各項がたとえ解析関数であっても、級数は収束しないかもしれないし、収束しても級数の和は不連続かもしれないし、連続であっても微分出来ないかもしれない。滑らかさは無条件では級数の和に遺伝しない。

一方、(3c)  $S_f$  が (IC) を満たすことを示すのも、それほど簡単ではない。初期値  $f$  に連続というだけでなく、 $C^1$  級という条件を課したのは、無用の煩雑さを避けるためである ( $f$  が連続というだけでは、 $S_f(x, 0)$  は普通の意味では収束すると限らないことに注意)。  $f$  に連続性だけを仮定した場合の古典解の存在証明については、最後に証明のあらすじを簡単に説明するにとどめる。

そこで、今後の話の筋は大きく二つに分けられる。

第1段 (2) 偏微分可能性と (3a) (HE) を満たすことを示す

第2段  $f$  が  $C^1$  級と仮定して、(1) 連続性と (3c) (IC) を満たすことを示す

### 2.7.2 第1段: Fourier 級数解 $S_f$ が熱方程式を満たすこと

級数  $S_f$  が収束し、その和  $S_f$  が  $x$  について2回、 $t$  について1回、項別微分出来れば、 $u = S_f$  が熱方程式を満たすことはすぐ導かれる。まず、このことから示そう。



**補題 2.7.3**  $f$  を  $C[0, 1]$  の任意の要素とすると、級数  $S_f(x, t)$  を何回項別微分して出来る級数も、 $[0, 1] \times (0, \infty)$  で広義一様収束する。ゆえに和  $S_f$  は  $[0, 1] \times (0, \infty)$  で何回でも項別微分でき、特に

$$\frac{\partial}{\partial t} S_f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_f.$$

**注意 2.7.4** ( $t = 0$  は別扱い) 上の補題では、範囲が  $[0, 1] \times [0, \infty)$  でなく、 $t = 0$  を除いた  $[0, 1] \times (0, \infty)$  になっている。 $t = 0$  を含めた  $[0, 1] \times [0, \infty)$  での一様収束性を示すには、 $f$  についてより強い滑らかさを仮定するなどの必要が出て来る。■

**補題の証明** 級数  $S_f$  を  $x$  につき  $\ell$  回、 $t$  につき  $m$  回、項別微分して出来る級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-n^2 \pi^2)^m e^{-n^2 \pi^2 t} (n\pi)^\ell \sin \left( n\pi x + \frac{\ell\pi}{2} \right)$$

につき<sup>32</sup>、

$$|\text{第 } n \text{ 項}| \leq |c_n| (n\pi)^{\ell+2m} e^{-n^2 \pi^2 t}$$

と評価される。

$$|c_n| = \left| 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \right| \leq 2 \int_0^1 |f(x) \sin n\pi x| \, dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)| \, dx \equiv M.$$

今  $\delta > 0$  を任意に固定して、 $(x, t) \in [0, 1] \times [\delta, \infty)$  で考えると、 $e^{-n^2 \pi^2 t} \leq e^{-n^2 \pi^2 \delta}$  であるから、

$$|\text{第 } n \text{ 項}| \leq M \pi^{\ell+2m} e^{-n^2 \pi^2 \delta} n^{\ell+2m}.$$

この右辺は  $x, t$  に依らず、また

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \pi^{\ell+2m} e^{-n^2 \pi^2 \delta} n^{\ell+2m} < \infty$$

であるから<sup>33</sup>、Weierstrass の M 判定法<sup>34</sup>から、級数は  $[0, 1] \times [\delta, \infty)$  で一様収束することが分かる。ゆえに  $S_f$  はその範囲で何回でも項別微分可能であり、 $C^\infty$  級である。 $\delta > 0$  は任意であるから、結局  $S_f$  は  $[0, 1] \times (0, \infty)$  で何回でも項別微分可能であり、 $C^\infty$  級である。項別微分可能であることから、 $S_f$  が熱方程式を満たすことは明らかである。■

<sup>32</sup> $\sin x$  の  $k$  階導関数は  $\sin(x + k\pi/2)$  である。

<sup>33</sup> $r = e^{-\pi^2 \delta}$ ,  $\alpha = 2m + \ell$  とおくと、 $r \in (0, 1)$ ,  $\alpha > 0$ .  $n^\alpha r^{n^2} \leq n^\alpha r^n$  であるが、 $a_n := n^\alpha r^n$  については、例えば  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| = r < 1$  であるから、 $\sum_n a_n < \infty$  が分かる (d'Alembert の判定法)。ゆえに

$\sum_n n^\alpha r^{n^2} \leq \sum_n n^\alpha r^n < \infty$ . すなわち  $\sum_n n^{\ell+2m} e^{-n^2 \pi^2 \delta} < \infty$ .

<sup>34</sup>付録 B.2.5 を見よ。



### 2.7.3 第2段: Fourier 級数解の $t = 0$ での連続性と初期条件

$S_f$  が初期条件

$$S_f(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

を満たすかどうか、つまり

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x, \quad c_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \quad (n \in \mathbf{N})$$

が成り立つかどうか? これは  $f$  の Fourier 級数が  $f$  に等しいかどうか、と言い換えても良い。

Fourier 級数論を学んでいれば、実は  $f$  が単に連続というだけでは成り立たないことが分かる。既に説明したように、 $f$  が  $C^1$  級で、 $f(0) = f(1) = 0$  であると仮定すれば大丈夫である。実際、

**命題 2.7.5**  $f$  が  $[0, 1]$  で  $C^1$  級で、 $f(0) = f(1) = 0$  を満たすならば、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \quad (\text{一様収束}), \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

という命題が成り立つ (付録 B.2.7 参照)。

ところで、これで安心してはいけない。古典解の定義を思い出すと、 $S_f$  が  $[0, 1] \times [0, \infty)$  で連続なことも示す必要がある。以下、それを実行しよう。

まず (これは上の命題の証明に含まれることであるが)、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$$

が成り立つ。実際、 $c_n$  の定義式を部分積分することによって、

$$\begin{aligned} c_n &= 2 \left( \left[ -\frac{f(x) \cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 f'(x) \cos n\pi x \, dx \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^1 f'(x) \cos n\pi x \, dx = \frac{1}{n\pi} A_n, \\ A_n &:= 2 \int_0^1 f'(x) \cos n\pi x \, dx \end{aligned}$$

であるが、 $A_n$  は  $f'$  の Fourier 係数であるので、Fourier 級数論で有名な Bessel の不等式 (これも付録 B.2.7 参照) から

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \leq 2 \int_0^1 |f'(x)|^2 \, dx$$

が導かれる<sup>35</sup>。これから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot n|c_n| \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c_n|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{|A_n|}{\pi} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

一方  $S_f(x, t)$  について、

$$|\text{第 } n \text{ 項}| \leq |c_n| \quad ((x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty))$$

であるから、Weierstrass の M 判定法により、 $S_f(x, t)$  は  $[0, 1] \times [0, \infty)$  で一様収束することが分かる。従って  $S_f(x, t)$  は  $[0, 1] \times [0, \infty)$  で連続な関数を表す。■

#### 2.7.4 おまけ: $f$ が $C^1$ 級でなく単に連続な場合, Green 関数

(この項の議論は細かいので、初めて読む時は飛ばすことを勧める。授業でも 95% 以上の確率で省略する。)

上では、 $f$  が  $C^1$  級であると仮定した。そもそもこの仮定をおかず、 $f$  に連続性だけしか仮定しないと、 $f$  は Fourier 級数展開可能かどうかとも保証されないのである。では、単に連続な場合に、古典解の存在は証明できるだろうか？ 結論を先に言えば、Yes である。実際次の定理が成り立つ。

**定理 2.7.6** (連続な初期値に対する (H-IBP) の古典解)  $f$  が  $[0, 1]$  上の連続関数で、 $f(0) = f(1) = 0$  を満たすならば、

$$u(x, t) := \begin{cases} S_f(x, t) & ((x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty)) \\ f(x) & (x \in [0, 1], t = 0) \end{cases}$$

で定義される  $u$  は (H-IBP) の古典解である。

この定理の証明のあら筋は、級数  $S_f(x, t)$  で定義される関数について

$$(2.7.2) \quad S_f(x, t) \rightarrow f(x) \quad (t \downarrow 0 \text{ のとき}, x \in [0, 1] \text{ について一様})$$

が成り立つので、 $u$  は  $[0, 1] \times [0, \infty)$  で連続になる、というものである。

(2.7.2) の証明はさほど難しくはないが、手間がかかる。回り道のようにはあるが、足場固めをしてからとりかかった方が、結局は簡単である。そのため、それ自身が重要な意味を持つ、熱方程式の初期値境界値問題 (H-IBP) の **Green 関数** と呼ばれる  $G(x, y, t)$  を導入する。

<sup>35</sup>  $\sqrt{2} \cos n\pi x$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) が  $L^2(0, 1)$  の正規直交系であることに注意する。

それは (天下りであるが、この場合は)

$$G(x, y, t) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \varphi_n(x) \varphi_n(y) \quad (x, y \in [0, 1], t > 0),$$

$$\lambda_n := -n^2 \pi^2, \quad \varphi_n(x) := \sqrt{2} \sin n\pi x \quad (n \in \mathbf{N})$$

で定義される。

この  $G$  を用いると、 $S_f$  は次のように表される:

$$S_f(x, t) = \int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy \quad (x \in [0, 1], t > 0).$$

実際 (項別積分は容易に正当化できるので)

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \varphi_n(x) \varphi_n(y) f(y) dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\lambda_n t} \varphi_n(x) \int_0^1 f(y) \varphi_n(y) dy \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\lambda_n t} \sin n\pi x \cdot 2 \int_0^1 f(y) \sin n\pi y dy \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n t} \sin n\pi x \\ &= S_f(x, t). \end{aligned}$$

また、 $G = G(x, y, t)$  は  $[0, 1] \times [0, 1] \times (0, \infty)$  で  $C^\infty$  級で、任意の  $y \in [0, 1]$  を固定したとき、 $x, t$  の関数として、熱方程式 (HE) と境界条件 (DBC) を満たす。つまり

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(x, y, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y, t) \quad ((x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty)), \\ G(0, y, t) &= G(1, y, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)). \end{aligned}$$

初期条件について考えてみよう。既に

$$(2.7.3) \quad f \in C^1([0, 1]), \quad f(0) = f(1) = 0$$

が成り立つならば、(H-IBP) は古典解を持つ、特に Fourier 級数による解は  $C([0, 1] \times [0, \infty))$  に属し、 $u(x, 0) = f(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ) が成り立つ、ということが分っていた。ところが  $G(x, y, t)$  は  $t = 0$  に対して意味を持たない (定義式の級数が収束しない) ので、 $\int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy$  が  $t = 0$  のとき  $f(x)$  に等しいとか、 $[0, 1] \times [0, \infty)$  で連続と言うことは出来ない。次のように表すことが考えられる。

(a) (定理 2.7.6 の真似) 関数  $u$  を

$$u(x, t) := \begin{cases} \int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy & ((x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty)) \\ f(x) & (x \in [0, 1], t = 0) \end{cases}$$

で定めるとき、 $u \in C([0, 1] \times [0, \infty))$ 。

(b)  $\int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy$  は  $t \rightarrow 0$  のとき、 $f(x)$  に  $[0, 1]$  上で一様収束する。すなわち

$$(2.7.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in [0, 1]} \left| \int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy - f(x) \right| = 0.$$

少し考えると、(a) と (b) は同値であることが分かる。

以上は、本質的には前項までに分かっていることであるが、さらに次の補題が成り立つ。このうち (4) (要するに (2.7.2)) が我々に直接必要なものである —  $f$  が  $C^1$  級でなく、単に連続で良いことがポイントである。

**補題 2.7.7 (Green 関数の性質)**  $G$  は次の条件を満足する。

(1)  $G(x, y, t) = G(y, x, t).$

(2)  $G(x, y, t) \geq 0.$

(3)  $\int_0^1 G(x, y, t) dy \leq 1.$

(4)  $f \in C([0, 1]), f(0) = f(1) = 0$  ならば

$$\int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy \rightarrow f(x) \quad (t \downarrow 0 \text{ のとき、} x \in [0, 1] \text{ につき一様に収束}).$$

言い換えると (2.7.4) が成り立つ。

**証明**

(1)  $G(x, y, t)$  の定義式が  $x$  と  $y$  について対称であるから明らかである。

(2)  $\forall y_0 \in [0, 1]$  に対して、

$$G(x, y_0, t) \geq 0 \quad (x \in [0, 1], t > 0)$$

を示す。 $y_0 = 0, 1$  のときは  $G(x, y_0, t) = 0$  で明らかなので、 $y_0 \in (0, 1)$  とする。

(以下の証明は、実は  $G(x, y_0, t)$  は、 $\delta(\cdot - y_0)$  を初期値とする初期値境界値問題の解に相当する、という事実を念頭におくと理解しやすい。)

解析で定番のテクニックである軟化作用素 (molifier) を用いる。まず

$$\rho \in C^\infty(\mathbf{R}), \quad \rho \geq 0, \quad \rho(x) = 0 \quad (|x| \geq 1), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$$

を満たす  $\rho$  を任意に一つ取り、

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (x \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0)$$

とおく。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(y) dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(y - y_0) dy = \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \rho_\varepsilon(y - y_0) dy = 1$$

が成り立つ。また、 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が  $y_0$  の近傍で連続ならば、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\varepsilon}(y - y_0) f(y) dy = f(y_0)$$

が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\varepsilon}(y - y_0) f(y) dy - f(y_0) &= \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \rho_{\varepsilon}(y - y_0) f(y) dy - f(y_0) \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \rho_{\varepsilon}(y - y_0) dy \\ &= \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0 + \varepsilon} \rho_{\varepsilon}(y - y_0) (f(y) - f(y_0)) dy \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\varepsilon}(y - y_0) f(y) dy - f(y_0) \right| &\leq \sup_{|y - y_0| \leq \varepsilon} |f(y) - f(y_0)| \int_{|y - y_0| \leq \varepsilon} \rho_{\varepsilon}(y - y_0) dy \\ &\leq \sup_{|y - y_0| \leq \varepsilon} |f(y) - f(y_0)| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

$0 < \varepsilon < |y_0|$  なる  $\varepsilon$  に対して、 $f_{\varepsilon}(y) := \rho_{\varepsilon}(y - y_0)$  とおくと、 $f_{\varepsilon}$  は  $[0, 1]$  で  $C^1$  級で  $f_{\varepsilon}(0) = f_{\varepsilon}(1) = 0$  であるから

$$u_{\varepsilon}(x, t) := \begin{cases} \int_0^1 G(x, y, t) f_{\varepsilon}(y) dy = \int_0^1 G(x, y, t) \rho_{\varepsilon}(y - y_0) dy & (x \in [0, 1], t > 0) \\ f_{\varepsilon}(x) & (x \in [0, 1], t = 0) \end{cases}$$

とおくと、 $u_{\varepsilon}$  は  $f_{\varepsilon}$  を初期値とする (H-IBP) の古典解である。

$f_{\varepsilon} \geq 0$  であるから、正值性の保存 (系 2.4.3) によって

$$\forall x \in [0, 1], \forall t > 0 \quad u_{\varepsilon}(x, t) \geq 0.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$  とすると  $u_{\varepsilon}(x, t) \rightarrow G(x, y_0, t)$  であるから

$$G(x, y_0, t) \geq 0.$$

(つぶやき: 以上は初めて見る人には、かなり分かりにくい証明かもしれない。 $f_{\varepsilon}$  は  $\delta(\cdot - y_0)$  を軟化したものになっているわけである。デルタ関数は非負関数のようなもので、それを初期値とする熱方程式の初期値境界値問題の解である Green 関数は非負である、ということを経由して証明している。

$$\begin{array}{ccc} \delta(\cdot - y_0) & & G(\cdot, y_0, \cdot) \\ \downarrow (\text{軟化}) & & \uparrow (\text{極限}) \\ f_{\varepsilon} = \rho_{\varepsilon}(\cdot - y_0) & \longrightarrow & u_{\varepsilon} \\ & (\text{解く}) & \end{array}$$

という表を眺めて話の筋道をつかもう。)

(3) (これは最後まで読めば分かるであろう。)

$$f_n \in C^1([0, 1]), \quad f_n(0) = f_n(1) = 0, \quad 0 \leq f_n \leq 1, \quad \forall x \in (0, 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$$

となる  $\{f_n\}$  を取って、

$$u_n(x, t) := \begin{cases} \int_0^1 G(x, y, t) f_n(y) dy & (t > 0) \\ f_n(x) & (t = 0) \end{cases}$$

とおくと、 $u_n$  は  $f_n$  を初期値とする (H-IBP) の古典解である (特に  $[0, 1] \times [0, \infty)$  における熱方程式の古典解である)。一方

$$\tilde{u}(x, t) := 1 \quad ((x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty))$$

は  $[0, 1] \times [0, \infty)$  における熱方程式の古典解である。 $t = 0$  のとき、あるいは  $x = 0, 1$  のとき  $u_n \leq \tilde{u}$  であるから、正值性の保存 (むしろ比較定理? 系 2.4.2) によって

$$\forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty) \quad u_n(x, t) \leq \tilde{u}(x, t) = 1.$$

一方  $n \rightarrow \infty$  のとき

$$u_n(x, t) = \int_0^1 G(x, y, t) f_n(y) dy \rightarrow \int_0^1 G(x, y, t) dy$$

が成り立つ<sup>36</sup>。ゆえに  $\int_0^1 G(x, y, t) dy \leq 1$ 。

(4)

$$f_n \in C^1([0, 1]), \quad f_n(0) = f_n(1) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| = 0$$

を満たす  $\{f_n\}$  を取る<sup>37</sup>。

$$u(x, t) := \int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy,$$

$$u_n(x, t) := \int_0^1 G(x, y, t) f_n(y) dy$$

<sup>36</sup>Lebesgue 積分を使って良ければ、有界収束定理を使って簡単に証明できる。それを使わずに証明してみよう。 $f_n$  の取り方を具体的に工夫して、例えば  $[1/n, 1-1/n]$  では  $f_n = 1$  となるようにすれば、 $\int_0^1 G(x, y, t) dy - \int_0^1 G(x, y, t) f_n(y) dy \leq \int_0^{1/n} G(x, y, t) dy + \int_{1-1/n}^1 G(x, y, t) dy$ 。  $y \mapsto G(x, y, t)$  は積分可能なのだから、 $n \rightarrow \infty$  のとき右辺が 0 に収束することは明らかである。

<sup>37</sup>この条件を満たす  $\{f_n\}$  が取れることは、例えば軟化作用素に慣れていればほとんど明らかである (端を切り落としてから軟化すれば良い) が、それを用いずに初等的に証明するのはやや面倒であるから、ここでは省略する。

とおくと、

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u_n(x, t)| &= \left| \int_0^1 G(x, y, t) (f(y) - f_n(y)) dy \right| \\ &\leq \max_{y \in [0, 1]} |f(y) - f_n(y)| \int_0^1 G(x, y, t) dy \\ &= \max_{y \in [0, 1]} |f(y) - f_n(y)|. \end{aligned}$$

さて、 $\forall n \in \mathbb{N}$  に対して  $f_n \in C^1([0, 1])$ ,  $f_n(0) = f_n(1) = 0$  であるから、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in [0, 1]} |u_n(x, t) - f_n(x, t)| = 0.$$

$\forall x, \forall t, \forall n$  に対して

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &= |u(x, t) - u_n(x, t) + u_n(x, t) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\leq |u(x, t) - u_n(x, t)| + |u_n(x, t) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq 2 \max_{y \in [0, 1]} |f(y) - f_n(y)| + \max_{y \in [0, 1]} |u_n(y, t) - f_n(y)|. \end{aligned}$$

$\forall t, \forall n$  に対して、

$$\max_{x \in [0, 1]} |u(x, t) - f(x)| \leq 2 \max_{y \in [0, 1]} |f(y) - f_n(y)| + \max_{y \in [0, 1]} |u_n(y, t) - f_n(y)|.$$

まず右辺第1項を小さくするように  $n$  を選んで固定し、それから右辺第2項を小さくするように  $t$  を 0 に近づけることにより、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \max_{x \in [0, 1]} |u(x, t) - f(x)| = 0. \blacksquare$$

この補題と証明は藤田 [59] の §1.6 による。また、熱方程式の Green 関数の基本的な性質をていねいに説明した本として、伊藤 [6] がある<sup>38</sup>。

**余談 2.7.1 (なぜ Green 関数?)** Fourier 級数で一応は解が表現できるのに、なぜ Green 関数のようなものを持ち出すのか？ 一つの回答は「無限級数よりは単一の関数をかけて積分する(こういう関数のことを積分核という)という形の方が扱いやすいから」である。実はこの種のやり方 — 積分作用素の利用 — は、現代の解析学のあちこちに登場する。 ■

**余談 2.7.2 (物理的な解釈)** 以下のほとんどは、上の証明中に書いてあることだが、抜き出してまとめておく。

$G(x, y, t)$  は  $t = 0$  で点  $y$  に単位熱量を置いた場合の、時刻  $t$  での温度分布を表す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(x, y, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y, t) \quad ((x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), y \in [0, 1]), \\ G(0, y, t) &= G(1, y, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty), y \in [0, 1]), \\ G(x, y, 0) &= \delta(x - y) \quad (x \in [0, 1], y \in [0, 1]). \end{aligned}$$

---

<sup>38</sup>ていねいではあるが、この種の議論を初めて読む人は骨が折れるかもしれない。

重ね合わせの原理により、初期温度分布が  $f$  であるとき、時刻  $t$  での温度分布が

$$(\heartsuit) \quad u(x, t) = \int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy \quad ((x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty))$$

となるのは明解だ。Green 関数の正値性

$$G(x, y, t) \geq 0 \quad ((x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty), y \in [0, 1])$$

は、熱方程式の解の正値性の保存の顕れということになる。実際、少し考えると

$$G \geq 0 \Leftrightarrow \text{正値性の保存成立}$$

が分かる (正値性の保存が成立することを認めると、初期値  $\delta(\cdot - y) \geq 0$  だから  $G(\cdot, y, t) \geq 0$ . 一方  $G \geq 0$  とすると、 $(\heartsuit)$  を見れば  $f \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$  は明らかである)。

$$\int_0^1 G(x, y, t) dy \leq 1 \quad ((x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty))$$

は、初期時刻で温度  $\equiv 1$  である場合の、時刻  $t$  の温度はどこでも 1 以下という話で、これも比較定理で明らかである。■

余談 2.7.3 ( $G(x, y, t)$  を図示する)  $G(x, y, t)$  は無限級数で定義してあるが、十分多くの項数で打ち切った近似で我慢すれば、コンピューターで計算するのは難しくない。それをどうやって可視化したら良いか? 3変数関数なのでどう描くか考えどころ。 $y$  を固定して、 $t$  を動かしながら  $x \mapsto G(x, y, t)$  のグラフを描いて眺める、ということがコンピューターを使うと実行できる。

Mathematica で

```
G[x_,y_,t_] := Sum[Exp[-n^2 Pi^2 t] Sin[n Pi x] Sin[n Pi y], {n, 1, 50}]

Manipulate[Plot[G[x,0.5,t],{x,0,1}, PlotRange -> {-0.1,5}], {t,0,5,0.001}]
```

図を見て確認できること。

- Dirichlet 境界条件  $G(0, y, t) = G(1, y, t) = 0$  を満たしているので、両端  $x = 0, 1$  で 0 である。
- 区間の内部  $(0, 1)$  では正の値を取る。
- $t \rightarrow 0$  のとき  $\delta(\cdot - y)$  に収束することから想像されるように、 $t$  が小さいとき、 $y$  の近くで 1 つの山を持っている。その山は  $t \rightarrow 0$  とするとどんどん高くなり、 $t = 0$  を含めた範囲では連続ではなくなる。
- 時間の経過と共に山は低くなり、また最も高い場所が区間の中央  $x = \frac{1}{2}$  に近づくようになる。

以上見なくても分かることだが、実際に見ることを勧める。■



余談 2.7.4 (非同次問題)  $F: [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が “良い” 関数ならば、

$$u(x, t) := \int_0^t \int_0^1 G(x, y, t-s) F(y, s) dy ds$$

で定めた  $u$  は、

$$(\diamond) \quad \begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + F(x, t) & ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & (t \in (0, \infty)) \\ u(x, 0) = 0 & (x \in [0, 1]) \end{cases}$$

を満たす。このこと ( $u$  は  $u_t = u_{xx} + F(x, t)$  の特解である) を利用すると、非同次項付きの熱方程式の初期値境界値問題が一般に解けることになる。(◇) の証明は、形式的には (波動方程式に対する Duhamel 原理の証明と同様<sup>39</sup>) で簡単である。しかし、 $G(x, y, t)$  は  $t=0$  で定義されていないので、実際に証明するのは簡単ではない。興味があれば伊藤 [6] を見よ。■

余談 2.7.5 (周期境界条件の場合の Green 関数) 長さ  $2\pi$  の区間で、周期境界条件を課した熱方程式の初期値境界値問題の解  $u$  は

$$(2.7.5) \quad G(x, t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t + inx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(x-2n\pi)^2 / 4t}$$

とおくと、初期条件  $f$  と  $G$  との畳み込みで表せる:

$$u(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y, t) f(y) dy.$$

(証明は付録 G.3 を見よ。)  $G$  はテータ関数  $\vartheta$  の一例になっている。■

## 2.8 Fourier の方法とスペクトル分解

— なぜ Fourier の方法で問題が解けるのだろうか? —

熱伝導方程式の初期値境界値問題は、Fourier の方法で解を構成することができたが、それは線形代数でおなじみの「実対称行列は実直交行列で対角化できる<sup>40</sup>」という定理や、定数係数線形常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

の解法と深い関係にある。これらのことを説明しよう。

授業をするときのためのメモ 演習で様々な固有値問題を解かせておくと良いかもしれない。固有値が実数 (さらには非負) で、異なる固有値に属する固有関数同士が直交することは確認可能であろう。

---

<sup>39</sup>  $\frac{d}{dt} \int_0^t g(t, s) ds = g(t, t) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(t, s) ds$  という式変形をする。しかし今の場合にこれを正当化するのは容易ではない。

<sup>40</sup>  $A$  を任意の実対称行列とすると、適当な実直交行列  $U$  を選べば、 ${}^t U A U$  は対角行列になる、ということ。

### 2.8.1 Fourier の方法に現れる固有値問題

Fourier の方法を実行する過程で

次式を満たす  $\zeta = \zeta(x)$ ,  $\lambda$  を見い出せ:

$$\frac{d^2}{dx^2}\zeta(x) = \lambda\zeta(x), \quad \zeta(0) = \zeta(1) = 0, \quad \zeta(x) \not\equiv 0.$$

という問題を解いた。この問題と線形代数で学んだ固有値問題

行列の固有値問題

$A \in M(N, \mathbf{R})$  が与えられたとき、

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$$

を満たす  $x$ ,  $\lambda$  を見い出せ。

の類似に気がついたであろうか？ 実は、上の問題も、ある種の固有値問題と考えられる。

おおざっぱに言えば、 $\zeta(0) = \zeta(1) = 0$  を満たす任意の  $\zeta$  に対して

$$A\zeta := \frac{d^2}{dx^2}\zeta$$

によって、作用素  $A$  を定めると、これは線形作用素となるが、上の問題は、 $A$  の固有値  $\lambda$  と固有ベクトル (ふつうは固有関数と呼ぶ)  $\zeta$  を求めよ、ということになる。この問題の答は、既に見たように、

- 固有値は  $\lambda_n = -n^2\pi^2$  ( $n \in \mathbf{N}$ )
- $\lambda_n$  に対応する固有ベクトルは  $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$

だったが、固有値がすべて実数で、固有ベクトルについて直交関係

$$n \neq m \implies \int_0^1 \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0$$

ば成り立つのは、偶然ではなく、

実対称行列の固有ベクトルの直交性

$A$  を実対称行列とすると、固有値はすべて実数で、相異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交する。

という線形代数の定理と同じ原理に基づく。実際、関数  $f, g$  の内積  $(f, g)$  を

$$(f, g) := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定義すると、 $f(0) = f(1) = 0, g(0) = g(1) = 0$  を満たす関数  $f, g$  に対して、

$$\begin{aligned}
(Af, g) &= \int_0^1 f''(x) \overline{g(x)} dx \\
&= \left[ f'(x) \overline{g(x)} \right]_0^1 - \int_0^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx \\
&= - \int_0^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx \\
&= - \left[ f(x) \overline{g'(x)} \right]_0^1 + \int_0^1 f(x) \overline{g''(x)} dx \\
&= \int_0^1 f(x) \overline{g''(x)} dx = (f, Ag)
\end{aligned}$$

が成り立つこと ( $A$  の対称性! <sup>41</sup>) に注意しておけば、形式的には、まったく同じ証明が使える。まず、

$$\lambda_n(\varphi_n, \varphi_n) = (\lambda_n \varphi_n, \varphi_n) = (A\varphi_n, \varphi_n) = (\varphi_n, A\varphi_n) = (\varphi_n, \lambda_n \varphi_n) = \overline{\lambda_n}(\varphi_n, \varphi_n)$$

より、

$$\lambda_n = \overline{\lambda_n} \quad \text{i.e.} \quad \lambda_n \in \mathbf{R}.$$

次に

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\varphi_n, \varphi_m) &= (\lambda_n \varphi_n, \varphi_m) \\
&= (A\varphi_n, \varphi_m) = (\varphi_n, A\varphi_m) \\
&= (\varphi_n, \lambda_m \varphi_m) = \overline{\lambda_m}(\varphi_n, \varphi_m) = \lambda_m(\varphi_n, \varphi_m)
\end{aligned}$$

より

$$(\lambda_n - \lambda_m)(\varphi_n, \varphi_m) = 0$$

であるから、 $\lambda_n \neq \lambda_m$  であれば

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0$$

が導かれる。■

**注意 2.8.1** (固有値が負であること) 実は  $\lambda_n \leq 0$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) であることも同様の議論で証明できる:

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\varphi_n, \varphi_n) &= (\lambda_n \varphi_n, \varphi_n) = (A\varphi_n, \varphi_n) \\
&= \int_0^1 \varphi_n''(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = \left[ \varphi_n'(x) \overline{\varphi_n(x)} \right]_0^1 - \int_0^1 \varphi_n'(x) \overline{\varphi_n'(x)} dx \\
&= - \int_0^1 |\varphi_n'(x)|^2 dx \leq 0
\end{aligned}$$

の両辺を  $(\varphi_n, \varphi_n) > 0$  で割って、 $\lambda_n \leq 0$ . ■

---

<sup>41</sup>行列  $A$  が対称であるための必要十分条件は、任意のベクトル  $x, y$  に対して  $(Ax, y) = (x, Ay)$  が成り立つことである。

注意 2.8.2 (固有値についての情報の計算への利用) 前節で固有値問題

$$\zeta''(x) = \lambda \zeta(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad \zeta(0) = \zeta(1) = 0, \quad \zeta \neq 0$$

を解いたわけだが、事前に固有値  $\lambda$  が実数で、正にはならないことを知っていれば、

$$\lambda = -\mu^2 \quad (\mu \geq 0)$$

とおくことができ、計算が少し簡単になる (複素数の計算は使わずに済む)。例えば  $\mu \neq 0$  の場合はすぐに

$$\zeta(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

とおける。(細かい説明抜きに) そのようにして計算してある本も多い<sup>42</sup>。■

注意 2.8.3 (実数値の固有関数が存在すること) 任意の固有値  $\lambda$  が実数であることが分かったわけであるが、それに属する固有関数として、実数値のものが取れる。これについては、

$$A\varphi = \lambda\varphi$$

より

$$A\bar{\varphi} = \overline{A\varphi} = \overline{\lambda\varphi} = \bar{\lambda}\bar{\varphi} = \lambda\bar{\varphi}$$

より

$$A(\operatorname{Re} \varphi) = A\left(\frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})\right) = \lambda\left(\frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})\right) = \lambda \operatorname{Re} \varphi.$$

まったく同様に

$$A(\operatorname{Im} \varphi) = \lambda \operatorname{Im} \varphi.$$

ゆえに  $\operatorname{Re} \varphi, \operatorname{Im} \varphi$  の少なくとも一方は (恒等的に 0 でなくて)  $\lambda$  に属する固有関数である。■

## 2.8.2 固有関数の完全性

「実対称行列は、実直交行列を用いて対角化される」という定理は線形代数でおなじみであるが、これを固有値、固有ベクトルの言葉で表すと、次のようになる:

定理 2.8.4 (実対称行列のスペクトル分解)  $A$  を  $N$  次実対称行列とすると、 $A$  の固有ベクトルからなる  $\mathbf{R}^N$  の基底が取れる。より詳しく言うと、 $A$  の固有値を (必要ならば重複度の分だけ並べて)  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  とすると、対応する固有ベクトル  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  を 正規直交系であるように取ることが出来る:

$$A\varphi_j = \lambda_j\varphi_j \quad (j = 1, 2, \dots, N),$$

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}). \end{cases}$$

すると  $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\dots,N}$  は線形独立であるから、 $\mathbf{R}^N$  の基底になる。

<sup>42</sup>余談になるが、期末試験の際にその手の説明をさぼった計算の「写し」をする学生がいて、採点者を少なからず悩ませることになる。

Fourier の方法で現れた固有値問題でも、この定理の一般化に相当する状況が成立したことを注意しよう。すなわち、

$\{\sin n\pi x; n \in \mathbf{N}\}$  の完全性

固有関数  $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$  によって、 $[0, 1]$  上の「任意の」関数  $f$  は、適当な数列  $\{c_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  を用いて

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x$$

と「表現」できる。

(脱線になるが: 初めて Fourier の方法を学んだときは、新しい事実・考え方が次から次へと出て来て、気が付きにくいところではあるが、上の事実については、大いに不思議がってもらいたい。一体なんて都合の良いことが成り立っているのだろう! 実際、Fourier が最初にこう主張したとき、それを素直に受け入れた人はほとんどいなかった。sin, cos の級数については、Fourier 解析で (現在のカリキュラムでは「実解析 1」で) それが成立することを学んだと思うが、実は話はもっと大きいのである。なぜそんなにうまく行くのか、不思議に感じる感性は持ち続けてほしい。)

前節では、このことを Fourier 級数の性質 (奇関数は Fourier 正弦級数で表現できる) で証明したが、実は一般的に成り立つ定理 (ここではそれがどういうものか書かないが、「固有関数系の完全性」と呼ばれる) の特別な場合に相当するのである。

### 2.8.3 固有関数と発展問題

前小節までは、Fourier の方法と、対称行列の固有値問題との関係を述べたが、ここでは、1 階定数係数線形常微分方程式の解法との類似点について述べよう。

まず、

1 階定数係数線形常微分方程式の解の公式

$A \in M(N; \mathbf{R}), x_0 \in \mathbf{R}^N$  とするとき、

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

の解は

$$x(t) = e^{tA} x_0.$$

は基本的である。

ここに現れる行列の指数関数  $e^{tA}$  は

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

で定義される。 $e^{tA}$  は、一般には例えば  $A$  の Jordan 標準形を用いて計算できるが<sup>43</sup>、係数行列  $A$  が実対称行列である場合には、以下示すようになりに見通し良い形に表現できる。

<sup>43</sup>これはあくまでも、原理的にはできるという話で、対称でない行列の Jordan 標準形を正しく (例えばコンピュターを使って) 計算するのは、実際にはかなり難しい。

繰り返しになるが、「実対称行列は実直交行列を用いて対角化できる」という定理を、固有値、固有ベクトルという言葉を用いて表現した定理 2.8.4 から  $x_0 \in \mathbf{R}^N$  は  $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,N}$  の線形結合として表される:

$$\exists(c_1, \dots, c_N) \in \mathbf{R}^N \text{ s.t. } x_0 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_N\varphi_N.$$

ちなみに、大変都合の良いことに、 $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,N}$  が正規直交系であることから、係数  $c_i$  は

$$c_i = (x_0, \varphi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

という簡単な式で求められる。

さて、 $\varphi_j$  は  $A$  の固有値  $\lambda_j$  に属する固有ベクトルであることから、

$$\begin{aligned} Ax_0 &= A(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_N\varphi_N) \\ &= c_1A\varphi_1 + c_2A\varphi_2 + \dots + c_NA\varphi_N \\ &= c_1\lambda_1\varphi_1 + c_2\lambda_2\varphi_2 + \dots + c_N\lambda_N\varphi_N \end{aligned}$$

である。以下帰納的に任意の  $n \in \mathbf{N}$  に対して

$$A^n x_0 = c_1\lambda_1^n\varphi_1 + c_2\lambda_2^n\varphi_2 + \dots + c_N\lambda_N^n\varphi_N.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} e^{tA}x_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=1}^N c_j \lambda_j^n \varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^N c_j \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j t)^n}{n!} \right) \varphi_j \\ &= \sum_{j=1}^N c_j e^{\lambda_j t} \varphi_j = c_1 e^{\lambda_1 t} \varphi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \varphi_2 + \dots + c_N e^{\lambda_N t} \varphi_N. \end{aligned}$$

従って

$$(2.8.1) \quad x(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{\lambda_j t} \varphi_j.$$

つまり、 $x$  を  $A$  の固有ベクトル成分へ分解しておく、 $x$  への  $e^{tA}$  の作用は、各成分に  $\exp(\text{固有値} \times t)$  をかけるという簡単なものになる。

(ここでは  $x(t) = e^{tA}x_0$  という公式を用いて (2.8.1) を導いたが、固有値、固有ベクトルの性質を用いて直接 (2.8.1) を導くことも出来る。)

上の計算のまとめ

$$x_0 = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \quad \implies \quad x(t) = \sum_{j=1}^N c_j e^{\lambda_j t} \varphi_j.$$

さて、

熱伝導方程式の初期値境界値問題の解の公式

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \implies u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

において、 $-n^2 \pi^2$  が固有値で、 $\sin n\pi x$  がそれに属する固有関数であることを思い出すと、1 階定数係数線形常微分方程式の初期値問題と熱伝導方程式の初期値境界値問題とで、話の成り立ちがまったく同じであることに気が付くであろう。言葉で表すと

初期値を固有関数の線形結合の形に書いておけば、  
各成分に  $e^{\lambda_n t}$  ( $\lambda_n$  は固有値) をかけることで時間発展問題の解が得られる。

## 固有値問題の読書案内

この講義の最重要テーマである Fourier の方法の要とも言える微分方程式の固有値問題であるが、行列の固有値問題と関係ある (類似が成り立つ) と指摘するだけで、あまり深くは突っ込めなかった。一つには無限次元空間の要素を表現するのに位相などの問題が生じて、難しくなるからである (短いスペースでうまく解説するだけの力は筆者にない)。作用素の固有値問題について勉強したい場合は、基本的な常微分作用素については藤田 [61] がお勧めである (3 年生くらいのレベルで十分読みこなせる)。より一般の線形作用素の固有値問題については、志賀 [31] がとっつき易いかもしれない。解析系の学生は、関数解析のしっかりした<sup>44</sup>成書、藤田・黒田・伊藤 [59] などを見るのもよい。こちらはズバリ「楕円型偏微分作用素に関する固有関数展開」という章がある。ただし、この本は読みこなすのにある程度の覚悟が必要だから、今のところは「そういうものがある」と覚えておくだけで十分であろう。それでも挑戦しようという人は、むしろ現代の古典として名高いクーラン・ヒルベルト [25] に挑戦するのが良いかもしれない。なお、小谷・俣野 [28] も面白い本である。■

## 2.9 非同次問題

この節では、非同次問題の解法をいくつか取り上げる。

### 2.9.1 熱方程式の非同次問題

この節では、次に掲げる非同次の初期値境界値問題を考える。

(非同次 H-IBP)

次の (非同次 HE), (非同次 DBC), (1.4.3) を満たす  $u = u(x, t)$  を求めよ:

$$\begin{aligned} \text{(非同次 HE)} \quad & u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + F(x) \quad (x \in (0, 1), t > 0), \\ \text{(非同次 DBC)} \quad & u(0, t) = A, \quad u(1, t) = B \quad (t > 0), \\ \text{(IC)} \quad & u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1]). \end{aligned}$$

ただし  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  は与えられた連続関数であるとする。

<sup>44</sup>薄い入門書には固有値問題までは書いていないことが多く、ある程度の厚さのある本を選ぶ必要である。



方程式 (非同次 HE) は、物理的には、針金の内部で熱量 (位置  $x$  で単位時間あたり  $F(x)$ ) が発生している状況を表している。

注意 2.9.1 (言葉使いの確認) ここで同次、非同次と言っているのは、初期条件を除いた、微分方程式と境界条件のみを問題にしている<sup>45</sup>。上の問題は線形方程式 (未知関数  $u$  についての 1 次式になっている) ではあるが、 $u$  について純粋の 1 次式ではなく、定数項というか 0 次の項 ( $F(x)$  とか  $A, B$  など) が入っているので、非同次方程式である。これに対して (H-IBP) の (HE), (DBC) のように  $u$  について 0 次の項は一切なくて、1 次の項ばかりの方程式は同次方程式と呼ばれる。■

まとめ (確認のための繰り返し)

- 線形方程式とは 1 次方程式のこと、そのうち純粋の 1 次式 (定数項は 0) ばかりからなるものを同次方程式、0 でない定数項があるものを非同次方程式と呼ぶ。
- 前節までに扱った初期値境界値問題 (H-IBP) は、微分方程式 (HE) と境界条件 (DBC) が同次方程式 ( $u$  について 1 次の項しか出てこない — 付録 B.2.8 を参照) であった。それゆえ

重ね合わせの原理<sup>46</sup>:  $\{u_n\}_n$  がみな解ならば、線形結合  $\sum_n c_n u_n$  も解

が成り立ち、Fourier の方法が活躍した。

- これに対して (非同次 H-IBP) では、線形問題ではあるが、微分方程式、境界条件が非同次になっているため、重ね合わせの原理は成立せず、Fourier の方法は (直接は) 利用できない。

## 2.9.2 特解発見の方法

注: 題の「特解発見の方法」という語は、一般には通用しない。ここだけの用語。

非同次方程式の解法については、線形代数や、常微分方程式論にも現れたはずである。その際、特解を発見して、後は

非同次方程式の一般解 = 非同次方程式の特解 + 同次方程式の一般解

という原理 (定理 B.2.18) を適用するという解法を学んだはずである。ここでは、これを便宜上、特解発見の方法と呼ぶことにする。

例 2.9.2 (常微分方程式) 微分方程式  $y'' - y' - 2y = 4x$  の特解としては、 $y = ax + b$  ( $a, b$  は定数) と置いて代入して  $y = -2x + 1$  が見つかる。それゆえ一般解は  $y(x) = (-2x + 1) + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$  ( $C_1, C_2$  は任意定数)。■

<sup>45</sup>初期条件を除いて考えるのは、常微分方程式の場合と同様である。

<sup>46</sup>英語では “principle of superposition” という。



特解としては、なるべく簡単なものを探すべきだが、ここでは  $t$  によらないもの、すなわち  $x$  のみの関数  $v = v(x)$  で、(非同次 HE) と (非同次 DBC) を満たすものを見出そう。その条件は

$$\begin{aligned} \text{(非同次 ODE)} \quad & 0 = v''(x) + F(x) & (x \in (0, 1)), \\ \text{(非同次 BC)} \quad & v(0) = A, \quad v(1) = B \end{aligned}$$

となる。このような関数を (非同次 HE) と (非同次 DBC) の定常解 (steady solution) と呼ぶ。

$F \in C[0, 1]$  ならば、これを満たす  $v$  は確かに存在する。実際、

$$(2.9.1) \quad v(x) = A + (B - A)x + \int_0^1 G(x, y)F(y)dy, \quad G(x, y) := \begin{cases} y(1-x) & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ x(1-y) & 0 \leq x < y \leq 1 \end{cases}$$

が解となる ( $G$  は (同次境界条件下の) 境界値問題の Green 関数と呼ばれるものである。  $v_1(x) := \int_0^1 G(x, y)F(y)dy$  が  $A = B = 0$  の場合の解になっていること、  $v_2(x) := A + (B - A)x$  が  $F \equiv 0$  の場合の解になっていることを注意しておく)。以下は簡単な  $F \equiv 0$  の場合だけ考えてみよう。

**例 2.9.3** (境界条件だけが非同次の場合)  $F \equiv 0$  の場合 (言い替えると微分方程式は同次で、非同次なのは境界条件だけの場合) は、以下のように簡単に  $v$  が求まる。まず  $v''(x) = 0$  より  $v'$  は定数関数であることが分かる。ゆえに  $v$  は 1 次関数。そこで  $v(x) = ax + b$  とおき、境界条件に代入すると  $a = B - A, b = A$ 。ゆえに

$$v(x) = (B - A)x + A. \blacksquare$$

以下では、とにかく  $v$  が得られたものとしよう。すると、 $w(x, t) := u(x, t) - v(x)$  とおくと、 $w$  は  $f - v$  を初期条件とする (H-IBP) を満たす、すなわち

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= w_{xx}(x, t) & (x \in (0, 1), t > 0), \\ w(0, t) &= w(1, t) = 0 & (t > 0), \\ w(x, 0) &= f(x) - v(x) & (x \in [0, 1]). \end{aligned}$$

これから

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x, \quad b_n = 2 \int_0^1 (f(x) - v(x)) \sin n\pi x \, dx \quad (n \in \mathbf{N})$$

と  $w$  が求まる。

後は、もちろん

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t)$$

で  $u$  が得られる。

### 2.9.3 定数変化法

前項の問題における非同次項の  $F$  が、時間  $t$  にも依存するように一般化された非同次初期値境界値問題を考えよう。

(時間依存項を持つ非同次 H-IBP)

次の (時間依存非同次 HE), (同次 DBC), (IC) を満たす  $u = u(x, t)$  を求めよ:

$$(\text{時間依存非同次 HE}) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + F(x, t) \quad (x \in (0, 1), t > 0),$$

$$(\text{同次 DBC}) \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$(\text{IC}) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

ただし  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $F: [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  は与えられた連続関数である。

この場合、少し考えれば分かるが、前小節のような特解発見の方法は (特別の場合を除き) うまく行かない。

ところで、定数係数の線形非同次常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + F(t), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

は定数変化法で解け、解は次のように得られるのであった:

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(s) ds.$$

上の (時間依存項を持つ非同次 H-IBP) も、形式的には定数変化法で計算して、次の解の公式<sup>47</sup> が得られる (計算の詳細は略する)。

$$u(x, t) = \int_0^1 G(x, y, t)f(y) dy + \int_0^t ds \int_0^1 G(x, y, t-s)F(y, s) dy.$$

(ただし  $U$  は Green 関数である。)

あるいは、本質的には同じことだが、同次方程式の解が

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

の形に書けたことを背景に、

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \quad (\text{あるいは } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin n\pi x)$$

とにおいて (係数  $c_n$  が時間に依存するようにしたことに注意)、これを各方程式に代入して、 $\{c_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  についての方程式を導いて解き、 $u$  を決定する、という方法もある。もちろん結果は級数の形になる。(ただし、この場合は、定数変化法と言うよりも、固有関数展開法とか Galerkin 法と呼ぶ人が多いようである。)

<sup>47</sup> この形の公式も **Duhamel** の公式と呼ぶことがある。また、このようにして解が得られることを、**Duhamel** の原理が成り立つ、ともいう。(Duhamel の原理は、 $A$  に相当する部分が時間に依存する場合にも (適当な修正の下に) 成り立つ、というか、そちらの方が普通で、こちらは、その特別の場合であると言った方が正確なのかも知れない。)

## 2.10 Neumann 境界値問題

この講義では、境界条件が Dirichlet である場合を主に説明したわけだが、以下に述べる Neumann 境界条件の場合も重要である。簡単にまとめておく。

### 2.10.1 Neumann 境界条件

前節までに扱った初期値境界値問題 (H-IBP) の境界条件

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

や、非同次初期値境界値問題 (非同次 H-IBP) の境界条件

$$u(0, t) = A, \quad u(1, t) = B$$

は、Dirichlet 境界条件あるいは第一種境界条件と呼ばれるが、ここではそれらの代わりに

$$(2.10.1) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$$

や

$$(2.10.2) \quad u_x(0, t) = A, \quad u_x(1, t) = B$$

を考える。(2.10.1) を同次 <sup>ノイマン</sup>Neumann 境界条件、(2.10.2) を非同次 Neumann 境界条件、両者を総称して Neumann 境界条件 (Neumann boundary condition) あるいは第二種境界条件と呼ぶ。

物理的には、(2.10.1) は、針金の両端で熱の出入りが無い、すなわち、針金が外界と熱的に <sup>しゃだん</sup>遮断されていることを意味する。そのため断熱境界条件と呼ぶことがある。

### 2.10.2 同次 Neumann 境界値問題

(H-IBP) の境界条件を同次 Neumann 境界条件に置き換えた

(N-H-IBP)

次の (HE), (NBC), (IC) を満たす  $u = u(x, t)$  を求めよ:

$$(HE) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad (x \in (0, 1), t > 0),$$

$$(NBC) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

ただし  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  は与えられた連続関数であるとする。

という問題を考える。

この問題は、(H-IBP) と同様に Fourier の方法で解ける。結果を書いておくと、

$$(2.10.3) \quad u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n\pi x, \quad a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

### 2.10.3 非同次 Neumann 境界値問題

非同次の Dirichlet 境界条件を課した問題は、特解発見の方法で解けたが、

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) & ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)) \\ u_x(0, t) &= A, \quad u_x(1, t) = B & (t \in (0, \infty)) \\ u(x, 0) &= f(x) & (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

のような、非同次の Neumann 境界条件の場合はどうなるか？ 結論を先に言うと、 $A = B$  の場合は定常解が存在してすぐ見つかるので、特解発見の方法で無事解決する（これは簡単なのでやってみると良い）。しかし  $A \neq B$  の場合は、定常解が存在しない（このこと自体をチェックするのはやはり簡単である）ので、少し難しい。このような場合も、定数変化法や Galerkin 法ならば解を構成できる。結果のみあげておく<sup>48</sup>。

$$(2.10.4) \quad u(x, t) = (B - A)t + \frac{B - A}{2}x^2 + Ax + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n\pi x,$$

$$(2.10.5) \quad a_n = 2 \int_0^1 \left[ f(x) - \left( \frac{B - A}{2}x^2 + Ax \right) \right] \cos n\pi x \, dx \quad (n = 0, 1, \dots).$$

$A = B$  か否かが定常解の存在非存在に関わることについて — 物理的な解釈 非同次な Neumann 境界条件を課した場合、針金は外界と熱のやりとりをする。 $A$  は  $x = 0$  において針金から流出する熱量の速さを表し、 $B$  は  $x = 1$  において針金に流入する熱量の速さを表す。両者が一致する場合は、定常解が存在するが、両者が一致しない場合は定常解が存在しないというのは、針金内の総熱量というものを考えてみれば、納得できるだろう（総熱量が変化している場合に、温度分布が定常であるはずがない！）。実際、解の公式を見ると  $(B - A)t$  という時間に依存する項があるのが分かる。

## 2.11 解の漸近挙動

$t \rightarrow \infty$  のとき、何が起こるか？ 解の振る舞い（解の<sup>ぜんきんきどう</sup>漸近挙動, asymptotic behavior という）を考えよう。

### 2.11.1 同次 Dirichlet 境界条件の場合 — 熱方程式の解の指数関数的減衰

同次 Dirichlet 境界条件を課した初期値境界値問題 (H-IBP) の解  $u$  について、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (x \in [0, 1]),$$

<sup>48</sup> $v(x, t) := (B - A)t + \frac{B - A}{2}x^2 + Ax$  という関数が、熱方程式と非同次 Neumann 境界条件を満たすことは容易に確認出来る。ゆえに、 $w(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$  は熱方程式と同次 Neumann 境界条件を満たす、というのが要点。

が成り立つ。このことを証明をしておこう。解の減衰 (0 へ収束すること) は、公式

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

において、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-n^2 \pi^2 t} = 0$  であることから、明らかのようにであるが、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

のような無限和を取る操作  $\sum_{n=1}^{\infty}$  と、極限を取る操作  $\lim_{t \rightarrow \infty}$  の順序の可換性は一般には成り立たないことであるから、証明を要することである。ただ 0 に収束することを示すだけならば、級数が一様収束していることを証明すればよいが、せっかくだから、より詳しい結果を導こう。

**定理 2.11.1 ((H-IBP) の解の指数関数的減衰)**  $u$  が (H-IBP) の解ならば、任意に  $\delta > 0$  を固定するとき、

$$(2.11.1) \quad |u(x, t)| \leq C e^{-\pi^2 t} \quad ((x, t) \in [0, 1] \times [\delta, \infty))$$

を満たす定数  $C$  が存在する。特に  $u(x, t)$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき、 $x$  につき一様に、指数関数的に減衰する。

「指数関数的に減衰する」

関数  $v(t)$  が、ある正数  $C, \tau$  に対し、

$$|v(t)| \leq C e^{-t/\tau} \quad (\text{十分大きい } t)$$

のように指数関数  $C e^{-t/\tau}$  で上から評価されるとき、「 $v(t)$  は指数関数的に 0 に収束する」、または「 $v(t)$  は指数関数的に減衰する」、という。

定理の証明 まず

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

から

$$|b_n| \leq 2 \int_0^1 |f(x) \sin n\pi x| \, dx \leq 2 \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \int_0^1 dx = 2 \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| =: M.$$

次に

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n^2-1)\pi^2 t} \sin n\pi x$$

であるから

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= e^{-\pi^2 t} \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n^2-1)\pi^2 t} \sin n\pi x \right| \leq \sup_n |b_n| e^{-\pi^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2-1)\pi^2 t} \\ &\leq M e^{-\pi^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2-1)\pi^2 t}. \end{aligned}$$

ゆえに任意の正数  $\delta$  に対して

$$|u(x, t)| \leq M e^{-\pi^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2-1)\pi^2 \delta} \quad ((x, t) \in [0, 1] \times [\delta, \infty)).$$

そこで

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n^2-1)\pi^2 \delta} < \infty$$

であることを示せばよいが、これは

$$e^{-(n^2-1)\pi^2 \delta} \leq e^{-(n-1)\pi^2 \delta} = r^{n-1}, \quad r = e^{-\pi^2 \delta} < 1$$

より、収束する等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ ,  $0 < r < 1$  を優級数に持つことから明らかである。■

## 2.11.2 同次 Neumann 境界条件の場合

結果だけ書いておく。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \frac{a_0}{2} = \int_0^1 f(x) dx.$$

より詳しくは

$$(\forall \delta > 0) (\exists C > 0) (\forall (x, t) \in [0, 1] \times (\delta, \infty)) \quad \left| u(x, t) - \frac{a_0}{2} \right| \leq C e^{-\pi^2 t}.$$

この結果を物理的に解釈すると、「針金は熱的に外界と遮断されているので、各点における温度は、初期温度分布で持っていた熱量を、針金上に一様に分配した場合の「平均温度」に指数関数的に近付いていく」、となる。

## 2.11.3 一般の場合 — 定常解への収束原理

熱方程式もどきの方程式では、多くの場合、

定常解への収束原理

$t \rightarrow \infty$  のとき、解は定常解に指数関数的に収束する。

が成り立つ<sup>49</sup>。ここで、定常解 (steady solution) とは、時刻  $t$  によらない解、という意味で

<sup>49</sup>この「定常解への収束原理」も、一般に通用する用語ではなく、ここだけの用語である。でもこういう言葉を用意しておくと、物事が言葉で表せてより理解しやすくなるのだ、と私は信じている。

ある<sup>50</sup>。例えば、非同次問題の節で、特解として  $t$  を含まないものを探したが、あれらは定常解だったわけである<sup>51</sup>。

実際、同次 Dirichlet 境界値問題 (H-IBP)、同次 Neumann 境界値問題 (N-H-IBP) においても、この「定常解への収束原理」は成り立っている。

確認 (H-IBP) に対応する定常解の方程式は

$$0 = v'', \quad v(0) = v(1) = 0$$

であり、定数関数 0 は確かにこの方程式の一意解である。また (N-H-IBP) に対応する定常解の方程式は

$$0 = v'', \quad v'(0) = v'(1) = 0$$

であり、収束先である定数関数  $a_0/2$  は確かにこの解である（この問題には解の一意性はないが、それでも  $v \equiv \text{const.}$  であることは簡単に分かる）。

以下では、もう少し複雑な (非同次 H-IBP)

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + F(x) & (x \in (0, 1), t > 0), \\ u(0, t) &= A, \quad u(1, t) = B & (t > 0), \\ u(x, 0) &= f(x) & (x \in [0, 1]). \end{aligned}$$

の場合にも「定常解への収束原理」が成り立つことを確かめよう。

すでに見たように、

$$v''(x) = F(x) \quad (x \in (0, 1)), \quad v(0) = A, \quad v(1) = B$$

を満たす  $v = v(x)$  と、

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= w_{xx}(x, t) & (x \in (0, 1), t > 0), \\ w(0, t) &= w(1, t) = 0 & (t > 0), \\ w(x, 0) &= f(x) - v(x) & (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

を満たす  $w = w(x, t)$  を用いて、 $u := w + v$  で定義した関数  $u$  が解になる。 $w$  については、指数関数的に 0 に収束することが分かっているから、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = v(x) \quad (x \in [0, 1]),$$

より詳しくは

$$(\forall \delta > 0) (\exists C > 0) (\forall (x, t) \in [0, 1] \times [\delta, \infty)) \quad |u(x, t) - v(x)| \leq Ce^{-\pi^2 t}$$

が得られる。

<sup>50</sup>波動方程式においては、定常解は違った意味になる。混同しないように注意。

<sup>51</sup>というわけで、あそこで出て来た  $v$  は、単に解を求めるための手段として得た特解という意味以上のものを持っているわけである。

注意 2.11.2 (常微分方程式とのアナロジー) 常微分方程式論において、上の定常解に対応する概念と言えば、力学系の平衡点である。力学系

$$(2.11.2) \quad \frac{dx}{dt} = F(x)$$

の平衡点とは

$$F(x_*) = 0$$

を満たす  $x_*$  のことと定義されるが、平衡点  $x_*$  に対して、

$$x(t) := x_*$$

で定義した定数関数  $x(t)$  を考えると、これは (2.11.2) の解になっている (つまり時間によらない解になっている)。力学系の平衡点の分類理論というものがあつたことを覚えているだろうか？ 簡単のために  $F(x) = Ax$  ( $A$  は行列) の場合、すなわち定数係数線形常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

を考えると、0 は平衡点で、これがどういうタイプであるかは、 $A$  の固有値を調べることで判定できた。例えば固有値の実部がすべて負であれば、初期値が何であっても

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

が成り立つ (平衡点 0 は沈点である)。と、ここまで書くと勘の良い人は分かるかもしれないが、(H-IBP) を解く際に現れた (同次 Dirichlet 境界条件付きの微分作用素  $d^2/dx^2$  の) 固有値  $-n^2\pi^2$  はすべて負であった。熱方程式とそれを少し修正した方程式の解の多くが、定常解に収束してしまう原理との関係が見えてきただろうか？ ■

メモ 熱方程式と非同次 Dirichlet, または非同次 Neumann の場合の話を書いておくべきだ。とりあえず結果のみ。前者の場合

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = v(x) = (B - A)x + A.$$

後者の場合

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \begin{cases} \frac{a_0}{2} + Ax = \int_0^1 f(x)dx + Ax - \frac{A}{2} & (A = B \text{ のとき}) \\ -\infty & (A > B \text{ のとき}) \\ +\infty & (A < B \text{ のとき}) \end{cases}$$

## 2.12 紙芝居

熱方程式の初期値問題について解の公式を得て色々議論できたわけだが、実際どのようなものか、いくつか「見て」みよう。以下では、差分法 (finite difference method) と呼ばれる数値解法によって得られた近似解を図示する<sup>52</sup>。付録の例 G.7.2 も参照せよ。

<sup>52</sup>Java の使える WWW ブラウザーで <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~haruo310/soturon/heat1d.html> (2000 年度桂田研卒研、佐藤晴郎 & 大葉敏文のページ) にアクセスすると、アニメーションが見られる。— これはリンク切れしている。そもそも Java の仕様変更で、Java Applet は廃止されたので、復活させるのは難しい。



## 2.12.1 (H-IBP) の解

初期値  $f$  が

$$(2.12.1) \quad f_1(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 1-x & (1/2 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

で与えられる関数である場合<sup>53</sup> (グラフは図 2.1) に、同次 Dirichlet 境界条件を課した初期値境界値問題 (H-IBP) の解の様子を示したのが図 2.2 ~ 2.5 である。それぞれの図は、 $t = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$  としたときの  $x$  の関数  $u(x, t)$  のグラフに対応するものである。グラフの横軸が位置、縦軸が温度を表していることを考えると、時間が経つにつれて、温度の高いところから低いところへ熱が流れていく様子がわかる。図 2.6 は  $t = 0$  から  $t = 0.3$  まで 0.01 刻みの時刻におけるグラフをまとめて描いてみたものである。時間が経つにつれて、温度が 0 に近づいていくのがわかる。

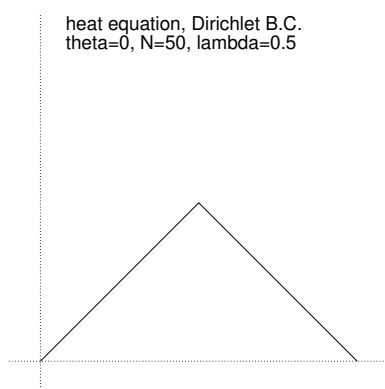


図 2.1: 初期条件  $f = f_1$

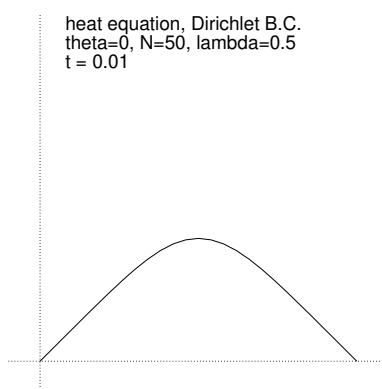


図 2.2:  $t = 0.01$

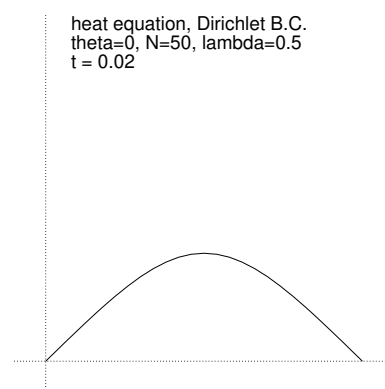


図 2.3:  $t = 0.02$

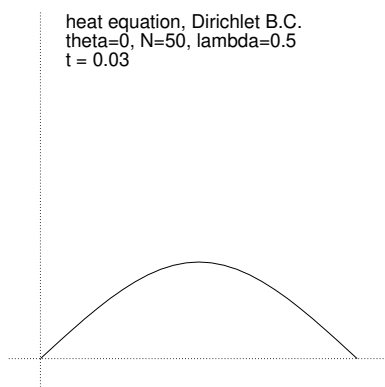


図 2.4:  $t = 0.03$

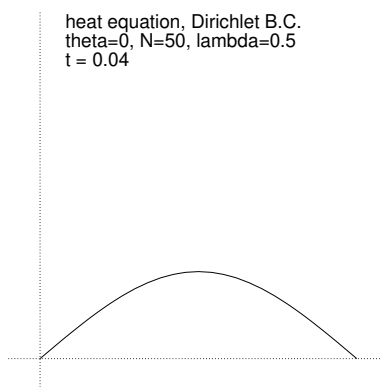


図 2.5:  $t = 0.04$

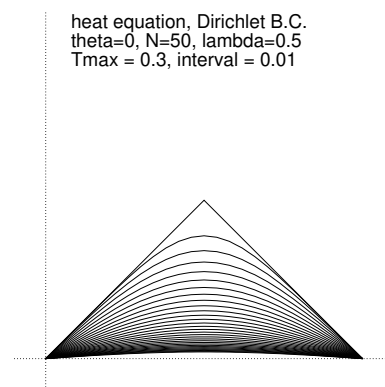


図 2.6: デイリクレ条件,  $t = 0 \sim 0.3, \Delta t = 0.01$

<sup>53</sup>蛇足:  $f(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin[(2k-1)\pi x] = \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\sin \pi x}{1^2} - \frac{\sin 3\pi x}{3^2} + \frac{\sin 5\pi x}{5^2} - \dots \right)$  と展開できる。

## 2.12.2 (N-H-IBP) の解

次に同次ディリクレ境界条件の代りに、同次ノイマン境界条件を課した初期値境界値問題 (N-H-IBP) の解を図 2.7～2.11 に示す。確かに時間が経つにつれて  $u(\cdot, t)$  は定数関数 (値は初期値が持っていた総熱量で決まる平均温度である  $1/4$ ) に収束して行く様子がわかる。

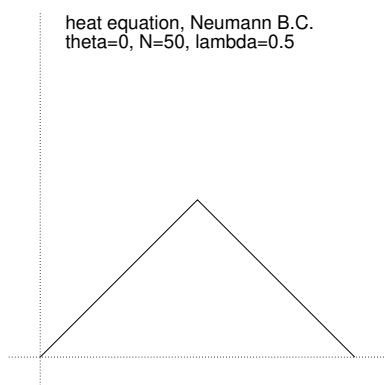


図 2.7:  $t = 0$

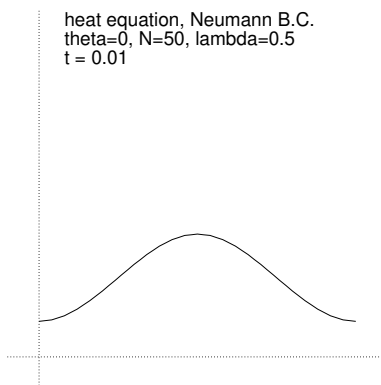


図 2.8:  $t = 0.01$

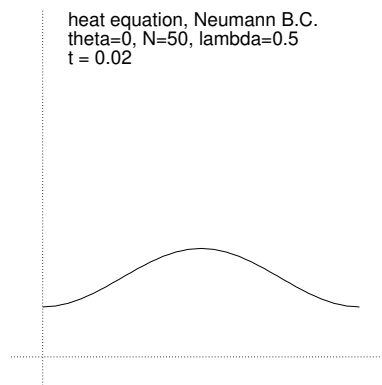


図 2.9:  $t = 0.02$

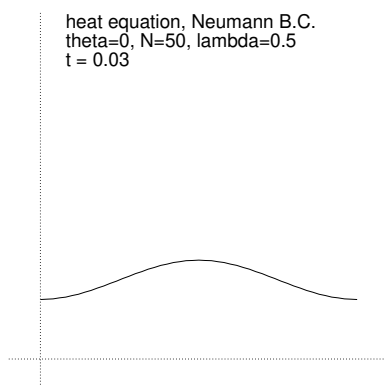


図 2.10:  $t = 0.04$

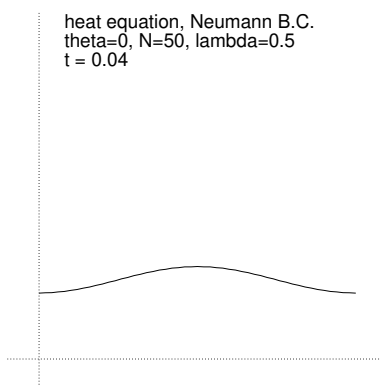


図 2.11:  $t = 0.05$

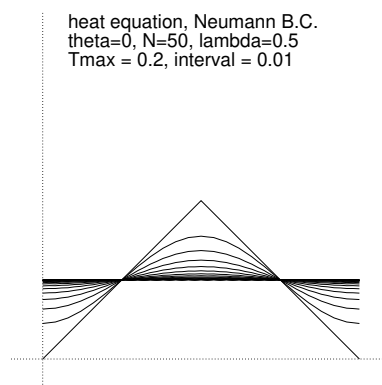


図 2.12: ノイマン条件,  $t = 0 \sim 0.3$ ,  $\Delta t = 0.01$

## 2.12.3 複雑な初期値に対する (H-IBP) の解

初期値  $f$  が図 2.13 のような、たくさんの角のあるグラフを持つ関数  $f_2$  の場合に初期値境界値問題 (H-IBP) の解を図 2.13 ～ 2.18 に示す。

**角の消滅** 角となっている点で  $f$  は微分できないので、 $n \rightarrow +\infty$  のときの  $f$  の Fourier 係数の減衰はゆっくりである。しかし解の公式

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n \pi x, \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n \pi x dx$$

を見ると、第  $n$  項には、時間に関する因子  $\exp(-n^2\pi^2t)$  がかかっている、これは  $t > 0$  のとき、 $n$  の増加につれ急激に小さくなる。従って、初期条件  $f = f_2$  が微分可能でなくとも、少しでも時間が経過すると、 $u(\cdot, t)$  は高い微分可能性をもつ (実は無限回微分可能になる) ことが導かれる。

実際に、すでに  $t = 0.001$  という早い段階で角が消滅していることがわかる。

**凹凸の消滅** さらに時間が経過するにつれ、凹凸の激しいところほど急速に変形して消滅し、グラフが平滑な形に近づくことが見てとれる。凹凸が激しい (変化が急) なところがあるのは、大きな番号  $n$  に対する  $\sin n\pi x$  の項が大きな割合を占めているからであると推測できる。しかし  $n$  が大きいほど、時間に関する因子  $\exp(-n^2\pi^2t)$  は、 $t$  の増加につれて速く小さくなる。そのため、凹凸の変化が激しいところほど早く消滅する、と考えられる。

**漸近形** 解の公式において、 $t$  が非常に大きくなると、 $n = 2, 3, \dots$  の項は  $n = 1$  に対応する項  $b_1 \exp(-\pi^2t) \sin \pi x$  に比べて無視できるほど小さくなることがわかる。すなわち  $t$  が大きいところでは、

$$(2.12.2) \quad u(x, t) \doteq b_1 e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

これはグラフでいうと、形がサイン・カーブの半周期分に近づくことを意味する。実際、図 2.18 ではそうなっている。

## 2.13 エネルギーを用いた議論

これまで熱方程式の古典解については、 $u_t, u_x, u_{xx}$  が  $(0, 1) \times (0, \infty)$  で存在して連続としてきたが、この節では、少し仮定を強めて、 $u_t, u_x, u_{xx}$  は  $[0, 1] \times (0, \infty)$  で存在して連続と仮定する。こうすることで、以下の積分記号下の微分を正当化することが可能になる。

### 2.13.1 総熱量と Neumann 問題

$t \in [0, \infty)$  に対して

$$J(t) := \int_0^1 u(x, t) dx$$

とおく。これは物理的には時刻  $t$  における針金の総熱量とも、また針金の平均温度とも解釈できる量である (§1, 2 の議論を参照せよ)。

$u$  が熱方程式  $u_t = u_{xx}$  に Neumann 境界条件

$$u_x(0, t) = A, \quad u_x(1, t) = B \quad (A, B \text{ は既知定数})$$

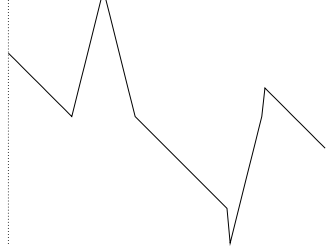
と初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

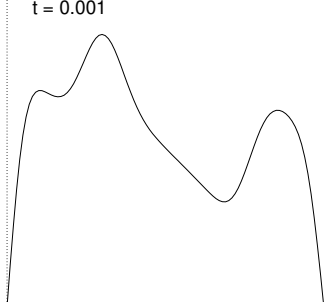
を課した初期値境界値問題の解であるとしよう。 $t > 0$  に対して

$$J'(t) = \int_0^1 u_t(x, t) dx = \int_0^1 u_{xx}(x, t) dx = [u_x(x, t)]_{x=0}^{x=1} = u_x(1, t) - u_x(0, t) = B - A.$$

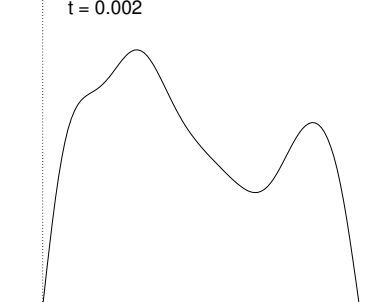
heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=100, lambda=0.25



heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=100, lambda=0.25  
t = 0.001

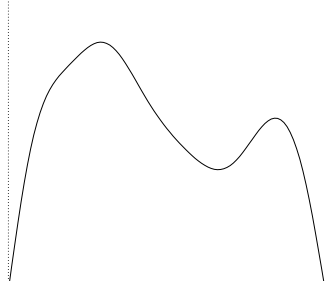


heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=100, lambda=0.25  
t = 0.002



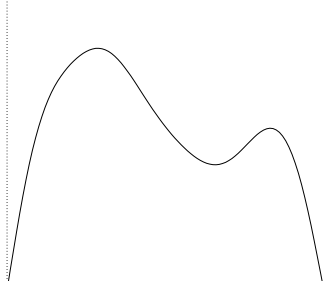
☒ 2.13:  $t = 0$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=100, lambda=0.25  
t = 0.003



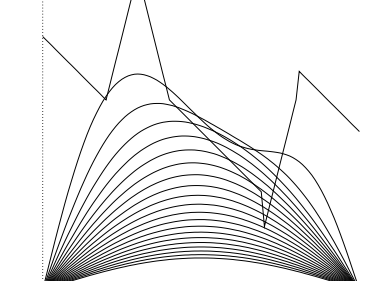
☒ 2.14:  $t = 0.001$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=100, lambda=0.25  
t = 0.004



☒ 2.15:  $t = 0.002$

heat equation, Dirichlet B.C.  
theta=0, N=100, lambda=0.25  
Tmax = 0.2, interval = 0.01



☒ 2.16:  $t = 0.003$

☒ 2.17:  $t = 0.004$

☒ 2.18:  $t = 0 \sim 0.2, \Delta t = 0.01$

また

$$J(0) = \int_0^1 u(x, 0) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

であるから、

$$J(t) = J(0) + (B - A)t = \int_0^1 f(x) dx + (B - A)t \quad (t \in [0, \infty)).$$

これから次のことが分かる。

- $A = B$  のとき、 $J(t)$  は定数  $\int_0^1 f(x) dx$  に等しい。物理的には、針金の左端から流入する熱量と、右端から流出する熱量が等しい場合は、針金の総熱量 (平均温度) は不変である (ゆえに初期時刻におけるそれと等しい)、と解釈できる。
- $A > B$  のときは、 $J(t)$  は減少関数でいくらでも小さくなり、 $A < B$  のときは、 $J(t)$  は増加関数でいくらでも大きくなる。特に  $A \neq B$  のとき、定常解は存在しない。

### 2.13.2 Dirichlet 問題, Neumann 問題の解の一意性の別証明

$t \in [0, \infty)$  に対して

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 u(x, t)^2 dx$$

とおく。これは物理的には特に意味がないようであるが、以下に見るように役に立つ補助関数である。

$u$  が以下の二つの境界条件のいずれかを満たすと仮定する。

$$(DBC) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty))$$

$$(BBC) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)).$$

このとき、実は初期条件  $f \equiv 0$  であれば  $E(t) \equiv 0$ 、従って  $u \equiv 0$  であることが以下のようにして証明できる。

まず  $t > 0$  とすると

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^1 u_t(x, t)u(x, t) dx = \int_0^1 u_{xx}(x, t)u(x, t) dx \\ &= [u_x(x, t)u(x, t)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u_x(x, t)u_x(x, t) dx \\ &= - \int_0^1 u_x(x, t)^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

さらに

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 u(x, 0)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 0^2 dx = 0$$

であるから

$$E(t) \leq E(0) = 0 \quad (t \in [0, \infty)).$$

ところが明らかに

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 u(x, t)^2 dx \geq 0$$

であるから、

$$E(t) = 0 \quad (t \in [0, \infty)). \blacksquare$$

このことから、初期値と、Dirichlet 境界値または Neumann 境界値が等しい (すなわち

$$u(0, t) = A, \quad u(1, t) = B \quad (t \in (0, \infty)),$$

あるいは

$$u_x(0, t) = A, \quad u_x(1, t) = B \quad (t \in (0, \infty))$$

という境界条件を課す) ならば、解はただ一つに限る、すなわち解の一意性が成り立つことが分かる。

**注意 2.13.1** 我々のもとの (H-IBP) の古典解の定義では、 $u_t(x, t)$ ,  $u_x(x, t)$ ,  $u_{xx}(x, t)$  は  $x = 0, 1$  に対して存在するとは限らないのであったから、以前と同じ一意性定理 (系 2.4.4) が証明できたわけではない。古典解の条件を少し強めたので、結果として得られる一意性定理は少し弱くなったと言える。しかし、上の議論は見通しが良いし、同じやり方で Neumann 境界条件の場合も扱えることは大きな魅力と言える。■

**余談 2.13.1** (多次元への一般化) この節の議論は、解の公式を用いていない。そのため、容易に多次元の一般領域での熱方程式の初期値境界値問題に拡張される。興味のある人はやってみると良い。そのためには、Green の公式 (定理 3.5.3) が役立つ。■

## 2.14 変数変換の例

微分方程式に現れる変数を「変数変換」すると、新しい微分方程式が現れる (どういう微分方程式であるかは、微積分で学んだ「合成関数の微分法」を用いて計算できる)。その問題が解ければ、元の問題の解を求めることが出来る。このように、変数変換は、微分方程式を解くための手段としても重要であるが、たとえ解けないときでも、色々な使い道がある。例を示す。

**例 2.14.1** (単位を取り替え)  $[0, L] \times [0, \infty)$  で定義された熱方程式

$$u_t(x, t) = \kappa u_{xx}(x, t) \quad (x \in (0, L), t > 0)$$

( $\kappa$  は正の定数) について考える。

$$\xi := x/L, \quad \tau := \alpha t$$

により変数変換  $(x, t) \mapsto (\xi, \tau)$  をする (ただし  $\alpha$  は後から定める正定数)。

$$v(\xi, \tau) := u(x, t) = u(L\xi, \tau/\alpha)$$

とおくと、 $v$  は  $[0, 1] \times [0, \infty)$  において定義された関数で、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot 0 + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot \alpha = \alpha \frac{\partial v}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{L} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \cdot 0 = \frac{1}{L} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{L} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{L} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \cdot \frac{1}{L} + \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi} \cdot 0 \right) = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\end{aligned}$$

であるから、 $u_x = \kappa u_{xx}$  に代入して

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial \tau} = \kappa \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2},$$

すなわち

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\kappa}{\alpha L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.$$

ゆえに

$$\alpha = \frac{\kappa}{L^2}$$

と  $\alpha$  を選べば、

$$v_\tau = v_{\xi\xi} \quad ((\xi, \tau) \in (0, 1) \times (0, \infty))$$

が成り立つ。

このことから、初期値境界値問題

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= \kappa u_{xx}(x, t) \quad (x \in (0, L), t > 0), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \quad (t > 0), \\ u(x, 0) &= f(x) \quad (x \in [0, L])\end{aligned}$$

の解の公式が次のようにして得られる。

$F(\xi) := f(L\xi)$  とおくと、 $v$  は

$$\begin{aligned}v_\tau(\xi, \tau) &= v_{\xi\xi}(\xi, \tau) \quad ((\xi, \tau) \in (0, 1) \times (0, \infty)) \\ v(0, \tau) &= v(1, \tau) = 0 \quad (\tau \in (0, \infty)) \\ v(\xi, 0) &= F(\xi) \quad (\xi \in [0, 1])\end{aligned}$$

を満たすから、既に得られている結果 ((H-IBP) の解の公式) から、

$$v(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \tau} \sin n\pi\xi, \quad c_n = 2 \int_0^1 F(\xi) \sin(n\pi\xi) d\xi.$$

ゆえに、

$$u(x, t) = v(\xi, \tau) = w(x/L, \kappa t/L^2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{L^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

$c_n$  の定義式については、 $\xi = x/L$  と置換積分して

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \blacksquare$$

例 2.14.2 (熱方程式の右辺に温度  $u$  に比例する項がある場合)  $q$  を既知定数とする。 $u$  が初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + qu(x, t) & (x \in (0, 1), t \in (0, \infty)), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & (t \in (0, \infty)), \\ u(x, 0) &= f(x) & (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

の解であるときに、

$$v(x, t) := e^{-qt}u(x, t)$$

とおくと、 $v$  は

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= v_{xx}(x, t) & (x \in (0, 1), t \in (0, \infty)), \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0 & (t \in (0, \infty)), \\ v(x, 0) &= f(x) & (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

を満たす。これは (H-IBP) に他ならないから

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x, \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

と解ける。ゆえに

$$u(x, t) = e^{qt}v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(q-n^2 \pi^2)t} \sin n\pi x. \blacksquare$$

余談 2.14.1 上の微分方程式  $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + qu(x, t)$  の物理的な意味を考えてみよう。ある時期まで筆者は、「例えば、化学反応等で、温度に比例する熱の発生がある場合の方程式は、こういう形になる」と説明してきたが、ファーロウ [58] を読んで、もっと自然なたとえがあることを知った。 $q$  が負の場合を考えると、外界の温度が 0 で、側面の絶縁が完全でないため、冷却効果がある場合の方程式と考えられる。それから、熱伝導の効果がない場合、すなわち

$$u_t(x, t) = qu(x, t)$$

という方程式の解は

$$u(x, t) = u(x, 0)e^{qt}$$

であるから、 $+qu$  という項の解に対する効果は  $e^{qt}$  をかけることで、だから  $u(x, t) = e^{qt}w(x, t)$  という変数変換が有望だ、という説明はなかなか面白いと感じた。■

例 2.14.3 (右辺に  $u_x$  に比例する項がある場合)  $p$  を既知定数とする。 $u$  が初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + pu_x(x, t) & (x \in (0, 1), t \in (0, \infty)), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & (t \in (0, \infty)), \\ u(x, 0) &= f(x) & (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

の解であるときに、

$$u(x, t) = e^{Ax}v(x, t) \quad \text{i.e.} \quad v(x, t) := e^{-Ax}u(x, t)$$



とおくと、

$$\begin{aligned}v_t(x, t) &= v_{xx}(x, t) + (2A + p)v_x(x, t) + (A^2 + pA)v(x, t) & (x \in (0, 1), t \in (0, \infty)), \\v(0, t) &= v(1, t) = 0 & (t \in (0, \infty)), \\v(x, 0) &= e^{-Ax}f(x) & (x \in [0, 1])\end{aligned}$$

ゆえに  $A = -p/2$  と選べば

$$v_t(x, t) = v_{xx}(x, t) - \frac{p^2}{4}v(x, t)$$

となる。上の例から

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(-p^2/4 - n^2\pi^2)t} \sin n\pi x, \quad b_n = 2 \int_0^1 e^{px/2} f(x) \sin n\pi x \, dx \quad (n \in \mathbf{N}).$$

ゆえに

$$u(x, t) = e^{-px/2}v(x, t) = e^{-px/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{(-p^2/4 - n^2\pi^2)t} \sin n\pi x. \blacksquare$$

上の例の問題はかなり難しい。その理由は、これは対称な問題ではないからである。固有関数を求めてみると分かるが、普通の内積について直交性は成り立たない。だから直接 Fourier の方法を使うのは苦勞する。

**練習問題** 熱方程式の初期値境界値問題 (H-IBP) において、初期値が  $1/2$  に関して対称である (初期温度分布が左右対称である) 場合、任意の時刻  $t$  において、解  $u(\cdot, t)$  は  $1/2$  に関して対称であることを示せ。

(ヒント: 例えば  $f$  が  $1/2$  に関して対称であるとは

$$f(1-x) = f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

と書ける。そこで

$$v(x, t) = u(1-x, t)$$

において、 $v$  がどういう初期値境界値問題の解になっているかを考えると…) ■

## 2.15 この後の熱方程式の勉強

この講義では 1 次元有界開区間における熱方程式しか説明できなかったが、これ以上のことを学びたい場合のガイダンスをしよう。

### 2.15.1 1 次元非有界区間における熱方程式

熱方程式を考える場合、 $\mathbf{R}$  における領域は次の 3 つに分類できる。

(1) 有界開区間  $(a, b)$ . 変数変換で  $(0, 1)$  の場合に帰着できる。— この場合についてこの講義で学んだわけである。

(2) 数直線  $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ .

(3) 半無限開区間  $(a, \infty)$  or  $(-\infty, b)$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ). いずれも変数変換で  $(0, \infty)$  の場合に帰着できる。

(2), (3) の場合については、例えば藤田他 [59] に詳しい説明がある (お勧め)。

例えば (2) における熱方程式の問題は、境界条件がなくなって

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \quad (x \in \mathbf{R}, t > 0), \\u(x, 0) &= f(x) \quad (x \in \mathbf{R})\end{aligned}$$

という形になるが、このように微分方程式以外に初期条件だけでできている問題を初期値問題 (initial value problem) または Cauchy 問題 (Cauchy problem) と呼ぶ。

解の一意性 古典解の一意性はやはり最大値原理を用いて証明するのだが、一意性を得るためには、解について自明でない条件を課す必要がある。つまり初期条件が単に連続というだけでは解の一意性が成り立たない例がある。この反例については、ケルナー [27] または熊ノ郷 [24] を見るのを勧める。

ケルナーからの引用

ここでわれわれが得た新しい解は、無限遠からの爆発的な熱の流入を表わしており、少し考えれば、この現象は熱の伝播速度に上限がないために起こっていることがわかる。したがって、どんな遠方の攪乱でもそれが十分大きければ、原点の温度を素早く変えてしまう。例 67.4 のような解は、もし波動方程式のように攪乱の伝わる速さが有限であれば生じることはなく、また、熱方程式でも無限遠での増大度を制限すれば排除することができる。

解の存在 — 熱核を用いた解の表示 解の存在については、やはり Fourier 解析を用いて解を構成することで証明されるが<sup>54</sup>、この場合は Fourier 級数でなく Fourier 変換を用いることになる。結果だけ書いておくと (付録 E.2 の例 E.2.2 を参照せよ)、

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}} H(x - y, t) f(y) dy,$$

ただし  $H$  は次式で定義される関数で<sup>55</sup>、熱方程式の基本解 (fundamental solution) あるいは熱核 (heat kernel) と呼ばれる<sup>56</sup>。

$$H(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

関数  $H(\cdot, t): x \mapsto H(x, t)$  のグラフは、例 G.5.2 (p. 238) にある。

<sup>54</sup>伝統的なテキストでは、Fourier 変換を用いて基本解 (熱核) を求めるのが「普通」であるが (付録 E の例 E.2.2 参照)、最近では自己相似性を利用して基本解を計算する手法が流行っているらしい。俣野 [71], 神保 [34] などを見よ。

<sup>55</sup>確率論を勉強した人は、 $H$  が平均 0, 分散  $2t$  の正規分布の確率密度関数に等しいことに気付くであろう。

<sup>56</sup>熱方程式の初期値問題の Green 関数と呼ぶこともある。

超関数の言葉を用いると、 $H$  はデルタ関数を初期値とする初期値問題の解である。すなわち次の条件を満たす。

$$\begin{aligned} H_t &= H_{xx} \quad (x \in \mathbf{R}, t > 0), \\ H(x, 0) &= \delta(x). \end{aligned}$$

(物理的には、 $H(x, t)$  は、時刻  $t = 0$  に原点に単位熱量があり、それ熱伝導していった場合の温度分布を表す。 $t = 0$  では、原点  $x = 0$  に熱が集中しているので、その点の温度は無限大である。)

## 2.15.2 多次元領域における熱方程式

(この項工事中で、かなり粗いです。)

多次元空間における熱方程式についても、古典解に関する最大値原理はそれほど難しくなく拡張できるので、古典解の一意性の証明は簡単である。それに比べると解の存在証明はなかなか難しい。

考えている領域が全空間  $\mathbf{R}^n$  の場合は、1次元の場合の自然な拡張として、初期値問題の解が

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} H_n(x - y, t) f(y) dy, \quad H_n(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

と表わされる (この  $H_n$  は1次元の場合のテンソル積になっている<sup>57</sup>)。

問題 18.  $\frac{\partial H_n}{\partial t} = \Delta H_n$  が成り立つことを確かめよ。

(検算用に途中計算結果を記しておく:  $\frac{\partial H_n}{\partial x_i} = H_n(t, x) \frac{-x_i}{2t}$ ,  $\frac{\partial^2 H_n}{\partial x_i^2} = H_n(t, x) \frac{x_i^2 - 2t}{4t^2}$ ,  $\frac{\partial H_n}{\partial t} = H_n(t, x) \frac{|x|^2 - 2nt}{4t^2} = \Delta H_n$ .)

以下、そうでない場合、簡単のため  $\Omega$  が  $\mathbf{R}^n$  の有界領域の場合に、1次元のときと同様な初期値境界値問題

$$(HE) \quad u_t(x, t) = \Delta u(x, t) \quad ((x, t) \in \Omega \times (0, \infty)),$$

$$(DBC) \quad u(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)),$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in \bar{\Omega})$$

を考える。

Fourier の方法を実行してみよう。(HE), (DBC) の変数分離解  $u(x, t) = \zeta(x)\eta(t)$  で、非自明なもの ( $u(x, t) \not\equiv 0$ ) を求める。

$$\zeta(x)\eta'(t) = \Delta\zeta(x)\eta(t) \quad (x \in \Omega, t \in (0, \infty)), \quad \zeta(x)\eta(t) = 0 \quad (x \in \partial\Omega, t \in (0, \infty))$$

から次のような固有値問題が導かれる。

$$\Delta\zeta(x) = \lambda\zeta(x) \quad (\text{in } \Omega), \quad \zeta(x) = 0 \quad (\text{on } \partial\Omega), \quad \zeta(x) \not\equiv 0.$$

実は1次元のときと同様の性質を持つ固有値  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ , 固有関数  $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が存在する:

---

<sup>57</sup>  $H(x_1, t)H(x_2, t) \cdots H(x_n, t) = H_n(x, t)$  という意味である。

- (i)  $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \rightarrow -\infty$ .
- (ii)  $\lambda_m \neq \lambda_n \implies (\zeta_m, \zeta_n) = 0$ .
- (iii)  $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  は完全系をなす。

これを用いると、初期値境界値問題 (HE), (DBC), (IC) の解は次のように与えられる:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n t} \zeta_n(x), \quad b_n = \frac{(f, \zeta_n)}{(\zeta_n, \zeta_n)}.$$

残念ながら、固有値問題が具体的に解けるのは、領域が本質的に<sup>58</sup> 1 次元の開区間の直積であるような、次のような場合に限られる<sup>59</sup>。多次元空間では領域 (連結開集合) がバラエティーに富むので、多くの場合は Fourier の方法による具体的な計算で、解を得ることは出来ないことになる。

(1) 長方形 ( $\mathbf{R}^2$  の場合), 直方体 ( $\mathbf{R}^3$  の場合) など  
(桂田 [18] 第 2 章第 2 節に長方形の場合の議論が書いてある)

(2) 円板 ( $\mathbf{R}^2$  の場合), 円柱または球 ( $\mathbf{R}^3$  の場合) など  
(桂田 [19] に円盤、円柱の場合の議論が書いてある)

(1) のうち、例えば長方形領域  $\Omega = (0, W) \times (0, H)$  については、

$$\lambda_{m,n} := \left[ \left( \frac{m}{W} \right)^2 + \left( \frac{n}{H} \right)^2 \right] \pi^2, \quad \varphi_{m,n} := \sin \frac{m\pi x}{W} \sin \frac{n\pi y}{H} \quad (m, n \in \mathbf{N})$$

が固有値問題の解である。

(2) については Bessel 関数などの特殊関数を使うことになるが (結構面倒であるが、勉強した人には「面白い」となかなか好評であることが多い — 案外勧められる?), 議論の大筋は 1 次元の場合の Fourier 級数と同様である。例えば単位円盤領域の場合、

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n} &:= -\mu_{m,n}^2, \\ \varphi_{m,n}(r, \theta) &:= J_n(\mu_{m,n}r) \cos n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots), \\ \psi_{m,n}(r, \theta) &:= J_n(\mu_{m,n}r) \sin n\theta \end{aligned}$$

である。ここで  $J_n$  は  $n$  次の Bessel 関数

$$J_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{n+2k} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$\mu_{n,m}$  は  $J_n$  の正の零点を小さい方から順に並べたものである:

$$0 < \mu_{n,1} < \mu_{n,2} < \cdots < \mu_{n,m} < \mu_{n,m+1} < \cdots \rightarrow \infty.$$

一般の領域における解を構成する方法 (いずれも具体的な表現は得られず、抽象的と言わざるを得ない) としては以下の二つを紹介しておこう。

<sup>58</sup>例えば円板については、極座標を用いることによって問題を変換すると、領域は  $(0, R) \times (0, 2\pi)$  という 1 次元区間の直積になる。

<sup>59</sup>1 次元区間の直積になっている場合にのみ、さらに変数分離ができて結局 1 次元の固有値問題に帰着されることになり、具体的に解けることになる。

(i) Green 関数を構成して、それを用いて解を構成する。

(ii) 作用素の 1 パラメーター半群理論を用いる。

(i) はかなり面倒な議論を必要とするが、一度 Green 関数を構成してしまうと、それを利用して解の性質の詳しい解析ができる。日本語で読める Green 関数の構成法の説明としては伊藤 [7] がある<sup>60</sup> (読みやすくはないので、強くは勧めない)。Green 関数を用いて解の性質を引き出す議論については、伊藤 [6] が大いに参考になる (こちらは興味がある人には推奨できる)。

(ii) も決して簡単ではないが、熱方程式以外への応用も広範にあるので、学ぶに値する理論である。ただし、解の性質を詳しく解析する目的にはあまり向かない (と思う)。少し関数解析についてトレーニングを積んでから取り組むのがよい。短時間で読める解説 (証明がついていないわけではない) として藤田 [62] がある。その他にブレジス [67] などが勧められる。

## 2.16 補足: Fourier 級数の問題

Fourier 級数については、「実解析 1」で学んだはずであるが、「微分方程式 2」で使うため、少し復習しよう。かなりの部分、自分で実際に計算することで納得できるので、学習しやすいはずである。

問題 1. 次の定積分の値を求めよ。ただし  $i$  は虚数単位で、 $n \in \mathbf{Z}$  とする。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \, dx.$$

問題 2. 以下の等式を証明せよ。

$$\begin{aligned}\cos a \cos b &= \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)), \\ \sin a \sin b &= -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b)), \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b)).\end{aligned}$$

(右辺から左辺を導くのは簡単だが、必要に応じて左辺から右辺を導けるようにしておくこと。)

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}, \\ \sin A - \sin B &= 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}, \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}, \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}.\end{aligned}$$

<sup>60</sup>この本では熱方程式を一般化した拡散方程式の Green 関数を構成してある。なお、この本では Green 関数のことを基本解と呼んでいる。

問題 3.

(1)  $X := C([a, b]; \mathbf{R})$  に対して、

$$(f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (f, g \in X)$$

は内積の公理<sup>61</sup>を満たすことを示せ。

(2)  $Y := C([a, b]; \mathbf{C})$  に対して、

$$(f, g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx \quad (f, g \in Y)$$

は内積の公理<sup>62</sup>を満たすことを示せ。ただし  $\overline{g(x)}$  は  $g(x)$  の共役複素数を表すとする。

問題 4. 線型空間  $X$  とその上で定義された内積  $(\cdot, \cdot)$  があるとき、Schwarz の不等式

$$(\heartsuit) \quad \forall f, g \in X \quad |(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g)$$

が成り立つことを示せ。(ノルム  $\|\cdot\|$  を  $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$  で定義すると、 $(\heartsuit)$  は  $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$  と書き直せる。こちらの形の方に慣れている人が多いかもしれない。)

問題 5. 内積

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

について、関数系

$$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

が直交系<sup>63</sup>であることを示し、正規化せよ。

(おまけ) 区間の幅を半分にして

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{\pi} f(x)g(x) dx$$

という内積で考えた場合はどうか。

問題 6. 内積

$$(f, g) := \int_0^{\pi} f(x)g(x) dx$$

について、次の二つの関数系が直交系であることを示し、正規化せよ。

$$(1) \{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \quad (2) \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

<sup>61</sup>(i)  $(f, f) \geq 0$ , 等号  $\Leftrightarrow f = 0$ , (ii)  $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \lambda_1 (f_1, g) + \lambda_2 (f_2, g)$ , (iii)  $(g, f) = (f, g)$ .

<sup>62</sup>(1) と同様だが、(iii) だけ (iii)  $(g, f) = \overline{(f, g)}$  に置き換える。

<sup>63</sup> $\mathcal{F}$  が直交系であるとは、 $\forall f, g \in \mathcal{F}$  に対して  $f \neq g \implies (f, g) = 0$  が成り立つことをいう。

問題 7. 内積

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

について、関数系

$$\{e^{inx}; n \in \mathbf{Z}\}$$

が直交系であることを示し、正規化せよ。ただし  $i$  は虚数単位である。

問題 8.  $\mathbb{K} = \mathbf{R}$  or  $\mathbf{C}$  とする。 $X$  は  $\mathbb{K}$  上の線型空間で、内積  $(\cdot, \cdot)$  を持つとする。 $f = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$

( $c_j \in \mathbb{K}$ ,  $\varphi_j \in X$ ) が成り立っていると仮定する。

(1)  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$  が正規直交系であるとき、 $c_j = (f, \varphi_j)$ であることを示せ。

(2)  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$  が直交系であるとき、 $c_j$  を  $f$  と  $\varphi_j$  を用いて表せ。

問題 9. 関数系  $\{1, x, x^2, x^3\}$  からグラム・シュミットの直交化法により、内積  $(f, g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$  に関する正規直交系を作れ。(計算が面倒だと思ったらやらなくて良いです。こんなことも出来るんだ、という例を示したいだけなので。)

問題 10. Fourier 級数の定義を述べよ。(周期は  $2\pi$  として良い。)

問題 11. 周期  $2\pi$  の関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  の Fourier 級数が、 $\forall x \in \mathbf{R}$  で収束して  $f(x)$  に等しくなるための十分条件を少なくとも一つ述べよ。(授業で 2,3 個習ったのでは? と思います。)

問題 12. 以下の関数  $f$  を区間  $[-\pi, \pi]$  で Fourier 級数展開せよ (必要ならば  $[-\pi, \pi]$  の外で適当に拡張して、周期  $2\pi$  の関数と考えて Fourier 級数展開せよ)。

(1)  $f(x) = x$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ).

(2)  $f(x) = x^2$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ). (一般に  $x^k$  はどうか? )

(3)  $f(x) = |x|$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ).

(4)  $f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$

(5)  $f(x) = \cos^2 x$ .

(6)  $f(x) = \sin^3 x$ .

問題 13. (1)  $\cos^6 \theta$  を周期  $2\pi$  の周期関数として Fourier 級数展開せよ。(2)  $\cos 6\theta$  を  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  の多項式として表せ (答は一通りではない、一つ見つければ十分)。

計算を簡単に済ませるためのヒント  $\cos^n \theta$  を  $\cos k\theta, \sin k\theta$  で表すには、

$$\left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n$$

を展開するのが便利である。

$\cos k\theta$  を  $\cos \theta, \sin \theta$  の多項式で表すには、

$$\cos k\theta = \operatorname{Re} [(\cos \theta + i \sin \theta)^k]$$

を使うのが便利である。

問題 14. ( $2\pi$  以外の周期の場合)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が周期  $2L$  の関数で、適度の滑らかさ (例えば  $C^1$  級) を持っているとする。

$$F(X) = f(x), \quad x = \frac{LX}{\pi} \quad (X \in \mathbf{R})$$

とおくと、 $F$  が周期  $2\pi$  の関数になることを利用して、次の式が成り立つことを示せ。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

ただし

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

問題 15.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) < \infty$  を満たす  $\{a_n\}, \{b_n\}$  に対して

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t) \sin n\pi x \quad (x \in [0, 1], t \geq 0)$$

とおくとき、

$$E_k(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 u_t(x, t)^2 dx, \quad E_p(t) := \frac{1}{2} \int_0^1 u_x(x, t)^2 dx, \quad \mathcal{E}(t) := E_k(t) + E_p(t)$$

を  $a_n$  と  $b_n$  を用いてなるべく簡単な式で表し、 $\mathcal{E}$  が定数関数であることを示せ。

問題 16.  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  を周期  $2\pi$  の連続関数として、次のようにおく。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1)  $f$  が偶関数ならば  $b_n = 0$ ,  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$  となることを示せ。(2)  $f$  が奇関数ならば  $a_n = 0$ ,  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$  となることを示せ。



問題 17. 関数

$$f(x) = 1 \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

を Fourier 正弦級数で表せ。

問題 18. 関数

$$f(x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

を Fourier 余弦級数で表せ (実はこれより前の問題に「答」がある)。

問題 19.

(1)  $f: [0, L] \rightarrow \mathbf{C}$  が連続かつ区分的に  $C^1$  級ならば、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (x \in [0, L]), \quad a_n := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

(2)  $f: [0, L] \rightarrow \mathbf{C}$  が連続かつ区分的に  $C^1$  級で、 $f(0) = f(L) = 0$  を満たすならば、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (x \in [0, L]) \quad b_n := \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n \in \mathbf{N})$$

が成り立つことを示せ。

(実は (1), (2) とともに一様収束する。)

問題 20. (1) 周期  $2\pi$  の連続関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  の Fourier 係数  $\{a_n\}, \{b_n\}$ , 自然数  $k$  について、

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|) < \infty$$

が成り立てば、 $f$  は  $C^k$  級であることを示せ。

(2) 周期  $2\pi$  の連続関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が自然数  $k$  に対して  $C^k$  級であれば、 $f$  の Fourier 係数  $\{a_n\}, \{b_n\}$  について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k |a_n| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k |b_n| = 0$$

であることを示せ ( $k=0$  の場合は有名な **Riemann-Lebesgue** の定理になる — これは既知として良い)。

問題 21.  $f, g$  は周期  $2\pi$  の関数で、 $(-\pi, \pi]$  の範囲では

$$f(x) = |x| \quad (-\pi < x \leq \pi), \quad g(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \\ 0 & (x = 0, \pi) \end{cases}$$

で与えられているとすると、以下の (1), (2) に答えよ。

(1)  $f, g$  を Fourier 級数展開せよ。(2)  $f, g$  の Fourier 級数はもとの関数に収束するか (各点収束、一様収束、二乗平均収束、それぞれについて)、理由をつけて答えよ。

ただし、関数列  $\{h_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が  $h$  に二乗平均収束するとは、次の等式が成り立つことをいう：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |h_n(x) - h(x)|^2 dx = 0.$$

(余談 超関数論を用いると、 $g$  は  $f$  の導関数であり、さらに  $g$  の導関数  $h$  も考えることができる。それはデルタ超関数  $\delta$  を用いて、 $h(x) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(x - n\pi)$  と表せる。超関数の世界では、一般に導関数の Fourier 級数は、もとの関数の Fourier 級数を項別に微分したものになっている。 $f, g, h$  の Fourier 級数の部分和のグラフをコンピューターを用いて描いてみるのは面白い。 $f$  の Fourier 級数は一様収束することが見て分かる (一様に絶対収束する)。 $g$  の Fourier 級数は各点収束するが、不連続点の近傍では Gibbs の現象が現われる。 $h$  の Fourier 級数は普通の意味では収束しないが、その部分和は ( $x = 0$  の近傍では)  $\delta$  関数に収束することが見て取れる。)

問題 22. 内積  $(\cdot, \cdot)$  を持つ「内積空間」  $X$  において、 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が正規直交系である (i.e.  $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$ ) とするとき、以下の問に答えよ。

(1)  $x \in X$ ,  $N \in \mathbf{N}$  に対して  $e_N := x - \sum_{i=1}^N (x, \varphi_i) \varphi_i$  とおくとき、

$$\|e_N\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^N |(x, \varphi_i)|^2$$

が成り立つ。ただし  $y \in X$  に対して  $\|y\| := \sqrt{(y, y)}$  と定義する (一見難しいようだけれど、ただの式の計算による証明なので、実は簡単)。

これからすぐに、Bessel の不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, \varphi_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

が証明できる。

(2) (これは省略しても良い。)  $X$  が完備ならば  $\sum_{n=1}^{\infty} (x, \varphi_n) \varphi_n$  は収束することを示せ。

(3) 特に  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  が周期  $2\pi$  の連続関数であるとき、

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

が成り立つことを示せ。ただし  $c_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-inx} dx$  とする。

問題 23. 次の (1), (2), (3) に答えよ。

(1) 内積  $(\cdot, \cdot)$  を持つ Hilbert 空間  $X$  の正規直交系  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  があるとき、 $\forall f \in X$  に対して

$$\|f\|^2 = \left\| f - \sum_{i=1}^n (f, \varphi_i) \varphi_i \right\|^2 + \sum_{i=1}^n |(f, \varphi_i)|^2, \quad \text{ただし } \|y\| = \sqrt{(y, y)}$$

が成り立つことを示せ。これから  $\left\| f - \sum_{i=1}^n (f, \varphi_i) \varphi_i \right\| \rightarrow 0$  が成り立つとき<sup>64</sup>、Parseval

の等式  $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$  が成り立つ。

(2)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は周期  $2\pi$  の連続関数で、 $f(x) = x^2$  ( $-\pi < x < \pi$ ) を満たすものとする。このとき、 $f$  の Fourier 級数を求め、 $\mathbf{R}$  の各点  $x$  で、その Fourier 級数が収束するか、またその和は  $f(x)$  に等しいか、理由をつけて答えよ。

(3) (2) の結果を用いて、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  の値を求めよ。また Parseval の等式を用いて、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  の値を求めよ。

問題 24. 周期  $2\pi$  の関数  $f$  と数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}, \{b_n\}_{n \geq 1}$  に対して

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

が成り立つならば、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と結論して良いか？ (注: Fourier 係数は一意的か (あるいは Fourier 級数展開は一意的か、と言ってもよい) という意味で大事なことである。これがあると「係数の比較」ができる。)

問題 25.  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  は十分滑らかな関数で、

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{inx}, \quad g(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n e^{inx}$$

をその Fourier 級数展開とする。

(1) (積の Fourier 係数は、Fourier 係数の畳み込み)  $f(x)g(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inx}$  を  $fg$  の Fourier 級数展開とするとき、次の式を示せ。

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k} \quad (n \in \mathbf{Z})$$

<sup>64</sup>これが任意の  $f$  について成り立つとき、 $\{\varphi_n\}$  は完全正規直交系であるという。Parseval の等式は、通常完全正規直交系に関する命題として提示される。

(2) (畳み込みの Fourier 係数は、Fourier 係数の積)

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y) dy$$

とおく。

$$f * g(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n e^{inx}$$

を  $f * g$  の Fourier 級数展開とすると、次の式を示せ。

$$c_n = a_n b_n \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

(この問題で述べた事実は、Fourier 変換では有名だが、Fourier 級数については省略されることが多い。)

問題 26.  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  を周期  $2\pi$  の連続関数として、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbf{Z})$$

とおくとき、

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & (n > 0) \\ \frac{1}{2}a_0 & (n = 0) \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & (n < 0) \end{cases}$$

であることを確かめよ。

## Fourier 級数略解

解答 1.  $\delta_{ij}$  を Kronecker のデルタとすると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 2\pi\delta_{k0}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin \ell x dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = 2\pi\delta_{n0}.$$

(ほとんどの場合は 0 となる。この結果はもちろん地道に計算して確かめてもいいし (自分でやったことがなければぜひとも一度やってみること、なあんだ、となるはず)、三角関数は 1 周期の間で「同じだけ」の山と谷を持つことから明らかである。) ■

解答 2. まず三角関数の加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

を書けるようにすること (そのまま覚えるか、 $\alpha + \beta$  の場合だけ覚えて  $\beta$  を  $-\beta$  で置き換えるとか、Euler の公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を覚えて指数法則  $e^{x+y} = e^x e^y$  を  $x = i\alpha$ ,  $y = i\beta$  としして導くか)。そこから後は式を眺めて解けるはず。 ■

解答 3. (略)

解答 4.  $\mathbf{R}$  上の線形空間であれば、 $\forall t \in \mathbf{R}$  に対して

$$0 \leq \|tf + g\|^2 = (tf + g, tf + g) = t^2(f, f) + 2t(f, g) + (g, g)$$

が成り立つことからすぐ分る ( $f \neq 0$  であれば、2 次式の判別式  $D$  について  $0 \geq D/4 = (f, g)^2 - (f, f)(g, g)$  が成り立つので移項すれば良い)  $\mathbf{C}$  上の線形空間である場合は、 $\phi := \arg(f, g)$  としして、 $t = \rho e^{-i\phi}$  ( $\rho \in \mathbf{R}$ ) を考えれば良い。 ■

解答 5. (この問題は一度ゆっくり落ち着いて考えること) 三角関数の加法定理から導かれる

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

より、 $\forall m, n \in \mathbf{Z}$  に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} (2\pi\delta_{m-n,0} - 2\pi\delta_{m+n,0}) = \pi (\delta_{m,n} - \delta_{m+n,0})$$

であるが、 $m, n \in \mathbf{N}$  であれば  $m+n \neq 0$  であることに注意すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi\delta_{m,n}.$$

同様に

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

より

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} (2\pi\delta_{m+n,0} + 2\pi\delta_{m-n,0}) = \pi (\delta_{m+n,0} + \delta_{m,n})$$

であるが、 $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ ,  $m \neq n$  であれば、 $m-n \neq 0$ ,  $m+n \neq 0$  ( $m, n \geq 0$  かつ、どちらか一方は正なので  $m+n \geq 1$  であることに注意) であるから、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0.$$

$m = n = 0$  の場合は  $\delta_{m+n,0} = \delta_{m,n} = 1$  であるから、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi(1+1) = 2\pi.$$

$m = n \neq 0$  の場合は  $\delta_{m+n,0} = 0, \delta_{m,n} = 1$  であるから、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi(0+1) = \pi.$$

また

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2} [\sin(n+m)x - \sin(n-m)x]$$

より

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$$

以上より直交系であることは分った。正規化すると

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \right\}_{m=1}^{\infty} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}_{n=1}^{\infty}. \blacksquare$$

解答 6. (省略)

解答 7. 任意の  $n, m \in \mathbf{Z}$  に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} \, dx = 2\pi \delta_{n-m,0} = 2\pi \delta_{n,m}.$$

これから確かに直交系であり、正規化すると

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad (n \in \mathbf{Z}). \blacksquare$$

解答 8. (2)  $m \in \{1, \dots, n\}$  とする。  $j \neq m$  ならば  $(\varphi_j, \varphi_m) = 0$  であることに注意すると

$$(f, \varphi_m) = \left( \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j, \varphi_m \right) = \sum_{j=1}^n c_j (\varphi_j, \varphi_m) = c_m (\varphi_m, \varphi_m).$$

ゆえに  $c_m = \frac{(f, \varphi_m)}{(\varphi_m, \varphi_m)}$ . ゆえに (書き換える必要はないかもしれないが)  $c_j = \frac{(f, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}$ .  $\blacksquare$

解答 9. (結果のみ) 実は定数倍を除き Legendre の多項式  $P_n(x)$  に一致する:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{Rodrigues の公式}).$$

以上を知らなくても、 $1, x, x^2, \dots, x^4$  から始めて、グラム・シュミットの直交化法で直交系を求めると

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

正規化すると

$$\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1), \quad \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x). \blacksquare$$

解答 10.  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  は周期  $2\pi$  の関数で、 $[-\pi, \pi]$  で積分可能と仮定する。

$$(\sharp) \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots), \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で  $\{a_n\}, \{b_n\}$  を定めるとき、

$$(b) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbf{R})$$

という級数を  $f$  の Fourier 級数と呼ぶ。 $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  は  $f$  の Fourier 係数と呼ぶ。多くの場合、 $f$  の Fourier 級数の和は  $f$  に一致する、すなわち

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \in \mathbf{R})$$

が成り立つ。これを  $f$  の Fourier 級数展開と呼ぶ。(普通は  $f$  が  $[-\pi, \pi]$  で積分可能な場合に考えるが、 $(\sharp)$  を超関数的な意味で考えて拡張することも出来る。)

解答 11. 何か一つだけ覚えるならば、「周期  $2\pi$  の周期関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  が連続で区分的に  $C^1$  級ならば、 $f$  の Fourier 級数は、 $\mathbf{R}$  で一様に  $f$  に一様収束する。」という定理を覚えることを勧める。仮定が覚えにくければ少し簡単化して「 $f$  が  $C^1$  級ならば」としても良い。一様収束するとは、式で書けば

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| f(x) - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \right| = 0$$

が成り立つ、ということである。これから  $\mathbf{R}$  で各点収束すること、つまり

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) = f(x)$$

が成り立つことが導かれる。詳しくは付録の B.2.7 (p. 197), D (p. 210) を見よ。

解答 12. (1)  $f$  は奇関数だから  $a_n = 0$  で、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \left[ -x \cdot \frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\pi \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} [\sin nx]_0^{\pi} \right) = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

ゆえに Fourier 級数展開は

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

(2)  $f$  は偶関数ゆえ  $b_n = 0$ . そして  $n \neq 0$  に対して、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \left[ x^2 \cdot \frac{1}{n} \sin nx \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \frac{1}{n} \sin nx \, dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx = -\frac{2}{n} \times (-1)^{n-1} \frac{2}{n} = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

ゆえに Fourier 級数展開は

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

(3)  $f$  は偶関数ゆえ  $b_n = 0$ . そして  $n \neq 0$  に対して、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left( \left[ x \cdot \frac{1}{n} \sin nx \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n} \sin nx \, dx \right) \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} \left[ \frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1], \\ a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi. \end{aligned}$$

ゆえに Fourier 級数展開は

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx.$$

(4)  $f$  は奇関数ゆえ  $a_n = 0$ . そして

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n} = \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi}.$$

ゆえに Fourier 級数展開は

$$\operatorname{sign} x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx.$$

(5) 2 倍角の公式  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  より

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

(6) 3 倍角の公式  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$  より

$$\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$$



解答 13. (1) パスカルの三角形を書くなどして

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

これから

$$\begin{aligned}\cos^6 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^6 = \frac{1}{2^6} (e^{6i\theta} + 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} + 20 + 15e^{-2i\theta} + 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}) \\ &= \frac{1}{2^6} (2 \cos 6\theta + 2 \cdot 6 \cos 4\theta + 2 \cdot 15 \cos 2\theta + 20) \\ &= \frac{1}{32} \cos 6\theta + \frac{3}{16} \cos 4\theta + \frac{15}{32} \cos 2\theta + \frac{5}{16}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos 6\theta &= \operatorname{Re} (\cos 6\theta + i \sin 6\theta) = \operatorname{Re} [(\cos \theta + i \sin \theta)^6] \\ &= \operatorname{Re} [\cos^6 \theta + 5i \cos^5 \theta \sin \theta + 15i^2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 20i^3 \cos^3 \theta \sin^3 \theta + 15i^4 \cos^2 \theta \sin^4 \theta \\ &\quad + 6i^5 \cos \theta \sin^5 \theta + i^6 \sin^6 \theta] \\ &= \cos^6 \theta - 15 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 15 \cos^2 \theta \sin^4 \theta - \sin^6 \theta. \blacksquare\end{aligned}$$

解答 14.

$$\begin{aligned}F(X) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nX + b_n \sin nX), \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(X) \cos nX \, dX, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(X) \sin nX \, dX\end{aligned}$$

が成り立つ。  $X = \frac{\pi x}{L}$  に注意して、

$$f(x) = F(X) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nX + b_n \sin nX) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right).$$

$dX = \frac{\pi}{L} dx$ ,  $X = \pm\pi$  のとき  $x = \pm L$  であるから

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \frac{\pi}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

$b_n$  についても同様である。 ■

解答 15. (結果のみ)

$$\begin{aligned}E_k(t) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 (-a_n \sin n\pi t + b_n \cos n\pi t)^2, \quad E_p(t) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)^2, \\ \mathcal{E}(t) &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 (a_n^2 + b_n^2). \blacksquare\end{aligned}$$

(注:  $u = u(x, t)$  は、授業で紹介した、区間  $(0, 1)$  における波動方程式の初期値境界値問題

$$(WE) \quad u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad (x \in (0, 1), t > 0),$$

$$(DBC) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t > 0),$$

$$(IC) \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in [0, 1])$$

の解で<sup>65</sup>、 $\mathcal{E}(t)$  はエネルギーである。)

解答 16. 一般に連続関数  $g: [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$  が奇関数ならば、

$$\int_{-a}^a g(x) dx = 0$$

であることは簡単に証明できる。また、「偶関数  $\times$  偶関数 = 偶関数」, 「奇関数  $\times$  奇関数 = 偶関数」, 「奇関数  $\times$  偶関数 = 奇関数」という性質も証明できる。■

解答 17. これは公式に従って計算するだけ。

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \sin nx \, dx = \frac{-2}{n\pi} [\cos nx]_0^\pi = \frac{-2}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \frac{4}{n\pi} & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

であるから

$$1 = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \cdots \right). \blacksquare$$

解答 18.  $f$  を偶関数拡張すると、問題 12 の (3) ( $x \mapsto |x|$ ) に他ならないから、当然 Fourier 級数もそれと等しい。■

解答 19. 問題 14 の式で偶関数、奇関数の場合を考える。■

解答 20. (1)  $f$  の Fourier 級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を  $\ell$  回 ( $1 \leq \ell \leq k$ ) 項別微分して作った級数

$$(2.16.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^\ell (a_n \cos (nx + \ell\pi/2) + b_n \sin (nx + \ell\pi/2))$$

について

$$|\text{第 } n \text{ 項}| \leq n^\ell (|a_n| + |b_n|) \leq n^k (|a_n| + |b_n|)$$

---

<sup>65</sup>ただし  $\{a_n\}, \{b_n\}$  は次式で定めるとする:  $a_n = 2 \int_0^1 \phi(x) \sin n\pi x \, dx$ ,  $b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \psi(x) \sin n\pi x \, dx$ .

であり、仮定より  $\sum_n n^k(|a_n| + |b_n|) < \infty$  であるから、Weierstrass の M 判定法が適用でき、(2.16.1) は一様収束することが分かる。ゆえに  $f$  の Fourier 級数展開は  $k$  回まで項別微分が出来る。特に

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k (a_n \cos(nx + k\pi/2) + b_n \sin(nx + k\pi/2))$$

は一様収束しているので連続関数である。ゆえに  $f$  は  $C^k$  級である。

(2) (部分積分すればよい。) ■

解答 21. (1)  $f, g$  の Fourier 級数 (それぞれ  $S_f, S_g$  と書くことにする) は問題 12 で求めている。

$$S_f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right),$$

$$S_g(x) = \operatorname{sign} x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right).$$

( $f$  の Fourier 級数を項別微分すると  $g$  の Fourier 級数になっていることが分る。)

(2)  $f$  は連続で区分的に  $C^1$  級であるから、 $f$  の Fourier 級数  $S_f$  は  $f$  に  $\mathbf{R}$  上で一様収束する。ゆえに  $\mathbf{R}$  上で各点収束し、 $(-\pi, \pi)$  で二乗平均収束する。一方、 $g$  は区分的に  $C^1$  級であるから、 $g$  の Fourier 級数  $S_g$  は  $\forall x \in \mathbf{R}$  に対して、 $x$  が連続点ならば  $g(x)$  に収束し、 $x$  が不連続点ならば  $(g(x+0) + g(x-0))/2$  に収束する。 $g$  は  $x = n\pi$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) で不連続であるが、 $(g(x+0) + g(x-0))/2 = g(x)$  が成り立っているので、結局 Fourier 級数  $S_g$  は  $g$  に各点収束する。ところで  $g$  は  $x = n\pi$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) で不連続であるから、Gibbs の現象が起こり、 $S_g$  は  $\mathbf{R}$  上で一様には  $g$  に収束しない。 $g$  は  $(-\pi, \pi]$  の範囲では  $L^2(-\pi, \pi)$  に属するので、Fourier 級数  $S_g$  は  $g$  に二乗平均収束する。 ■

解答 22. (図を描いて考えることを強く奨める。イメージとしては、「直角三角形では斜辺が一番長い」という“当たり前”の事実になる。証明がサボれるわけではないが、見通しは良い。)

(1) 簡単に  $e_N \perp \varphi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) であることが分かるので、ピタゴラスの定理から、

$$\|e_N\|^2 + \sum_{i=1}^N |(x, \varphi_i)|^2 = \|x\|^2.$$

もちろん  $\|e_N\|^2 \geq 0$  であるから、

$$\sum_{i=1}^N |(x, \varphi_i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

右辺は  $N$  によらないので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, \varphi_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

(2) (省略)

(3) 内積  $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$  について、

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

は正規直交系になり、また

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f, \varphi_n)$$

が成り立つ。これらから明らか。■

解答 23. (1) 前問の (1) と同じである。

(2)  $f$  の Fourier 級数は 12 で求めている。

$$S_f(x) = \frac{\pi^3}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

$f$  は  $\mathbf{R}$  全体で連続で区分的に  $C^1$  級であるから、 $f$  の Fourier 級数  $S_f$  は  $f$  に  $\mathbf{R}$  上一様収束し、 $f$  に一致する。

(3)  $f(\pi) = S_f(\pi)$  であるから、 $\cos n\pi = (-1)^n$  に注意して

$$\pi^2 = f(\pi) = S_f(\pi) = \frac{\pi^3}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \frac{\pi^3}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

これから  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . 一方

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |x^2|^2 dx = 2 \int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{5} \pi^5.$$

正規直交系として、

$$\varphi_0, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \dots$$

が取れる。ただし

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \quad (n \in \mathbf{N}), \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx.$$

Fourier 係数は

$$(f, \varphi_0) = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi^{5/2}, \quad (f, \varphi_n) = \frac{4(-1)^n \sqrt{\pi}}{n^2} \quad (n \in \mathbf{N}), \quad (f, \psi_n) = 0.$$

Parseval の等式から

$$\frac{2}{5} \pi^5 = \|f\|^2 = \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \pi^{5/2} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4(-1)^n \sqrt{\pi}}{n^2} \right)^2 = \frac{2}{9} \pi^5 + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

これから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \blacksquare$$

解答 24. 級数の収束の意味を決めないと議論ができない。簡単のため、例えば級数が  $\mathbf{R}$  上で一様収束することを仮定すると、有界な関数  $\cos \ell x$  をかけた

$$f(x) \cos \ell x = \frac{a_0}{2} \cos \ell x + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos \ell x$$

も  $\mathbf{R}$  上一様収束することになり、 $[-\pi, \pi]$  で項別積分が出来て、

$$a_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \ell x \, dx$$

が示せる。 $b_\ell$  についても同様である。あるいは超関数論を知っていれば、級数を超関数の意味で考えて、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

が示せる (ただしこの場合は、 $\int$  は普通の積分ではない)。■

解答 25. 仮定から Fourier 級数展開は一様収束するのみならず絶対収束する。このことに注意すると、級数の和の取り方に融通が効く。(略) ■

解答 26. これは紙の上にペンを走らせれば簡単に分る。■

## 2.17 練習問題

(この節はリニューアルする予定です — 2012/11/15)

(以下の問題には直接解答をつけていないが、「微分方程式 2 過去問帳」<sup>66</sup> に類似した問題が多数あるので、そちらを参照すること。)

問題 1. 熱方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)) \\ u(x, 0) &= f(x) \quad (x \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$

の形式解を Fourier 変換を用いて求めよ。(ヒント: 波動方程式の初期値問題の解法を参照せよ。 $\hat{u}(\xi, t)$  を求めるのは簡単である。ただしこれを逆 Fourier 変換して  $u(x, t)$  を求めるのは少し難しい。付録 E.2 例 E.2.2(p. 220) に書いてあるが、この部分は印刷配布しないので、悪しからず。)

<sup>66</sup><https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/pde-2010/pde-kimatsu.pdf>

問題 2.  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  は連続関数で、 $f \geq 0$  (on  $[0, 1]$ ) を満たすとするとき、初期値境界値問題

$$(2.17.1) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty))$$

$$(2.17.2) \quad u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty))$$

$$(2.17.3) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

の古典解  $u$  ( $u$  は  $[0, 1] \times [0, \infty)$  で連続、 $u_x$  は  $(0, 1] \times (0, \infty)$  で存在し連続、 $u_t, u_{xx}$  は  $(0, 1) \times (0, \infty)$  で存在し連続、そして  $u$  は方程式 (2.17.1), (2.17.2), (2.17.3) を満たす) について考える。

正定数  $\varepsilon$  を固定して  $w(x, t) := e^{-t}(u(x, t) + \varepsilon a(x, t))$ ,  $a(x, t) := 1 - x(1 - x) + 2t$  とおく。

任意の正数  $T > 0$  を固定し、 $Q_T := [0, 1] \times [0, T]$  とおき、 $Q_T$  における  $w$  の最小値を  $m = u(x_0, t_0)$  ( $(x_0, t_0) \in Q_T$ ) とする。 $m \geq 0$  を背理法で示すために、 $m < 0$  と仮定する。このとき以下の問 (i), (ii), (iii) に答えよ ((iii) まです矛盾が生じて背理法が完成する。)

(i)  $w_t + w = w_{xx}$  (in  $Q_T$ ) を確かめ、それを用いて  $(x_0, t_0) \notin (0, 1) \times (0, T]$  であることを示せ。

(ii) 任意の  $t$  に対して  $w_x(1, t) > 0$  であることを確かめ、 $x_0 \neq 1$  であることを示せ。

(iii)  $x_0 \neq 0$  であること、 $t_0 \neq 0$  であることを示せ。

(注意: この結果から古典解の一意性が分かる。また、Neumann 境界条件  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$  の場合も同様に扱える。)

問題 3.  $q$  を実定数とするとき、初期値境界値問題

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + qu(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty))$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty))$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

について、正值性の保存  $f \geq 0 \implies u \geq 0$  は成り立つか? 理由をつけて答えよ。

(ヒント: 結果は「成り立つ」。変数変換  $v(x, t) = u(x, t)e^{-qt}$  を使うのが簡単。)

問題 4. (固有値問題の練習用) 定数  $c$  に対して

$$\zeta''(x) - c\zeta'(x) + \zeta(x) = 0 \quad (x \in (0, 1)), \quad \zeta(0) = \zeta(1) = 0, \quad \zeta \not\equiv 0$$

を満たす関数  $\zeta = \zeta(x)$  が存在するための条件を求めよ。

問題 5. 初期値  $f$  が次の関数の時、(H-IBP) の解を求めよ。

$$(1) f(x) = \sin \pi x. \quad (2) f(x) = \sin^3 \pi x. \quad (3) f(x) = x(1-x). \quad (4) f(x) = \begin{cases} x & (x \in [0, 1/2]) \\ 1-x & (x \in [1/2, 1]) \end{cases}.$$

ヒント  $f$  の Fourier 級数展開を求めれば、後は簡単。Fourier 係数をその定義に基づいて計算して得てもよいが、何らかの方法で  $\sin n\pi x$  で展開する式が得られれば、それが Fourier 級数に他ならない (「Fourier 級数の一意性」)。

- (1)  $f$  は自分自身の Fourier 級数展開になっている。
- (2) 高校で習ったような三角関数の変形で  $f$  の Fourier 級数展開が求まる。
- (3) 積分を計算することで、 $f$  を Fourier (正弦) 級数展開する。その結果を書いておく。

$$x(1-x) = \frac{8}{\pi^3} \left( \frac{\sin \pi x}{1^3} + \frac{\sin 3\pi x}{3^3} + \cdots + \frac{\sin(2k-1)\pi x}{(2k-1)^3} + \cdots \right).$$

- (4) これも積分計算により  $f$  を Fourier (正弦) 級数展開する。その結果を書いておく。

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{\sin \pi x}{1^2} - \frac{\sin 3\pi x}{3^2} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{\sin(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2} + \cdots \right).$$

問題 6. (H-IBP) の条件  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  ( $t > 0$ ) を次の各条件に入れ替えた場合の解を Fourier の方法で求めよ。

- (1)  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$  ( $t > 0$ ).
- (2)  $u(0, t) = u_x(1, t) = 0$  ( $t > 0$ ).
- (3)  $u(0, t) = u(1, t)$ ,  $u_x(0, t) = u_x(1, t)$  ( $t > 0$ ).
- (4)  $u_x(0, t) = u(0, t)$ ,  $u_x(1, t) = -u(1, t)$  ( $t > 0$ ). ただし簡単のため初期条件の関数  $f$  は  $f(x) \equiv 1$  とする。
- (5)  $u(0, t) = A$ ,  $u(1, t) = B$  ( $t > 0$ ). ただし  $A, B$  は与えられた定数。
- (6)  $u(0, t) = A$ ,  $u_x(1, t) = B$  ( $t > 0$ ). ただし  $A, B$  は与えられた定数。
- (7)  $u_x(0, t) = A$ ,  $u_x(1, t) = B$  ( $t > 0$ ). ただし  $A, B$  は与えられた定数。

ヒントその他 (1) は同次 Neumann 境界条件で、(2.10.3) に結果が書いてある。(2) の解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n-1/2)^2 \pi^2 t} \sin[(n-1/2)\pi x], \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin[(n-1/2)\pi x] dx.$$

- (3) について:  $\zeta(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$  が境界条件を満たすための条件が

$$(\#) \quad \begin{pmatrix} e^{\sqrt{\lambda}} - 1 & e^{\sqrt{\lambda}} - 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} - 1 & -e^{\sqrt{\lambda}} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、 $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$  となる解を持つための条件が (行列式 = 0 から得られる)  $e^{\sqrt{\lambda}} = 1$  で、このとき (#) は

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。これがどういうことか、良く考えること。以下スキップして、固有値と固有関数を書いておくと、

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 0, \quad \zeta_0(x) = 1, \\ \lambda_{2n-1} &= \lambda_{2n} = -4n^2\pi^2, \quad \zeta_{2n-1}(x) = \sin 2n\pi x, \quad \zeta_{2n}(x) = \cos 2n\pi x \quad (n = 1, 2, \dots)\end{aligned}$$

となる (重複固有値! )。

(4) の結果だけを書いておくと、

$$u(x, t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec \alpha_n}{3 + 4\alpha_n^2} e^{-4\alpha_n^2 t} \cos(2\alpha_n(x - 1/2)),$$

ただし、 $\sec = \frac{1}{\cos}$ ,  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  は方程式

$$\alpha \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

の正の解全体である ( $y = \tan x$  と  $y = \frac{1}{2x}$  の交点を考えよ)<sup>67</sup>。(5) 以降は線型非同次であるから、直接 Fourier の方法は使えない。(5), (6) は特解を探せばよい。(7) は難しいが、(2.10.4), (2.10.5) に書いてある。

**問題 7.** 講義の内容、前問の結果等を利用して以下の問に答えよ。(ヒント: Fourier の方法を用いても解けるが、変数変換して既に解決した問題に帰着する。)

(1) (H-IBP) の条件  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  ( $t > 0$ ) を  $u_x(0, t) = u(1, t) = 0$  ( $t > 0$ ) で置き換えた問題の解を求めよ。

(2) 区間  $[0, L]$  における針金の熱伝導の問題

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) & (x \in (0, L), t > 0), \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 & (t > 0), \\ u(x, 0) &= f(x) & (x \in [0, L])\end{aligned}$$

の解を求めよ。

(ヒント: (1) は現象を  $1/2$  について折り返せば (具体的には、 $\xi = x - \frac{1}{2}$  と変数変換する)、前問の (2) になってしまうことに注意。(2) も同様に変数変換を考える。)

**問題 8.**  $k \in \mathbf{R}$ ,  $f: [0, 1] \times \mathbf{R}$  が与えられたとき、次の初期値境界値問題を解け。

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + ku(x, t) & ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)) \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & (t \in (0, \infty)) \\ u(x, 0) &= f(x) & (x \in [0, 1])\end{aligned}$$

<sup>67</sup>G. D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Third Edition, Oxford University Press (1992) の Example 2.3 から採った。



(ヒント: Fourier の方法でも解ける。変数変換  $v(x, t) = u(x, t)e^{-kt}$  を使っても良い。2.14 に書いてある。)

境界条件を  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$  や  $u(0, t) = u_x(1, t) = 0$  に変えるとどうなるか? またその場合の解の漸近挙動は?

#### 問題 9. 初期値境界値問題

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) & ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)) \\ u_x(0, t) &= A, \quad u_x(1, t) = B & (t \in (0, \infty)) \\ u(x, 0) &= f(x) & (x \in [0, 1]) \end{aligned}$$

について以下の問に答えよ。(1)  $A = B$  の場合、 $t \rightarrow \infty$  の時の漸近挙動を求めよ。(2)  $A < B$  の場合、 $t \rightarrow \infty$  の時の漸近挙動を求めよ。

(ヒント: 境界条件が線型同次ではないので、直接 Fourier の方法では解けない。特解を探してみる。余裕があれば、境界条件を  $u_x(0, t) = 1$ ,  $u_x(1, t) = 2$  に変えたときに漸近挙動はどうなるか、考えてみよ。)

問題 10.  $G(x, y, t) := 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \sin n\pi y$  ( $x, y \in [0, 1]$ ,  $t > 0$ ) とおく。以下の問に答えよ。

- (1) 適当な仮定の下で、 $\frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(x, y) dy = \int_a^x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dy + \varphi(x, x)$  が成り立つことを示せ。
- (2) 熱方程式の初期値境界値問題 (H-IBP) の解の公式を書き、それが次式で定義される  $v_f$  と一致することを確かめよ。

$$v_f(x, t) := \begin{cases} \int_0^1 G(x, y, t) f(y) dy & (x \in [0, 1], t > 0) \\ f(x) & (x \in [0, 1], t = 0). \end{cases}$$

- (3)  $F(0, t) = F(1, t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) を満たす  $C^1$  級の関数  $F = F(x, t)$  に対して、

$$u(x, t) := \int_0^t \left( \int_0^1 G(x, y, t-s) F(y, s) dy \right) ds$$

とおくとき、 $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + F(x, t)$  が成り立つことを示せ。

## 第3章 Laplace 方程式、Poisson 方程式

### 3.1 イントロ

#### 3.1.1 紋切り型

$\mathbf{R}^n$  の領域  $\Omega$  の上で定義された実数値関数  $u = u(x)$  についての微分方程式

$$(3.1.1) \quad -\Delta u = f$$

( $f$  は  $\Omega$  上定義された既知関数) を <sup>ポアソン</sup>Poisson 方程式 (Poisson equation) と呼ぶ。

特に同次方程式、つまり  $f = 0$  の場合を、Laplace 方程式 (Laplace equation) と呼ぶ:

$$(3.1.2) \quad \Delta u = 0.$$

Laplace 方程式の解を調和関数 (harmonic function) と呼ぶ。

この章では、与えられた関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\psi: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(x) \quad (x \in \Omega), \\ u(x) &= \psi(x) \quad (x \in \Gamma) \end{aligned}$$

を満たす関数を求めよ、という Poisson 方程式についての問題 (Dirichlet 境界値問題と呼ばれる — 以下 (DP) と略記する) を考える。ただし  $\Gamma$  は領域  $\Omega$  の境界  $\partial\Omega$  である。

なお  $u$  の滑らかさとしては、 $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  という条件を満たすことを要求する。このような解  $u$  のことを (熱方程式の場合と同様に) 古典解と呼ぶ。

この章の内容の多くは、藤田他 [59] に依るが、更に学びたい場合は、ペトロフスキー [69] (境界値問題の解の存在証明について、Poincaré-Perron の方法や、一重層ポテンシャル・二重層ポテンシャルと積分方程式に基づく方法が載っている)、相川 [1] (最近出版されたポテンシャル論の専門書であるが、入門的な内容も分かりやすく解説されている) がお勧めである。

#### 3.1.2 前章を受けて

(H-IBP) もどきの熱方程式の初期値境界値問題では、解  $u = u(x, t)$  が、 $t \rightarrow \infty$  のとき、定常解  $v = v(x)$  に収束する場合が多かった:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = v(x).$$

定常解  $v = v(x)$  は簡単な関数であることが多かったが、それは空間の次元が 1 ( $x \in \mathbf{R}^1$ ) であるからである。空間の次元が 1 より大きくなると、定常解を調べることも自体が問題となる。

## 3.2 例

以下、簡単な例に引き続き、数学と物理において、Poisson 方程式や Laplace 方程式の現れる例を紹介する<sup>1</sup>。無理に内容を覚える必要はないが、Poisson 方程式や Laplace 方程式がいかに重要か、雰囲気だけでも納得してもらいたい。

### 3.2.1 1 変数関数

$n = 1$  すなわち 1 変数の場合は簡単である。まず

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$$

に注意しよう。これから Poisson 方程式は

$$-u'' = f$$

に他ならず、 $u$  は  $f$  の原始関数の原始関数であることが分かる (従って、Dirichlet 境界値問題は積分を用いて簡単に解くことができる。なお (2.9.1) も参照せよ。)。また、Laplace 方程式は

$$u'' = 0$$

となるので、1 変数の調和関数とは 1 次関数に他ならないことが分かる。

### 3.2.2 $r = |x|$ のみの関数である調和関数

$C^2$  級の関数  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  を用いて

$$u(x) = f(r), \quad r = |x| \quad (x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$$

と表される関数  $u$  について、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j} &= f'(r) r_{x_j} = f'(r) \cdot \frac{x_j}{r} = \frac{f'(r)}{r} x_j, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} &= \frac{r f''(r) - 1 \cdot f'(r)}{r^2} \cdot r_{x_j} \cdot x_j + \frac{f'(r)}{r} \cdot 1 = \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^2} \cdot \frac{x_j^2}{r} + \frac{f'(r)}{r}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\Delta u = \frac{r f''(r) - f'(r)}{r^2} \cdot \frac{r^2}{r} + n \frac{f'(r)}{r} = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r).$$

そこで  $\Delta u = 0$  となるには

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0$$

<sup>1</sup>以前だったら、理系の学生は教養課程で、電磁気学や流体力学をみっちり勉強させられたはずで、数学の講義でわざわざ詳しく言及する必要はなかったはずなのだが、最近はそうもいかないようである。普通の数学の本にはあまり書いてないことかもしれないが、全く知らなくても構わないことだとは言えないと思う。

でなければならない。これを移項して整理すると

$$\frac{f''(r)}{f'(r)} = \frac{1-n}{r}$$

となるから積分して

$$\log f'(r) = (1-n) \log r + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

ゆえに

$$f'(r) = C' r^{1-n} \quad (C' \text{ は任意定数}).$$

もう一度積分して

$$f(r) = \begin{cases} C_1 r^{2-n} + C_2 & (n \neq 2) \\ C_1 \log r + C_2 & (n = 2) \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

こうして

$$u(x) = \begin{cases} \frac{C_1}{|x|^{n-2}} + C_2 & (n \neq 2) \\ C_1 \log |x| + C_2 & (n = 2) \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

### 3.2.3 複素関数論から

(複素関数論の復習になってしまうが、重要なので一通り説明する) 正則関数の実部、虚部は調和関数である。実際、 $\Omega$  が複素平面  $\mathbf{C}$  の領域で、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$  が正則な関数であるとするとき、

$$f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u(x, y), v(x, y) \in \mathbf{R}$$

によって実数値関数  $u$  と  $v$  を定めるとき (ただし  $i$  は虚数単位を表す)、次の (1), (2) が成り立つことは良く知られている。

(1)  $u, v$  は次の **Cauchy-Riemann 方程式 (Cauchy-Riemann equations)** を満たす:

$$(3.2.1) \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

(2)  $u, v$  は  $C^\infty$  級である。

これから

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

であることが以下のようにして分かる。

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y = \frac{\partial}{\partial x} v_y + \frac{\partial}{\partial y} (-v_x) = v_{yx} - v_{xy} = 0, \\ \Delta v &= v_{xx} + v_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y = \frac{\partial}{\partial x} (-u_y) + \frac{\partial}{\partial y} u_x = -u_{yx} + u_{xy} = 0. \end{aligned}$$

### 3.2.4 熱伝導現象の定常状態

要点: 前章で述べた「定常解への収束原理」は多次元空間においても成立する。Poisson 方程式、Laplace 方程式は、熱伝導方程式の定常問題である。

$\mathbf{R}^n$  の領域  $\Omega$  における熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned}w_t(x, t) &= \Delta w(x) && ((x, t) \in \Omega \times (0, \infty)), \\w(x, t) &= \psi(x) && ((x, t) \in \Gamma \times (0, \infty)), \\w(x, 0) &= \varphi(x) && (x \in \overline{\Omega}).\end{aligned}$$

の解  $w = w(x, t)$  は、 $t \rightarrow \infty$  のとき、ある関数  $u = u(x)$  に収束する:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(x, t) = u(x) \quad (x \in \overline{\Omega}).$$

ここで  $u$  は以下の二つの条件から定まることが知られている:

$$\begin{aligned}0 &= \Delta u(x) && (x \in \Omega), \\u(x) &= \psi(x) && (x \in \Gamma).\end{aligned}$$

つまり

**Laplace 方程式は、定常版の熱方程式である**

以上の議論で、最初の熱方程式の代わりに

$$w_t(x, t) = \Delta w(x, t) + f(x)$$

という方程式を考えた場合は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(x, t) = u(x),$$

ただし

$$\begin{aligned}0 &= \Delta u(x) + f(x) && (x \in \Omega), \\u(x) &= \psi(x) && (x \in \Gamma).\end{aligned}$$

すなわち  $w$  は Poisson 方程式の解に収束する。

### 3.2.5 静電ポテンシャル

電磁気学の基礎方程式である Maxwell の方程式 (1.1.1) (p. 18) で、電場と磁場が時間によって変化しない場合を考えると、電場と磁場に相互作用はなく、特に電場  $\vec{E}$  についての方程式は

$$(3.2.2) \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$(3.2.3) \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}.$$

ここで  $\rho$  は電荷密度、 $\varepsilon_0$  は真空の誘電率<sup>2</sup>と呼ばれる正定数である。

(3.2.3) より、 $\vec{E}$  はポテンシャルを持つ<sup>3</sup>。それを  $-\phi$  と書こう：

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi.$$

この  $\phi$  を電位または静電ポテンシャルと呼ぶ。

この式を (3.2.2) に代入すると

$$\text{div}(-\text{grad } \phi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

すなわち

$$(3.2.4) \quad -\Delta\phi = f, \quad f := \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

つまり静電ポテンシャルは Poisson 方程式の解である。特に電荷がない ( $\rho = 0$  となっている) ところでは、静電ポテンシャルは Laplace 方程式  $\Delta\phi = 0$  を満たす。

静電場と同様のことが重力場についても成り立つ。すなわち重力ポテンシャル (重力の位置エネルギー) は、Poisson 方程式を満たす。

### 3.2.6 3次元の流れの場合

3次元の速度場  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$  について、

$$\vec{\omega} := \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

を渦度 (vorticity) と呼ぶ。<sup>うずど</sup>渦度が至るところ  $\vec{0}$  である流れを渦無しであるという：

$$\text{流れが渦無し} \iff \text{rot } \vec{v} = 0.$$

静電ポテンシャルの場合と同様に、ベクトル解析で良く知られた定理から、(少なくとも局所的には<sup>4</sup>)  $\vec{v}$  のポテンシャル  $\varphi$  が存在する：

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi.$$

<sup>2</sup>ちなみに  $\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \doteq 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  $c = \text{真空中の光速} = 299,792,458 \text{ m/s}$ . なお、クーロンの法則に現われる比例定数  $k$  とは、 $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$  という関係にある (だから  $k = c^2/10^7$ )。

<sup>3</sup>「単連結領域で  $\text{rot } \vec{f} = 0$  を満たすベクトル場  $\vec{f}$  はポテンシャルを持つ。すなわち、 $\vec{f} = \text{grad } U$  を満たす関数  $U$  が存在する。」— ベクトル解析の常識。

<sup>4</sup>この議論では、 $\vec{v}$  の定義域を書いていないが、例えば単連結な領域であれば、領域全体でポテンシャルが存在する。そうでない場合は、注目している点  $a$  の単連結な近傍、例えば  $\varepsilon$  近傍  $B(a; \varepsilon)$  においてポテンシャルが存在する。

速度場にポテンシャルが存在する流れのことをポテンシャル流 (potential flow) と呼び、そのポテンシャルを速度ポテンシャルという。

一方、非圧縮流ならば、

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

が成り立つ。

ゆえに、渦無しの非圧縮流については

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

すなわち

$$\Delta \varphi = 0$$

が成り立つ。つまり

渦無しの非圧縮流はポテンシャル流で、速度ポテンシャルは調和関数である

**注意 3.2.1 (2次元の場合)** 2次元の速度場  $\vec{v} = \vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  についても、渦度を

$$\omega = \operatorname{rot} \vec{v} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & u \\ \frac{\partial}{\partial y} & v \end{pmatrix} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

と定義すれば、同様の議論が成立する<sup>5</sup>。さらに、2次元の非圧縮流については

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \left( \Leftrightarrow \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = 0 \right)$$

から、

$$\operatorname{grad} \psi = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v \end{cases}$$

を満たす関数  $\psi$  が存在することが分かる。この  $\psi$  をベクトル場  $\vec{v}$  の流れ関数 (stream function) と呼ぶ<sup>6</sup>。このとき

$$\Delta \psi = \frac{\partial}{\partial x} \psi_x + \frac{\partial}{\partial y} \psi_y = \frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial y} (-u) = \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\omega}.$$

<sup>5</sup> $\vec{v}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$  が 2 次元流であるとは、(i)  $w \equiv 0$  (ii)  $u$  と  $v$  は  $z$  に依存しない、が成り立つことを言う。このとき  $\operatorname{rot} \vec{v} = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$  が成り立つ。

<sup>6</sup>流れ関数の等高線がいわゆる流線 (stream line) である。「流線形」という言葉は聞いたことがあるだろう。

ゆえに渦無しの非圧縮流の流れ関数も調和関数である。実はこの場合、 $\psi$  は  $\varphi$  の共役調和関数なので<sup>7</sup>、

$$f(x + iy) := \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (i \text{ は虚数単位})$$

とおくと、 $f$  は正則関数になる。この  $f$  を複素速度ポテンシャルと呼ぶ。

ある意味で、2次元の渦無しの非圧縮流の理論は、1変数複素関数論そのものであると言える。このあたりのことは今井 [8] で明快に説明されている<sup>8</sup>。この本は複素関数論の副読本として大いに勧められる (個々の正則関数に「流れのイメージ」を持つことが出来る)。■

### 3.3 最大値原理

熱伝導方程式のときと同様に、境界値問題の適切性の三条件のうちの解の一意性と、データに関する連続性は、最大値原理から導かれる。

#### 3.3.1 最大値原理とその系

**定理 3.3.1** (調和関数に関する最大値原理)  $\Omega$  は  $\mathbf{R}^n$  の有界領域で、 $\Gamma$  はその境界であるとする。 $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  が  $\Omega$  で  $\Delta u = 0$  を満たすならば、

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \Gamma} u(x), \quad \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \Gamma} u(x).$$

(くどいかもしれないが、念のために注意しておく、 $\overline{\Omega}$  や  $\Gamma$  はともに  $\mathbf{R}^n$  の有界閉集合なのでコンパクトであり、連続関数  $u$  は  $\overline{\Omega}$ ,  $\Gamma$  で最大値、最小値を持つ。)

証明の前に、いくつかの注意と、定理からすぐ導かれる系を述べておこう。

**注意 3.3.2** (劣調和関数、優調和関数) 実は (以下の証明を注意深く読めば分かるように)  $\Delta u = 0$  の代わりに

$$(3.3.1) \quad \Delta u \geq 0$$

という条件だけから

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \Gamma} u(x)$$

が導かれる。同様に

$$(3.3.2) \quad \Delta u \leq 0$$

という条件から

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \Gamma} u(x)$$

<sup>7</sup>つまり、 $\varphi, \psi$  は  $\varphi_x = \psi_y, \varphi_y = -\psi_x$  (これは Cauchy-Riemann 方程式である!) を満たす調和関数ということ (これは対称な関係ではないことに注意しよう。つまり  $\varphi$  は  $\psi$  の共役調和関数ではない。)

<sup>8</sup>著者は流体力学の大家であるが、数学屋が読んで面白い本を何冊も書いている。



が導かれる。(3.3.1) を満たす  $u$  を劣調和関数、(3.3.2) を満たす  $u$  を優調和関数と呼ぶ<sup>9</sup>。つまり

劣調和関数について最大値原理、優調和関数について最小値原理が成り立つ

ということになる。■

**注意 3.3.3 (1次元の場合)** 上の定理や、上の注意に述べた事実は、1次元の場合には以下のことから直感的にも明らかである。

- $\Delta u \geq 0$  は  $u'' \geq 0$  というこてで、これから  $u$  のグラフは下に凸。
- $\Delta u \leq 0$  は  $u'' \leq 0$  というこてで、これから  $u$  のグラフは上に凸。
- $\Delta u = 0$  は  $u'' = 0$  というこてで、これから  $u$  のグラフは直線。

(ぜひ自分で図を書いて、最大値、最小値が区間の端で達成されることを納得してほしい。) ■

**系 3.3.4 (境界上で定数関数ならば全体で定数関数)**  $\Omega$  は  $\mathbf{R}^n$  の有界領域で、 $\Gamma$  はその境界であるとする。 $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  が  $\Omega$  で  $\Delta u = 0$  を満たし、さらに  $u$  は  $\Gamma$  上定数ならば、 $u$  は  $\overline{\Omega}$  で定数関数である。

証明は (本当に) 簡単なので省略する。

**系 3.3.5 (Poisson 方程式の境界値問題の古典解の一意性)**  $\mathbf{R}^n$  の有界領域  $\Omega$  における Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題の古典解は一意である。すなわち  $u, v$  ともに  $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  の元で、

$$-\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega), \quad u = \psi \quad (\text{on } \Gamma),$$

$$-\Delta v = f \quad (\text{in } \Omega), \quad v = \psi \quad (\text{on } \Gamma),$$

を満たすならば  $u = v$  (on  $\overline{\Omega}$ )。

**証明**  $w := u - v$  とおくと、 $\Delta w = 0$  (in  $\Omega$ ),  $w = 0$  (on  $\Gamma$ ) であるから、前系により  $w = 0$  (on  $\overline{\Omega}$ )。ゆえに  $u = v$  (on  $\overline{\Omega}$ )。■

Laplace 方程式は Poisson 方程式でもあるので、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の古典解の一意性も示せたことになる。

次の命題の証明も簡単である。

<sup>9</sup>本当は滑らかさの低い関数に対して「優調和」、「劣調和」が定義できるが、 $C^2$  級の関数に対しては、ここで説明したような微分不等式で特徴づけられる。

系 3.3.6 (Laplace 方程式の Dirichlet 問題の安定性)  $\Omega$  は  $\mathbf{R}^n$  の有界領域で、 $\Gamma$  はその境界であるとする。 $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  が

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 \quad (x \in \Omega), \\ u(x) &= \psi(x) \quad (x \in \Gamma)\end{aligned}$$

の解であるならば

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{x \in \Gamma} |\psi(x)|.$$

適切性の条件のうちのデータに関する連続性も、次の命題から得られる。

系 3.3.7 (Poisson 方程式の解の境界値に関する連続性)  $\Omega$  は  $\mathbf{R}^n$  の有界領域で、 $\Gamma$  はその境界であるとする。 $u_j \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  ( $j = 1, 2$ ) が

$$\begin{aligned}-\Delta u_j(x) &= f(x) \quad (x \in \Omega), \\ u_j(x) &= \psi_j(x) \quad (x \in \Gamma)\end{aligned}$$

の解である ( $j = 1, 2$ ) ならば

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u_1(x) - u_2(x)| = \max_{x \in \Gamma} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|.$$

### 3.3.2 最大値原理の証明

どちらでも同じことだから、最大値について証明する。

$M := \max_{x \in \Gamma} u(x)$  とおいて、

$$u(x) \leq M \quad (x \in \overline{\Omega})$$

を証明すれば良い。

$\Omega$  の一点  $a$  を固定し、

$$\Omega \subset B(a; R)$$

となる  $R > 0$  を取る ( $\Omega$  が有界だから、このような  $R$  が存在する)。

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $v$  を

$$v(x) := u(x) - M + \varepsilon(|x - a|^2 - R^2) \quad (x \in \overline{\Omega})$$

で定める<sup>10</sup>。

主張:  $v(x) \leq 0$  ( $x \in \overline{\Omega}$ ).

<sup>10</sup>この  $v$  のように、それ自身独立してはあまり意味がないが、命題を証明するという技術上の目的のために用いられる関数のことを補助関数と呼ぶことがある。

主張の証明  $\max_{x \in \bar{\Omega}} v(x)$  を達成する  $\hat{x} \in \bar{\Omega}$  を一つ選ぶ。

$v(\hat{x}) \leq 0$  を示せば良いが、これを背理法で証明する。そのため、 $v(\hat{x}) > 0$  と仮定して矛盾を導く。

任意の  $x \in \bar{\Omega}$  に対して  $|x-a| \leq R$  であるから、 $v(x)$  の定義式の右辺第3項  $\varepsilon(|x-a|^2 - R^2) \leq 0$  であることを注意しておく。

$M$  の定義から、 $\forall x \in \Gamma$  に対して  $u(x) - M \leq 0$  であるから、 $v(x) \leq 0$  である。ゆえに  $\hat{x} \notin \Gamma$ , すなわち  $\hat{x} \in \Omega$  でなければならない。

内点  $\hat{x}$  で  $v$  が極大になることから

$$\Delta v(\hat{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(\hat{x}) \leq 0$$

のはずであるが<sup>11</sup>、実際に計算してみると、

$$\begin{aligned} \Delta v &= \Delta u + \varepsilon \Delta(|x-a|^2) = 0 + \varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} [(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2] \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^n 2 = 2n\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

となるので矛盾が生じる。ゆえに  $v(\hat{x}) \leq 0$  でなければならない。(主張の証明終り)

主張した不等式を移項すると

$$u(x) \leq M - \varepsilon(|x-a|^2 - R^2) \quad (x \in \bar{\Omega}).$$

これが任意の正数  $\varepsilon$  について成り立つから、 $\varepsilon \downarrow 0$  として

$$u(x) \leq M \quad (x \in \bar{\Omega}). \quad \blacksquare$$

## 3.4 円板領域における Laplace 方程式の Dirichlet 問題

ここでは Fourier の方法で解が求められる円板領域の場合を解説する。

### 3.4.1 Fourier の方法による Fourier 級数解

$\Omega$  が  $\mathbf{R}^2$  の単位円板  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$  であるとき、極座標

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

によって変数変換する。つまり

$$U(r, \theta) := u(r \cos \theta, r \sin \theta), \quad \Psi(\theta) := \psi(\cos \theta, \sin \theta)$$

---

<sup>11</sup>各  $j$  について  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(\hat{x}) \leq 0$  となるから。

とにおいて、 $U, \Psi$  について考えると、

$$(3.4.1) \quad U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} = 0 \quad ((r, \theta) \in (0, 1) \times [0, 2\pi))$$

$$(3.4.2) \quad U(1, \theta) = \Psi(\theta) \quad (\theta \in [0, 2\pi))$$

という問題に変換される。

この問題を Fourier の方法で解こう。

$$U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

とにおいて、(3.4.1) に代入すると、

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0.$$

移項して

$$\left(R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)\right)\Theta(\theta) = -\frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta).$$

ゆえに

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

いつもと同様にこの式の値は  $r, \theta$  によらない定数であることが分かるから、それを  $\lambda$  とおくと、

$$(3.4.3) \quad r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0,$$

$$(3.4.4) \quad \Theta'' + \lambda \Theta = 0.$$

$\Theta$  は周期  $2\pi$  の周期関数であることに注意すると、 $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ,  $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$  となるので、(3.4.4) から

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_n = n^2, \\ \Theta(\theta) = \Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

ここで  $A_n, B_n$  は任意定数である。

一方、 $R$  についての方程式 (3.4.3) は、後述する Euler の方程式 (3.4.2) の特別な場合 ( $p = 1$ ,  $q = -\lambda = -n^2$ ) で、

$$(3.4.5) \quad R(r) = R_n(r) = \begin{cases} C + D \log r & (n = 0) \\ Cr^n + Dr^{-n} & (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

が一般解である ( $C, D$  は任意定数)。しかし、 $R = R(r)$  は  $r = 0$  で連続でなければならないから、 $D = 0$  であり、

$$R(r) = R_n(r) = \begin{cases} C & (n = 0) \\ Cr^n & (n \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

ゆえに、(3.4.1) の変数分離解として

$$U_n(r, \theta) = \begin{cases} a_0 & (n = 0) \\ r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) & (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

が得られた。これから (3.4.1) の解として

$$(3.4.6) \quad U(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

が得られる。

(3.4.2) が成り立つように、 $\{a_n\}, \{b_n\}$  が選べれば良いが、(3.4.6) を (3.4.2) に代入すると、

$$\Psi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

この式は  $\Psi$  の Fourier 級数展開の式そのものであるから、

$$(3.4.7) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \cos n\theta d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(3.4.8) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \sin n\theta d\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおけば ( $\Psi$  の滑らかさに関する適当な仮定 — 例えば  $\Psi$  が  $C^1$  級 — の下で) 満たされる。

まとめておくと、「円板領域における Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題 (3.4.1), (3.4.2) の解は、(3.4.6), (3.4.7), (3.4.8) で与えられる (であろう)」。

例 3.4.1  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$  とするとき、Dirichlet 境界値問題

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega) \\ u(x, y) &= y^2 \quad (\text{on } \Gamma) \end{aligned}$$

を解く。上の記号を使うと

$$\Psi(\theta) = y^2 = \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

であるから、

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} r^2 \cos 2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)$$

ゆえに

$$u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (x^2 - y^2) = \frac{1}{2} (1 - x^2 + y^2). \quad \blacksquare$$

注意 3.4.2 (上の例で結果が多項式で書けることについて) 上の例で結果を  $x, y$  の多項式で表すことができたが、これは全くの偶然というわけではない。実は調和関数は実解析的であり、 $x, y$  の巾級数で表現できる (上の例では境界値が簡単だったので、解が有限べき級数 = 多項式になったのである)。これは  $r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta$  がそれぞれ

$$\operatorname{Re}(re^{i\theta})^n = \operatorname{Re}(x + iy)^n, \quad \operatorname{Im}(re^{i\theta})^n = \operatorname{Im}(x + iy)^n \quad (\text{ただし } i \text{ は虚数単位})$$

に等しいことから納得できるであろう。実際、上の例では三角関数の倍角の公式を使って計算したが、

$$r^2 \cos 2\theta = \operatorname{Re} (x + iy)^2 = x^2 - y^2.$$

のようにも計算できる。■

### 3.4.2 後始末: Euler の方程式

方程式

$$t^2 x'' + p t x' + q x = 0 \quad (p, q \text{ は定数})$$

を Euler の方程式と呼ぶ<sup>12</sup>。

$t = e^s$  と変数変換すると

$$(3.4.9) \quad \frac{d^2 x}{ds^2} + (p-1) \frac{dx}{ds} + q x = 0$$

という定数係数線型常微分方程式に変換できる。ゆえに特性方程式

$$\rho^2 + (p-1)\rho + q = 0$$

の 2 根を  $\rho_1, \rho_2$  とすると、(3.4.9) の一般解は

$$x = \begin{cases} c_1 e^{\rho_1 s} + c_2 e^{\rho_2 s} & (\rho_1 \neq \rho_2) \\ c_1 e^{\rho_1 s} + c_2 s e^{\rho_1 s} & (\rho_1 = \rho_2). \end{cases}$$

これから

$$x = \begin{cases} c_1 t^{\rho_1} + c_2 t^{\rho_2} & (\rho_1 \neq \rho_2) \\ c_1 t^{\rho_1} + c_2 t^{\rho_1} \log t & (\rho_1 = \rho_2). \end{cases}$$

### 3.4.3 解であることの確かめ、Poisson 積分

$$(3.4.10) \quad A(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

とおく。なお、この級数  $A(r, \theta)$  は Fourier 級数論において、 $\Psi$  の Fourier 級数の **Abel 和** と呼ばれている。

$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = A(r, \theta)$  が解の候補となったわけだが、境界値が滑らかな場合は確かにそうなる。

<sup>12</sup>この Euler の方程式を含む微分方程式の重要なクラスに、確定特異点型の方程式と呼ばれるものがある。常微分方程式の本を参照せよ。なお、Euler は多産な数学者であったため、他にも Euler の方程式と呼ばれる方程式がいくつかある。ただ単に Euler の方程式と言って、他の人と話が通じるかどうかは怪しい。

**定理 3.4.3** (境界値が滑らかなら Abel 和が解を与える) 境界値  $\Psi = \Psi(\theta)$  が  $C^1$  級ならば

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = A(r, \theta) \quad (0 \leq r \leq 1, \theta \in [0, 2\pi), A \text{ は (3.4.10) で定義された関数})$$

は (DP) の古典解である。

**証明** 方針のみ示す。

- (i)  $A(r, \theta)$  は  $0 \leq r < 1, \theta \in [0, 2\pi]$  のとき、何回でも項別微分可能であることが示せる (Weierstrass の M 判定法)。ゆえに  $C^\infty$  級で、特に

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) A(r, \theta) = 0.$$

- (ii)  $\Psi$  が  $C^1$  級であることから  $\sum (|a_n| + |b_n|) < \infty$  が導かれ、これが優級数となるので、 $A(r, \theta)$  は  $0 \leq r \leq 1, \theta \in [0, 2\pi)$  で一様収束する。特に連続で、

$$A(1, \theta) = \Psi(\theta) \quad (\theta \in [0, 2\pi)).$$

(この証明の筋は、熱方程式の場合と同様であることが分かるであろう。) ■

実は境界値の連続性を仮定しただけで解の存在が証明できる。

**定理 3.4.4** (連続な境界値に対する解)  $\psi$  が連続ならば

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) := \begin{cases} A(r, \theta) & (0 \leq r < 1, \theta \in [0, 2\pi)) \\ \psi(\cos \theta, \sin \theta) & (r = 1, \theta \in [0, 2\pi)) \end{cases}$$

で定義される  $u$  は (DP) の古典解である。

この定理の証明も熱方程式の場合と同様である。熱方程式に対しては Green 関数を導入することで証明したが、今の場合は、以下に紹介する Poisson 積分を用いて証明できる。これも一通り説明しておこう。

**補題 3.4.5** (Abel 和の Poisson 積分による表現)

$$(3.4.11) \quad P_r(\theta) := \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

とおくと

$$A(r, \theta) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi) \Psi(\phi) d\phi \quad (0 \leq r < 1, \theta \in [0, 2\pi))$$

と書ける。

証明 級数は  $\theta$  に関して一様収束しているので (容易に Weierstrass の M 判定法ができる)、項別積分が可能であるから、

$$\begin{aligned}
 A(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) d\phi \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \cos n\phi d\phi \cos n\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \sin n\phi d\phi \sin n\theta \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta) \right] d\phi \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\phi - \theta) \right] d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) P_r(\theta - \phi) d\phi.
 \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}
 2\pi P_r(\theta) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = 1 + 2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} = 1 + 2\operatorname{Re} \frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \\
 &= 1 + 2\operatorname{Re} \frac{re^{i\theta}(1 - re^{-i\theta})}{|1 - re^{i\theta}|^2} = 1 + \frac{2(r \cos \theta - r^2)}{(1 - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \\
 &= 1 + \frac{2(r \cos \theta - r^2)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = \frac{2(r \cos \theta - r^2) + 1 - 2r \cos \theta + r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \\
 &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

**定義 3.4.6 (Poisson 核、Poisson 積分)** (3.4.11) で定義される関数  $P_r(\theta)$  を単位円板の **Poisson 核 (Poisson kernel)**、Poisson 核と  $\Psi$  との畳み込み (convolution) である積分

$$(3.4.12) \quad P_r * \Psi(\theta) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi) \Psi(\phi) d\phi$$

を **Poisson 積分 (Poisson integral)** と呼ぶ。

つまり  $\Psi$  の Abel 和  $A(r, \theta)$  は、 $\Psi$  の Poisson 積分である：

$$A(r, \theta) = P_r * \Psi(\theta) \quad (r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi)).$$

**注意 3.4.7** Fourier 級数で書けているのに、あえて書き直す理由は何か？

- (1) 実は Poisson 積分は、空間の次元  $n$  が 3 以上の場合に一般化できるという利点がある。(これに対して、Fourier 級数による解法を一般化するのは難しい。 $n = 3$  の場合にこれに相当するのは、球面調和関数を用いた解法であろうが、相当面倒である。) 高次元への拡張は次のようになる。



**命題 3.4.8** (高次元の球における **Poisson 積分**)  $n$  次元の開球  $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n; |x|^2 < R^2\}$  の境界を  $\Gamma_R$  と書くとき、 $\psi \in C(\Gamma_R)$  に対して、ディリクレ問題

$$\Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad u = \psi \quad (\text{on } \Gamma)$$

の解  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  はただ一つ存在して、Poisson の積分表示式

$$u(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|R} \int_{\Gamma_R} \frac{R^2 - |x|^2}{(R^2 - 2x \cdot y + |x|^2)^{n/2}} \psi(y) d\sigma_y.$$

で与えられる。ただし  $|S^{n-1}|$  は  $\mathbf{R}^n$  の単位球の表面積で、 $x \cdot y$  は  $x$  と  $y$  の Euclid 内積、 $d\sigma$  は  $\Gamma_R$  上の面積要素を表すとする。

(証明は例えば熊ノ郷 [24] 第 5 章を見よ。)

- (2) 熱伝導方程式に対する Green 関数でもそうであるが、無限級数よりも、単一の関数をかけて積分する形の公式の方が取り扱いやすい場合が多い。(無限級数では、すぐに項別積分が可能かどうか問題になる — まあ、積分形式で書いても、そう簡単になるわけではないのだが…) ■

**練習問題** 半径  $R$  の円盤における Dirichlet 問題の解の公式はどうなるか? Fourier 級数を使った形と Poisson 積分を使った形の両方を求めよ。確認用に Poisson 積分の場合を書いておくと

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\phi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi)} d\phi \quad (r \in [0, R), \theta \in [0, 2\pi]).$$

Poisson 核の性質について準備しよう。

**補題 3.4.9 (Poisson 核の性質)** (1)  $P_r(\theta) > 0$ .

$$(2) \int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta = 1.$$

$$(3) P_r(-\theta) = P_r(\theta + 2\pi) = P_r(\theta).$$

$$(4) \text{ 任意の } \delta \in (0, \pi) \text{ に対して、} \delta \leq |\theta| \leq \pi \text{ を満たす } \theta \text{ に関して一様に } \lim_{r \uparrow 1} P_r(\theta) = 0.$$

**証明**

(1)  $1 - r^2 > 0$ ,  $1 - 2r \cos \theta + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1 - r)^2 > 0$  であるから。

(2) 級数は項別積分できるから、

$$\int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} d\theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta \right) = \frac{1}{2\pi} \left( 2\pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} 0 \right) = 1.$$

(3)  $\cos$  は周期  $2\pi$  の偶関数であるから。

(4)  $P_r(\theta)$  は変数  $\theta$  の偶関数であるから、 $\theta > 0$  だけ考えれば十分である。 $\delta \leq \theta \leq \pi$  で  $\cos$  が減少関数だから  $\cos \theta \leq \cos \delta$ . ゆえに

$$1 - 2r \cos \theta + r^2 \geq 1 - 2r \cos \delta + r^2 > 0.$$

割り算して

$$0 < \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2}.$$

すなわち

$$0 < P_r(\theta) \leq P_r(\delta).$$

$r \uparrow 1$  とすると、右辺  $\rightarrow 0$  は明らかだから (分母  $\rightarrow 1 - 2 \cos \delta + 1 = 2(1 - \cos \delta) \neq 0$  に注意)、 $\theta$  につき一様に

$$\lim_{r \uparrow 1} P_r(\theta) = 0. \blacksquare$$

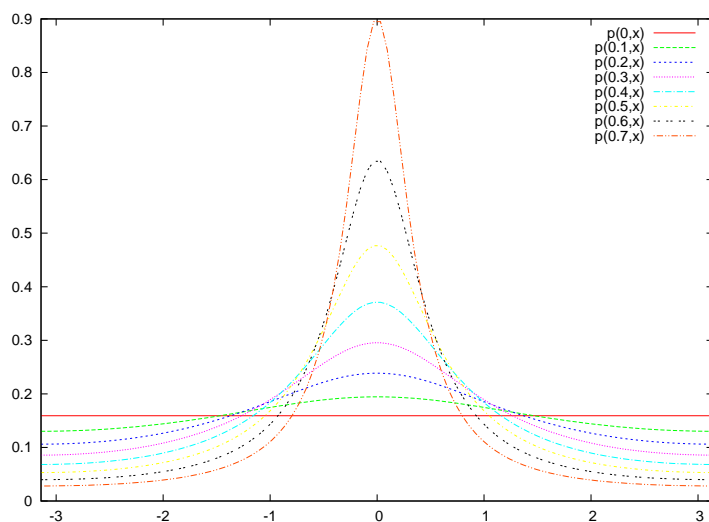


図 3.1:  $r = 0, 0.1, \dots, 0.7$  に対して  $P_r$  のグラフを  $[-\pi, \pi]$  の範囲で描く

(デルタ超関数に収束していくことが信じられそう? )

**補題 3.4.10 (連続関数の Poisson 積分)** 周期  $2\pi$  の周期関数  $\Psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が連続ならば、(3.4.10) で定義される  $\Psi$  の Abel 和  $A(r, \theta)$  について、

$$\lim_{r \uparrow 1} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |A(r, \theta) - \Psi(\theta)| = 0.$$

つまり  $r \uparrow 1$  のとき、 $\theta \in [0, 2\pi]$  につき一様に Abel 和  $A(r, \theta)$  は  $\Psi(\theta)$  に収束する。

証明  $\Psi$  は一様連続であるから、 $\forall \varepsilon > 0$  に対して、十分小さな  $\delta > 0$  を取ると、

$$|\theta - \tau| < \delta \implies |\Psi(\theta) - \Psi(\tau)| < \varepsilon.$$

そこで

$$A(r, \theta) - \Psi(\theta) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi)(\Psi(\phi) - \Psi(\theta)) d\phi = \int_{|\theta - \phi| \leq \pi} P_r(\theta - \phi)(\Psi(\phi) - \Psi(\theta)) d\phi$$

より

$$\begin{aligned} |A(r, \theta) - \Psi(\theta)| &\leq \int_{\delta \leq |\theta - \phi| \leq \pi} P_r(\theta - \phi) |\Psi(\phi) - \Psi(\theta)| d\phi + \int_{|\theta - \phi| < \delta} P_r(\theta - \phi) |\Psi(\phi) - \Psi(\theta)| d\phi \\ &\leq 2 \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\Psi(\theta)| \int_{\delta \leq |\theta - \phi| \leq \pi} P_r(\theta - \phi) d\phi + \varepsilon \int_{|\theta - \phi| < \delta} P_r(\theta - \phi) d\phi \\ &\leq 2 \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\Psi(\theta)| \cdot 2\pi \max_{\delta \leq |\tau| \leq \pi} P_r(\tau) + \varepsilon = 4\pi \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |\Psi(\theta)| \max_{\delta \leq |\tau| \leq \pi} P_r(\tau) + \varepsilon. \end{aligned}$$

右辺第 1 項は補題 3.4.9 の (4) から  $r \uparrow 1$  のとき  $\theta$  につき一様に 0 に収束する。■

定理 3.4.4 の証明  $A$  が  $[0, 1) \times T$ ,  $T = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  において  $C^\infty$  級で、

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) A(r, \theta) = 0$$

が成り立つことは、定理 3.4.3 の証明と同様である。ゆえに  $u$  は  $B(0; 1)$  で  $C^\infty$  級で  $\Delta u = 0$ .  $u$  の定義から  $u$  が境界条件

$$u(\cos \theta, \sin \theta) = \psi(\cos \theta, \sin \theta) \quad (\theta \in T)$$

を満たすことは明らか。問題は  $u$  が  $\partial B(0; 1)$  上の任意の点、つまり  $(\cos \theta, \sin \theta)$  ( $\theta \in T$ ) で連続であることを証明することであるが、

$$\begin{aligned} |u(\cos \theta, \sin \theta) - u(r \cos \theta', r \sin \theta')| &\leq |u(\cos \theta, \sin \theta) - u(\cos \theta', \sin \theta')| \\ &\quad + |u(\cos \theta', \sin \theta') - u(r \cos \theta', r \sin \theta')| \\ &\leq |\psi(\cos \theta, \sin \theta) - \psi(\cos \theta', \sin \theta')| \\ &\quad + \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |A(r, \theta) - \Psi(\theta)| \end{aligned}$$

において、 $(r, \theta') \rightarrow (1, \theta)$  とするとき、右辺第 1 項は  $\psi$  の連続性から、右辺第 2 項は補題 3.4.10 から、いずれも 0 に収束することが分かる。■

### 3.4.4 円の外部領域、円環領域における解の公式

円板と同様に、円の外部領域、円環領域では Fourier の方法で解が求められる。

Euler 方程式の一般解には  $\log r$  や  $r^{-n}$  など、 $r = 0$  で非有界な項があったが、円板領域の問題では、これらは不適なものとして除かれた。円の外部領域や、円環領域は  $r = 0$  を含まないために、これらが解の公式の中に登場する。

円の外部領域  $\Omega$  を単位円の外部領域  $\{x \in \mathbf{R}^2; |x| > 1\}$  とするとき、 $\Omega$  における Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega) \\ u &= \psi \quad (\text{on } \Gamma)\end{aligned}$$

の解のうち、有界なものはただ一つ存在し<sup>13</sup>、円板領域のときと同じ方針で解くことが出来る。それは極座標で、

$$U(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

ただし

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \cos n\theta \, d\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) \sin n\theta \, d\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots)\end{aligned}$$

と表される。(この場合は、 $r \rightarrow \infty$  のときに非有界にならないように、 $r^n$  を含む項が除かれている。)

円環領域  $\Omega$  を円環領域  $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2; R_1 < |x| < R_2\}$ ,  $\Gamma_1 = \{x \in \mathbf{R}^2; |x| = R_1\}$ ,  $\Gamma_2 = \{x \in \mathbf{R}^2; |x| = R_2\}$  とおくとき、 $\Omega$  における Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega) \\ u &= \psi_1 \quad (\text{on } \Gamma_1) \\ u &= \psi_2 \quad (\text{on } \Gamma_2)\end{aligned}$$

の解  $u$  はただ一つ存在し、それは極座標で、

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2} (a_0 + b_0 \log r) + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\theta]$$

と表される。ただし、係数  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$ ,  $\{d_n\}$  は、

$$a_0 + b_0 \log R_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(\theta) \, d\theta, \quad a_0 + b_0 \log R_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_2(\theta) \, d\theta,$$

$$a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_2(\theta) \cos n\theta \, d\theta \quad (n \in \mathbf{N}),$$

$$c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_1(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_2(\theta) \sin n\theta \, d\theta \quad (n \in \mathbf{N})$$

で定められる。

---

<sup>13</sup>有界という条件をつけないと解の一意性は成り立たない。例えば 0 境界値  $\psi = 0$  に対する解として、 $u \equiv 0$  と  $u(x) = \log |x|$  の二つがある。

## 3.5 調和関数の積分表示、Laplace 作用素の基本解, Gauss の球面平均定理

境界値問題の解の存在について説明する前に、調和関数の積分表示から導かれる調和関数の様々な性質を紹介しよう。

### 3.5.1 Green の公式

まず有名な Gauss の発散定理を思い出そう。

**定理 3.5.1 (Gauss の発散定理)**  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^n$  の有界領域、 $\Gamma = \partial\Omega$  は有限個の  $C^1$  級正則超曲面からなり、 $\vec{n}$  は  $\Gamma$  上の点における  $\Gamma$  の外向き単位法線ベクトルとすると、 $\bar{\Omega}$  の近傍で定義された  $C^1$  級の任意のベクトル場  $\vec{f}$  に対して

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f} \, dx = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

ただし  $d\sigma$  は  $\Gamma$  の面積要素とする。

この定理は正確に記述するのが難しい定理で(ここの記述も“いいかげん”である)、きちんと書かれている本は案外少ない<sup>14</sup>。しかし、以下紹介する重要な命題で、証明にこの定理を用いるのは、領域  $\Omega$  が開球である場合が多いので、あまり気にする必要はないだろう。次の命題はこの定理の簡単な書き換えである(この形の方が便利の場合が少なくない)。

**系 3.5.2**  $\Omega$  は Gauss の発散定理が成り立つような  $\mathbf{R}^n$  の有界領域で、 $\Gamma$  はその境界、 $n_j$  は  $\Gamma$  上の点における  $\Gamma$  の外向き単位法線ベクトルの第  $j$  成分を表すとする。 $\bar{\Omega}$  の近傍で  $C^1$  級の任意の関数  $u$  に対して、

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx = \int_{\Gamma} u n_j \, d\sigma \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つ。ただし  $d\sigma$  は  $\Gamma$  の面積要素とする。

**証明** 第  $j$  成分が  $u$ , それ以外の成分が定数関数 0 であるようなベクトル場を  $\vec{f}$  として(つまり  $\vec{f} = u\vec{e}_j$ )、Gauss の発散定理を適用する。■

Green<sup>15</sup> による有名な公式を紹介しよう。

<sup>14</sup>どちらかというと、証明そのものは単純な計算でそれほど難しくない。

<sup>15</sup>George Green (1793–1841, 英国の Sneinton に生まれ、Sneinton にて没する)。

**定理 3.5.3 (Green の積分公式 (Green's identities))**  $\Omega, \Gamma, \vec{n}, d\sigma$  は、定理 3.5.1 と同じとする。

(1)  $u, v$  が  $\bar{\Omega}$  の近傍でそれぞれ  $C^2$  級,  $C^1$  級ならば

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma - \int_{\Omega} \text{grad } v \cdot \text{grad } u \, dx.$$

(Green's first identity と呼ぶ。直訳すると「Green の第 1 恒等式」だが「Green の第 1 積分公式」という言い方が普通？)

(2)  $u, v$  が  $\bar{\Omega}$  の近傍で  $C^2$  級ならば

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma.$$

(Green's second identity と呼ぶ。)

(3)  $u$  が  $\bar{\Omega}$  の近傍で  $C^2$  級ならば

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma.$$

特に  $u$  が調和関数である場合は  $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0$ .

**証明**

(1)  $\vec{f} = v \text{ grad } u$  に対して

$$\text{div } \vec{f} = \text{grad } v \cdot \text{grad } u + v \Delta u$$

となる (積の微分法)。これに Gauss の発散定理を用いる。

(2) (1) と (1) で  $u$  と  $v$  を入れ換えた式を並べて辺々引き算すればよい。

(3) (1) で  $v \equiv 1$  とおく (あるいは  $\vec{f} = \text{grad } u$  に対して Gauss の発散定理を用いる)。■

後の補題 3.5.7 も “Green's third identity” と呼んで、この仲間に入れることがある。  
この補題の (3) から、Laplace 方程式の Neumann 境界値問題

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad \text{on } \Gamma$$

が解を持つためには、境界値  $\psi$  が  $\int_{\Gamma} \psi \, d\sigma = 0$  を満たすことが必要であることが分かる。

### 3.5.2 Green の third identity

後で Laplacian の基本解と呼ばれることになる関数  $E$  を導入しよう。

定義 3.5.4 ( $-\Delta$  の基本解)  $\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$  上の関数  $E$  を

$$(3.5.1) \quad E(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & (m=2) \\ \frac{1}{m(m-2)\omega_m} |x|^{2-m} & (m \neq 2) \end{cases}$$

で定義する。ただし  $\omega_m$  は  $m$  次元単位球の測度とする:  $\omega_m = \int_{|x| \leq 1} dx$ .

注意 3.5.5 ( $E$  についての細かな注意)

- 本によっては、 $\mathbf{R}^m$  の単位球面  $S^{m-1}$  の曲面積  $|S^{m-1}|$  を用いているものもある。比べる場合、 $m\omega_m$  が表面積になることに注意せよ。 $(\mathbf{R}^m$  の単位球面の曲面積を  $\omega^{m-1}$  と表す本もあって、注意が必要である。まぎれがないという意味では、 $|S^{m-1}|$  を使う方がよいかもしれない。)

$$m\omega_m = |S^{m-1}|, \quad \text{例えば } m=3 \text{ のとき } \omega_3 = \frac{4}{3}\pi, \quad |S^2| = 4\pi.$$

- $m=3$  のときは、よく使うので (念のため) 式を書いておく。

$$E(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}.$$

- グラフを描いてイメージを頭に残そう。 $m \geq 2$  のとき、 $\lim_{x \rightarrow 0} E(x) = +\infty$  である。■

命題 3.5.6 ( $E$  の基本的な性質)  $E$  を (3.5.1) で定義される関数とすると、次の (1), (2) が成り立つ。

- (1)  $E$  は原点を除いて調和関数である:  $\Delta E = 0$  (in  $\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ ).
- (2)  $E$  は原点で特異性があるが、 $E$  自身と  $E$  の 1 階導関数は原点の近傍で可積分である。すなわち

$$\int_{|x| \leq 1} E(x) dx < \infty, \quad \int_{|x| \leq 1} |\text{grad } E(x)| dx < \infty.$$

証明 (1) §3.2.2 “ $r = |x|$  のみの関数である調和関数” で確かめた。

(2) (以下の計算が理解しづらかったら  $m=3$  の場合を具体的に書いてみるとよい。) 定義から

$$E(x) = f(|x|), \quad f(r) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log r & (m=2) \\ \frac{1}{m(m-2)\omega_m} r^{2-m} & (m \neq 2) \end{cases}$$

と書けるわけだが、極座標に変換して計算すると

$$\int_{|x| \leq 1} |E(x)| dx = |S^{m-1}| \int_0^1 |f(r)| r^{m-1} dr = \text{const.} \times \begin{cases} \int_0^1 -r \log r dr & (m=2) \\ \int_0^1 r dr & (m \neq 2) \end{cases} < \infty. \blacksquare$$

次に紹介する補題中の恒等式は、応用上非常に重要であり、英語では “Green’s third identity” と呼ばれる。日本語では定着した呼び名がないようであるが、「これも Green の公式と呼ばれる」という意見があり、ここではそれに従うことにする。この公式 (の  $x \in \Omega$  の場合) は、超関数論で有名な  $-\Delta_y E(y-x) = \delta(y-x)$  に相当する事実 (定理 3.5.10) の証明に利用できるが、逆にその事実を学んだ者にとっては、Green の積分公式 (2)

$$\int_{\Omega} [v(y)\Delta u(y) - u(y)\Delta v(y)] dy = \int_{\Gamma} \left( v(y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - u(y)\frac{\partial v}{\partial n}(y) \right) d\sigma_y$$

に  $v(y) = E(y-x)$  を代入し、 $-\Delta_y E(y-x) = \delta(y-x)$  を用いて変形することで容易に導ける (結局、次の補題の証明をさぼることは出来ないのであるが、超関数論を学ぶと見通しが良くなって、覚える負担がかなり少なくなるということである)。

**補題 3.5.7 (Green の公式 (Green’s third identity))**  $\Gamma$  を  $\mathbf{R}^m$  の滑らかな単純閉曲面、 $\Omega$  を  $\Gamma$  で囲まれる有界領域、 $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$  を  $C^2$  級の関数、 $E$  を定義 3.5.4 で定義した  $\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$  上の関数とすると、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} E(x-y)\Delta u(y) dy + \int_{\Gamma} E(x-y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y)d\sigma_y - \int_{\Gamma} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x-y)d\sigma_y \\ &= \begin{cases} u(x) & (x \in \Omega) \\ \frac{1}{2}u(x) & (x \in \Gamma) \\ 0 & (x \in \mathbf{R}^m \setminus \bar{\Omega}). \end{cases} \end{aligned}$$

ただし  $x \in \Gamma$  の場合、左辺第 3 項の積分は次の主値積分であると解釈する。

$$\text{p.v.} \int_{\Gamma} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x-y)d\sigma_y := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x-y)d\sigma_y, \quad \Gamma_{\varepsilon} = \{y \in \Gamma; |y-x| \geq \varepsilon\}.$$

**証明**  $m=3$  として証明する (そうでない場合も同様である)。

(i)  $x \in \Omega$  の場合  $\varepsilon$  を  $\overline{B(x;\varepsilon)} \subset \Omega$  となるような (十分小さな) 任意の正数として、

$$\Omega_{\varepsilon} := \Omega \setminus \overline{B(x;\varepsilon)}$$

とおき、 $\Omega_{\varepsilon}$  で Green の積分公式 (2) を用いる。

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} (E(x-y)\Delta u(y) - u(y)\Delta_y E(x-y)) dy = \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \left( E(x-y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x-y) \right) d\sigma_y.$$

ここで

$$S_{\varepsilon} := \partial B(x;\varepsilon) = \{y \in \mathbf{R}^3; |y-x| = \varepsilon\}$$

とおき、 $|S_{\varepsilon}|$  で  $S_{\varepsilon}$  の表面積を表すとする。

$\Delta_y E(x-y) = 0$  in  $\Omega_{\varepsilon}$  であり、 $\partial\Omega_{\varepsilon} = \Gamma \cup S_{\varepsilon}$  であるから

$$\begin{aligned} (3.5.2) \quad \int_{\Omega_{\varepsilon}} E(x-y)\Delta u(y) dy &= \int_{\Gamma} \left[ E(x-y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x-y) \right] d\sigma_y \\ &\quad + \int_{S_{\varepsilon}} \left[ E(x-y)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}E(x-y) \right] d\sigma_y. \end{aligned}$$



ここで  $\varepsilon \downarrow 0$  とすることを考える。左辺については (被積分関数が  $\Omega$  で可積分であるから)

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} E(x-y) \Delta u(y) dy = \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) dy.$$

一方 (3.5.2) の右辺のうち、 $\Gamma$  上の面積分は  $\varepsilon$  によらない。 $S_\varepsilon$  上の面積分

$$I_\varepsilon := \int_{S_\varepsilon} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) d\sigma_y, \quad J_\varepsilon := \int_{S_\varepsilon} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) d\sigma_y$$

を考察する。

まず Schwarz の不等式を用いて、 $\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| = |\text{grad } u \cdot n| \leq |\text{grad } u| |n_y| = |\text{grad } u|$  であるから、

$$|I_\varepsilon| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{S_\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial n_y} \right| d\sigma \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sup_{|y-x| \leq \varepsilon} |\text{grad } u| \int_{S_\varepsilon} d\sigma = \varepsilon \sup_{|y-x| \leq \varepsilon} |\text{grad } u| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

一方、 $S_\varepsilon$  上では  $n_y = -(y-x)/|y-x|$ ,  $|y-x| = \varepsilon$  であるので、

$$\frac{\partial}{\partial n_y} = -\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

(あるいは  $\frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) = n_y \cdot \text{grad}_y E(x-y) = -\frac{y-x}{|y-x|} \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{-(y-x)}{|y-x|^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|y-x|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$  とする。)

ゆえに

$$J_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon} u(y) \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} d\sigma_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} u(y) d\sigma_y.$$

この右辺は、 $S_\varepsilon$  における  $u$  の平均値になっているので、

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} J_\varepsilon = u(x).$$

(実際  $|J_\varepsilon - u(x)| \leq \max_{|y-x| \leq \varepsilon} |u(y) - u(x)| \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} d\sigma = \max_{|y-x| \leq \varepsilon} |u(y) - u(x)| \rightarrow 0$ .)

ゆえに (3.5.2) で  $\varepsilon \rightarrow 0$  とした極限として

$$(3.5.3) \quad \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) dy = \int_{\Gamma} \left[ E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) \right] d\sigma_y - u(x)$$

を得る。移項して結論を得る。

(ii)  $x \in \Gamma$  の場合 今度は

$$S_\varepsilon := \{y \in \bar{\Omega}; |y-x| = \varepsilon\}, \quad \Gamma_\varepsilon := \{y \in \Gamma; |y-x| \geq \varepsilon\}$$

とおく。上と同様に Green の公式から

$$(3.5.4) \quad - \int_{\Omega_\varepsilon} E(x-y) \Delta u(y) dy = \int_{\Gamma_\varepsilon \cup S_\varepsilon} \left[ u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) - E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) \right] d\sigma_y.$$

を得るが、今度は

$$J_\varepsilon := \int_{S_\varepsilon} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) d\sigma_y \rightarrow \frac{1}{2} u(x) \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

となる。実際

$$J_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} u(y) dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{|S_\varepsilon|}{2\pi\varepsilon^2} \left( \frac{1}{|S_\varepsilon|} \int_{S_\varepsilon} u(y) dy \right)$$

と書け、

$$\frac{1}{|S_\varepsilon|} \int_{S_\varepsilon} u(y) dy \rightarrow u(x) \quad (\varepsilon \downarrow 0), \quad \frac{|S_\varepsilon|}{2\pi\varepsilon^2} \rightarrow 1 \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

が成り立つから。■

### 3.5.3 調和関数の境界積分表示

補題 3.5.7 の系として、次の定理が導ける。調和関数  $u$  は、境界での  $u$  と  $\frac{\partial u}{\partial n}$  の値だけを用いて表されるというもので、非常に特徴的な結果である (ある意味で Cauchy の積分公式に似ている、向こうと違って関数の値だけでなく、導関数の値も必要になる点は弱いが)。

定理 3.5.8 (調和関数の境界積分表示)  $\Gamma, \Omega, u$  は上の通りで、さらに  $\Delta u = 0$  (in  $\Omega$ ) が成り立っているならば

$$\int_{\Gamma} E(x-y) \frac{\partial u}{\partial n_y}(y) d\sigma_y - \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E(x-y) d\sigma_y = \begin{cases} u(x) & (x \in \Omega) \\ \frac{1}{2}u(x) & (x \in \Gamma) \\ 0 & (x \in \mathbf{R}^m \setminus \bar{\Omega}). \end{cases}$$

ただし  $x \in \Gamma$  の場合、左辺第 2 項の積分は主値積分であると解釈する。

証明  $\Delta u = 0$  を代入するだけ。■

系 3.5.9 (調和関数の実解析性) 任意の領域における調和関数は実解析的である。特に  $C^\infty$  級でもある。

証明 ( $C^\infty$  級であることの証明) 注目する点を中心とする球において、定理 3.5.8 の表現をすると、積分記号下の微分が何回でもできることがわかる。■

### 3.5.4 $E$ は $-\Delta$ の基本解である

次の定理も補題 3.5.7 の系である。

定理 3.5.10 ( $E$  は  $-\Delta$  の基本解である)  $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  とするとき、

$$-\int_{\mathbf{R}^n} E(x-y)\Delta f(y) dy = f(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

特に

$$(3.5.5) \quad -\int_{\mathbf{R}^n} E(y)\Delta f(y) dy = f(0).$$

証明 点  $x$  と、 $f$  の台<sup>16</sup>の両方を含むような開球  $\{y \in \mathbf{R}^n; |y| < R\}$  を  $\Omega$  とすると、 $f$  は  $\Gamma = \partial\Omega = \{y \in \mathbf{R}^n; |y| = R\}$  の近傍で 0 であるから、境界上の積分は消えてしまうので

$$-\int_{\Omega} E(x-y)\Delta f(y) dy = f(x).$$

積分範囲を  $\mathbf{R}^n$  全体としても値が変わらないのは明らかであるから、

$$-\int_{\mathbf{R}^n} E(x-y)\Delta f(y) dy = f(x). \blacksquare$$

超関数論の言葉を使うと (3.5.5) は、

$$-\Delta E = \delta \quad (\delta \text{ は Dirac のデルタ関数})$$

と書くことが出来る。この事実は  $E$  が  $-\Delta$  の基本解 (fundamental solution) であることを意味している。…と言っても、超関数論やデルタ関数を知らない人が多いはずなので、次項で説明を試みる。

### 3.5.5 デルタ関数についての大雑把な説明

デルタ関数は超関数と呼ばれるものの一種であって、数学的に説明するのは本来はたくさんの準備が必要だが、何とか説明を試みる。

物理学では、本当はすごく狭い (例えば電子のような…でも、いくら小さくても点ではない) 領域に何かが分布しているが、1 点に集中していると理想化することが良くある。例えば質点 (有限の質量が体積のない 1 つの点に集中している)、点電荷 (有限の電荷が体積のない 1 つの点に集中している)。

これを取り扱えるようにしたものが、ディラックのデルタ (超) 関数  $\delta$  である。

以下、“なるべく” 数学的な説明を試みる。

何か (質量や電荷を思い浮かべると良い) が原点の近くに分布していて、総量が 1 であるとする。その密度を  $\rho: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  とする。密度の意味 (積分すると量) と、総量が 1 ということから

$$\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x) dx = 1$$

<sup>16</sup> $f$  の台 (しばしば  $\text{supp } f$  と書かれる) とは、集合  $\{y \in \mathbf{R}^n; f(y) \neq 0\}$  の閉包である。 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  とは、 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  が  $C^\infty$  級であり、 $f$  の台が  $\mathbf{R}^n$  のコンパクト集合であることを意味する。

が成り立つ。簡単のため (必ずしもそうでなくても良い<sup>17)</sup>)

$$|x| < 1 \Rightarrow \rho(x) > 0,$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \rho(x) = 0$$

と仮定する。

$\varepsilon > 0$  に対して、

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

とおくと、

$$(3.5.6) \quad \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x) dx = 1,$$

$$|x| > \varepsilon \Rightarrow \rho_\varepsilon(x) = 0$$

が成り立つ ( $y = x/\varepsilon$  とすると  $dy = \varepsilon^{-n} dx$  となることに注意)。

$\varepsilon$  が小さいほど、 $\rho_\varepsilon$  のグラフは細く尖った形になる。全体の量は 1 で変わらない (そうなるように作った)。

気分としては、 $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限は、原点 1 点に集中しているように出来る：

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon(x) \quad (\text{怪しい式}).$$

普通にこの右辺の  $\lim$  を計算すると、

$$(3.5.7) \quad \delta(0) = \infty,$$

$$(3.5.8) \quad \delta(x) = 0 \quad (x \neq 0).$$

(3.5.6) が成り立つから、

$$(3.5.9) \quad \int_{\mathbf{R}^n} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{こうなることを期待する})$$

と言いたいところだが、 $\delta$  が (3.5.7), (3.5.8) を満たす普通の関数であれば、(要するにほとんど到るところ 0 であるから)

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(x) dx = 0 \quad (\text{こうしたくはない!}).$$

何とかうまくことをやって、矛盾なく (3.5.9) が成り立つように超関数の理論が作られ (L. Schwartz, 佐藤幹夫)、 $\delta$  は超関数の代表的な例となる。その議論は結構長くなるので、ここではやらない (一言だけ説明しておく (3.5.9) は積分でないものに置き換えることになる)。

さて、任意の連続関数  $f$  に対して、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \rho_\varepsilon(x) dx = f(0)$$

---

<sup>17</sup>例えば、平均 0 の正規分布の確率密度関数の、分散  $\rightarrow 0$  の極限をとってもほぼ同様のことが出来る。

が成り立つ。実際

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\rho_\varepsilon(x)dx - f(0) &= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\rho_\varepsilon(x)dx - f(0) \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x)dx \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} (f(x) - f(0)) \rho_\varepsilon(x)dx \\ &= \int_{|x|\leq\varepsilon} (f(x) - f(0)) \rho_\varepsilon(x)dx\end{aligned}$$

であるから  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき、

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\rho_\varepsilon(x)dx - f(0) \right| \leq \sup_{|x|\leq\varepsilon} |f(x) - f(0)| \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x)dx = \sup_{|x|\leq\varepsilon} |f(x) - f(0)| \rightarrow 0.$$

これから

$$(3.5.10) \quad \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

が期待出来る。実は Schwartz の理論では、任意の連続関数  $f$  についてこの式が成り立つという条件で、デルタ超関数  $\delta$  を定義する。

前項で導いた

$$-\int_{\mathbf{R}^n} E(x)\Delta f(x)dx = f(0)$$

を形式的に部分積分 (Green の積分公式を適用) した

$$-\int_{\mathbf{R}^n} \Delta E(x)f(x)dx = f(0)$$

より

$$-\Delta E(x) = \delta(x)$$

が得られる、ということになる。

電荷密度  $\rho$  で電荷が分布しているとき、その電荷の作る電場のポテンシャルは、

$$-\Delta u = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

を満たすことが知られている (3.2.5 の (3.2.4))。ゆえに方程式

$$-\Delta E = \delta$$

は、基本解  $E$  が原点に置かれた単位点電荷の作る電場のポテンシャル (の  $\varepsilon_0$  倍) である、ということを示唆している。

電磁気学を学んだ人は、原点に  $Q$  という電荷をおくとき、点  $x$  における電場の電位は

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|x|}$$

であるということを覚えているかもしれない。 $Q = 1$  とすると  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|x|}$  で、 $n = 3$  の場合の

$E(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$  と (比例定数  $1/\varepsilon_0$  を除いて) 一致することが分かるであろう。

### 3.5.6 Gauss の球面平均の定理と調和関数の強最大値原理

次の定理も補題 3.5.7 の系である。

**定理 3.5.11 (Gauss の球面平均の定理)**  $u$  が閉球  $\overline{B(a; R)} = \{x \in \mathbf{R}^m; |x - a| \leq R\}$  において連続、内部で調和であれば、 $u$  の中心における値  $u(a)$  は  $u$  の球面上の平均値に等しい:

$$(3.5.11) \quad u(a) = \frac{1}{|S^{m-1}|R^{m-1}} \int_{|x-a|=R} u(x) d\sigma_x.$$

**証明** 煩雑さを避けるため、 $m \neq 2$  の場合の証明を書くが、 $m = 2$  の場合もまったく同様である。授業では割り切って  $m = 3$  の場合の証明を板書するのが良いかもしれない。

まず  $u$  が、 $\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^m; |x - a| = R\}$  まで込めて  $C^2$  級の場合に証明する。定理 3.5.8 によって、

$$(3.5.12) \quad \int_{\Gamma} E(a-x) \frac{\partial u}{\partial n_x} d\sigma_x - \int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} E(a-x) d\sigma_x = u(a).$$

左辺の第 1 項は 0 である。実際、 $\Gamma$  上では

$$E(a-x) = \frac{1}{(m-2)|S^{m-1}|} \cdot \frac{1}{R^{m-2}}$$

は定数であるから、積分の外にくくり出せて、

$$\int_{\Gamma} E(a-x) \frac{\partial u}{\partial n_x} d\sigma_x = \frac{1}{(m-2)|S^{m-1}|R^{m-2}} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n_x} d\sigma_x = \frac{1}{(m-2)|S^{m-1}|R^{m-2}} \cdot 0 = 0.$$

ここで定理 3.5.3 の (3) を用いた。

次に (3.5.12) の左辺の第 2 項については、

$$\frac{\partial}{\partial n_x} E(a-x) = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{(m-2)|S^{m-1}|} r^{2-m} \right] \Big|_{r=R} = -\frac{1}{|S^{m-1}|R^{m-1}}$$

はやはり定数であるから、積分の外にくくり出せて、

$$-\int_{\Gamma} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} E(a-x) d\sigma_x = \frac{1}{|S^{m-1}|R^{m-1}} \int_{\Gamma} u(x) d\sigma_x.$$

以上をまとめると (3.5.11) が得られる。

$u$  が  $\Gamma$  まで  $C^2$  級でない場合には、 $B(a; R)$  の代りに  $B(a; R-\varepsilon)$  について上の議論を行って

$$u(a) = \frac{1}{|S^{m-1}|R^{m-1}} \int_{|x-a|=R-\varepsilon} u(x) d\sigma_x.$$

を得てから  $\varepsilon \downarrow 0$  とする (両辺に  $u$  の導関数は現れないことに注意)。■

**注意 3.5.12** 球面平均の定理の証明には色々なやり方がある。例えば

- 球における調和関数の境界値問題は具体的に解ける。2次元の場合は原点を中心とする単位球における境界値問題の、Fourier 級数による解の表示を与えたが、それによると、

$$u(0,0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\cos \theta, \sin \theta) d\theta. \blacksquare$$

**定理 3.5.13 (調和関数の強最大値原理)**  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^n$  の有界領域、 $\Gamma$  をその境界とする。 $u$  が  $\bar{\Omega}$  で連続、 $\Omega$  で調和であり、 $\Omega$  の点において  $\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$  に到達するならば、実は  $u$  は定数関数である。

**証明**  $a \in \Omega$ ,  $u(a) = M = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$  とする。 $B(a; r) \subset \Omega$  となる任意の  $r > 0$  に対して、

$$u(x) = M \quad (x \in B(a; r))$$

を以下証明しよう。 $0 < R < r$  なる任意の  $R$  を取る。定理 3.5.11 と仮定  $u \leq M$  によって、

$$M = u(a) = \frac{1}{|S^{n-1}| R^{n-1}} \int_{|x-a|=R} u(x) d\sigma \leq \frac{1}{|S^{n-1}| R^{n-1}} \int_{|x-a|=R} M d\sigma = M.$$

左辺と右辺が等しいので、不等号は等号でなければならない。

$$\frac{1}{|S^{n-1}| R^{n-1}} \int_{|x-a|=R} u(x) d\sigma = \frac{1}{|S^{n-1}| R^{n-1}} \int_{|x-a|=R} M d\sigma.$$

$u$  は連続で、 $u \leq M$  であるから、この等式が成り立つには  $u(x) = M$  ( $|x-a|=R$ ) でなければならない。 $R$  は任意であるから、 $u(x) = M$  ( $x \in B(a; r)$ ) が成り立つ。

後は標準的な連結性の議論を行えば、 $\Omega$  全体で  $u = M$  であることが分かる。■

なお、球面平均の定理はある意味で逆が成り立つ。

**定理 3.5.14 (球面平均の定理の逆)**  $\Omega$  は  $\mathbf{R}^n$  の任意の領域で、 $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  は連続で、 $\Omega$  に含まれる任意の閉球  $\bar{B}(a; R) = \{x \in \mathbf{R}^n; |x-a| \leq R\}$  に対して

$$u(a) = \frac{1}{|S^{n-1}| R^{n-1}} \int_{|x-a|=R} u(x) d\sigma_x$$

が成り立つとする。このとき  $u$  は  $\Omega$  で  $C^\infty$  級で、調和関数である。

**証明** 省略する。例えば藤田他 [59] を見よ。■

**定理 3.5.15 (Harnack の定理 (その 1))**  $\Omega$  は  $\mathbf{R}^N$  の任意の領域、 $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  は  $\Omega$  における調和関数からなる列で、 $\Omega$  で広義一様に収束するとする。このとき極限  $u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  も  $\Omega$  で調和である。

証明  $K := \overline{B(a; R)}$  を  $\Omega$  内の任意の閉球とする。球面平均の定理 (定理 3.5.11) より、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$u_n(a) = \frac{1}{|S^{n-1}|R^{N-1}} \int_{|x-a|=R} u_n(x) d\sigma_x$$

が成り立つ。仮定から  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $u$  に  $K$  において一様収束するから

$$u(a) = \frac{1}{|S^{n-1}|R^{N-1}} \int_{|x-a|=R} u(x) d\sigma_x.$$

球面平均の定理の逆 (定理 3.5.14) から、 $u$  は  $\Omega$  で調和である。■

### 3.5.7 おまけ：デルタ関数と基本解

以下のやりとりは半分は架空、半分は実話 (実際にあった話を脚色した、ということ)。

甲 「超関数論と言っても、ちょっと聞いたことがあるくらいで、よく知らないのですが。」

乙 「関数を拡張した概念で、微積分が自由にできるように考えられたもの、とかいうけれど、んー、短くうまく説明できる自信がないですね…Dirac のデルタ関数は知っているのかな？」

甲 「ええと、原点だけでピョコッと尖っているグラフを見た覚えが…それで

$$\delta(0) = +\infty, \quad \delta(x) = 0 \quad (x \neq 0)$$

というような性質を持つとか聞いた覚えがあります。」

乙 「まあそうだけど、その式だけではデルタ関数を捉えきれてないね。できれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \quad (f \text{ は任意の連続関数})$$

と言って欲しいな。じゃなかったら、せめて  $\delta(0) = +\infty$  に換えて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

を覚えてもらいたい。積分すると 2 とか 3 ではなく、ぴたり 1 となる程度の無限大だということだね。」

甲 「はあ。で、これが超関数とどういう関係があるんでしょう？」

乙 「ああ、デルタ関数は普通の関数じゃないんだよ。」

甲 「無限大なんて値を取るからですか？」

乙 「うーん、どちらかと言うとハズレ。Lebesgue 積分論などで、無限大という値を取る関数を認めたりするけど、デルタ関数はそういうような関数の仲間にもなれない。」

甲 「どこがまずいんでしょう。」

乙 「積分の勉強をしたとき『一点の測度は 0 だから、一点での関数の値を変えても、積分の値には影響がない』とか聞いたことありませんか？」(そういえば自分が教えたときに、ちゃんとそう説明したっけ?)

甲 「そう言えばそんな気がします」(覚えはないがこう言っておこう。)



乙 「そうでしょ。すると、デルタ関数は  $x = 0$  をのぞいて、値は 0 なのだから、その積分は定数関数 0 の積分つまり 0 と変わらないはずなわけ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dx = 0 \quad (D \text{ は原点以外では } 0 \text{ であるような任意の関数})$$

この式の  $D$  にデルタ関数  $\delta$  を代入すると矛盾するでしょ。」

甲 「じゃデルタ関数は存在しない。」

乙 「そう。積分論が展開できるようなまともな関数にはならない。だから超関数。(強引な説明だが、まあ、いいだろう。)」

甲 「そんなものがどうして役に立つのでしょうか？」

乙 「ええと、そうねえ…数学的な説明としてはデルタ関数は<sup>たたみこみ</sup>畳み込みの単位元であるという性質がある。」

甲 「畳み込みって何でしたっけ？」

乙 「Fourier 解析で習ったはずだから知ってるはずだけど。関数  $f, g$  に対して、

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

で定義される  $h$  を  $f$  と  $g$  の畳み込みと言って、 $f * g$  と書く、というやつ。畳み込みでなくて合成積と習ったかも知れない。この式の  $g$  のところにデルタ関数を強引に代入してみると？」

甲 「??？」

乙 「デルタ関数の特徴づけ (積分の変数を  $y$  に書き換えておく)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(y) dy = f(0) \quad (f \text{ は任意の連続関数})$$

の  $f(y)$  の代わりに  $f(x-y)$  になっているので、

$$f * \delta(x) = \text{“関数 } f(x-y) \text{ の } y = 0 \text{ での値”} = f(x).$$

だから  $f * \delta = f$ 。」

甲 「はあ。まだご利益がわかりません。」

乙 「例えば  $-\Delta$  の基本解  $E$  というのは、 $-\Delta E = \delta$  を満たすということをノート本文に書いておいたけど、それから

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x-y)f(y) dy \quad (\text{これは } E \text{ と } f \text{ の畳み込み } E * f \text{ に他ならない})$$

で定義される  $u$  が  $-\Delta u = f$  を満たすことが次のように理解できるようになる。

$$-\Delta u = -\Delta(E * f) = (-\Delta E) * f = \delta * f = f.$$

ここで  $\frac{\partial}{\partial x_j}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} * g$  という公式も使わせてもらったけど。」

甲 「何か強力そうなのは分りました。後で考えてみます。」

乙 「デルタ関数は元々は物理学者が考えたくらいで、物理的な説明というのも難しくはないけど、やってみようか？」

甲 「物理はあまり…」

乙 「あまり気嫌いしないで。例えば電磁気学的にデルタ関数は点電荷として解釈できる。」

甲 「は？ それはずいぶん簡潔な説明ですね。(それじゃわからないよ。)」

乙 「力学でも『質点』とか考えるけど、体積を持たない点が正の質量とか電荷を持つって、よく考えてみると凄い理想化だと思わない？ 密度 (電荷量 / 体積) は無限大になるでしょ？」

甲 「ああ、そういうことですか。本当はとても小さな体積に電荷が分布しているけれど、体積を 0 にした極限を考える (理想化) ということですね。」

乙 「そうそう。つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

は電荷の量は 1. それで

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0)$$

は電荷が原点一点だけに集中している、ということ。そうか、単に点電荷と言うよりも、

デルタ関数は、電荷量 1 の点電荷 (単位点電荷) の電荷密度の数学的表現

と言った方が正確だな。」

甲 「まあデルタ関数の式のイメージはつきました。」

乙 「静電場の説明をしてあるところで、電荷密度  $\rho$  で電荷が分布しているとき、それが作る電場の静電ポテンシャル (静電位)  $\phi$  は

$$-\Delta\phi = \rho$$

を満たすというのを説明したけど<sup>18</sup>、これを  $-\Delta$  の基本解の条件

$$-\Delta E = \delta$$

と見比べると、( $\delta$  は単位点電荷の電荷密度なのだから)

基本解  $E$  は単位点電荷の作る電場の静電ポテンシャルである

ということになります。基本解の『基本』のニュアンスが伝わるでしょう。」

甲 「ははあ。」

乙 「単位点電荷の影響『基本解』が分れば、任意の電荷の影響は数学的にすべて分る、とまとめられるかな。」

---

<sup>18</sup>ノートには誘電率  $\epsilon_0$  という比例定数が書いてあるけど、単位を適当に取り替えて  $\epsilon_0 = 1$  にしたと考えてください。

## 3.6 解の存在証明

### 3.6.1 全般的な注意

領域が円板の場合には、前節で解決することが出来たが、一般の領域に対して解の存在を証明するにはどうしたらよいだろうか？ これは、実は結構むづかしい話であって、ここで詳しい説明は出来ない<sup>19</sup>、しかしここは偏微分方程式の理論の豊かさが感じられるところでもあるので、代表的な手法をごく大雑把に説明しておく。今すぐ無理に理解しようとする必要はない。気軽に聞いて (読んで) もらえれば結構である。

強調しておきたいことは以下の 3 点である。

- 解の存在証明はかなり難しいことが多いが、そこには豊かな数学がある。
- 解の存在証明をしようとする、関数解析の必要性が強く感じられるようになる (無限次元の関数空間で極限の議論が必要になるので)。実際、ある種の方法においては必要不可欠なものになる。関数解析学は現代の偏微分方程式論の基礎である。
- 解の存在証明は抽象的なものになりがちで、解についての具体的な情報や性質を得にくいことが多い。特に工学的な観点からは、数値解法の必要性が高くなって来る。数値解法自体にも色々あるが、そこにも興味深い数学がある。

### 3.6.2 Poisson 方程式の特解

$f$  を  $\mathbf{R}^n$  全体に適当に拡張し、 $E$  を (3.5.1) で定義された Laplacian の基本解として、

$$u_0(x) := \int_{\mathbf{R}^n} E(x-y)f(y) dy$$

とおく。すると実は

$$-\Delta u_0 = f$$

が成り立つ<sup>20</sup>。すなわち  $u_0$  は Poisson 方程式の特解である。ゆえに  $v := u - u_0$  とおくと、 $v$  は Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad (\text{in } \Omega), \\ v &= \psi - u_0 \quad (\text{on } \Gamma) \end{aligned}$$

の解となる。ゆえに、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題が一般に解ければ良いことになる。(つまり、非同次方程式の特解が一つ分かり、同次方程式が一般に解ければ、非同次方程式を常に解くことができる、というよくある論法である。)

<sup>19</sup>この難しさは、多次元空間においては、領域がバラエティーに富んでいるからである。実は、前章で、熱方程式の解説をしたが、熱方程式についても、多次元領域における初期値境界値問題の解の存在を示すのは難しい。前章では、1 次元の空間領域、すなわち开区間  $(0, L)$  でしか解の存在を示していないことに注意しよう。

<sup>20</sup>超関数の世界では明らか。古典的な意味で考えると、証明は結構面倒である。 $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  の場合は藤田 [59] の定理 3.9、(より一般の) Hölder 連続の場合は、神保 [34] の定理 15、あるいは Kellogg [85] を見よ。

余談 3.6.1 このことは物理的に考えると、当たり前に近いようなことである。実際、基本解  $E(x)$  は原点に単位点電荷がある場合の電場のポテンシャルであるから、

- 原点に電荷  $Q$  がある場合の電場のポテンシャルは  $QE(x)$ .
- 点  $y$  に電荷  $Q$  がある場合の電場のポテンシャルは  $QE(x - y)$ .
- 点  $y_1, \dots, y_N$  に電荷  $Q_1, \dots, Q_N$  がある場合の電場のポテンシャルは  $\sum_{j=1}^N Q_j E(x - y_j)$ .
- 空間に電荷が連続的に分布しているとき、その電荷密度を  $f$  とすると、電場のポテンシャルは  $U(x) := \int_{\mathbf{R}^n} E(x - y) f(y) dy$ .

のようになる。従って  $-\Delta U = f$  であることは自然に期待される。 ■

### 3.6.3 Fourier の方法の限界

円板領域、円の外部領域、円環領域などの場合には、Fourier の方法でうまく行った。この他に、長方形領域など、単純な領域における Laplace 方程式の解を構成するのに、Fourier の方法が使える (ただし、かなり難しくなることもある<sup>21</sup>)。また、ちょっと複雑な領域に対しては、まったく適用できない (これが大きな弱点)。

注意 3.6.1 (参考: 球における Fourier の方法) (準備時間切れなので、興味がある人は藤田他 [59] を見て下さい。) ■

注意 3.6.2 (参考: 固有関数展開) 一般の領域においても成立する、Fourier の方法に対応する (と言えなくもない) 理論として、固有関数展開の理論というものがある。これは一般の領域における楕円型作用素の固有関数で、広い範囲の関数が展開できるという内容の理論である。しかし、固有関数の存在証明はそれ自身難しいし、固有関数の具体的な表現は得られないので、もはや境界値問題の解法とは言いにくい。 ■

メモ: この項は少し手を入れたい。材料は、Fourier の方法が適用できるための条件として、重ね合わせで方程式の解を得るために線形同次方程式である必要があるとか、変数分離解がうまく行くために、定義域が直積集合でなければいけないとか (例えば円盤領域の問題では、極座標変換をして、 $[0, 1] \times [0, 2\pi)$  で考えることでうまく行く)、重調和作用素  $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$  ではたとえ長方形領域であっても変数分離できないが、円盤領域ではうまく行くとか。逆に Laplace 作用素が長方形でうまく行くのは  $\Delta = \frac{d^2}{dx^2} \otimes I_y + I_x \otimes \frac{d^2}{dy^2}$  のような構造をしているからかとか。また問題 3.7(p. 183) も参照せよ。

<sup>21</sup>円板でも、Euler の方程式のような方程式を解く必要があつて、そう簡単ではなかった。

### 3.6.4 Dirichlet の原理, 変分法

Riemann (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866) が、後に彼の名前を冠されることになった「Riemann の写像定理」(1851) の証明をするために、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を解く必要が生じた。そのために彼は、次の Dirichlet の原理 (Dirichlet's principle) を用いた。

#### Dirichlet の原理

汎関数

$$J[u] := \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 dx$$

を

$$u = \psi \quad (\text{on } \Gamma)$$

という条件のもとで最小にする関数  $u_0$  を取れば、それは Laplace 方程式の解になる。

ゆえに、 $u_0$  は我々が求める Dirichlet 境界値問題の解に他ならない。

これは、変分法の直接法と呼ばれる論法の一例である (元々、汎関数の最大最小問題を微分方程式に帰着させて解く、というのが変分法の発端だったが、ここでは、その逆に微分方程式の問題を汎関数の最大最小問題に翻訳して、そちらを何らかの方法で直接解いて、その成果として微分方程式の解を得よう、と考えている)。

ここで  $J[u]$  を最小にする  $u = u_0$  が Laplace 方程式を満たすことは簡単に確かめられる。

汎関数  $J$  を最小にする関数は Laplace 方程式を満たすことの確認

$u = u_0$  が  $J$  を最小にすると仮定する。任意の  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $t \in \mathbf{R}$  に対して、 $u_0 + tv$  は

$$u_0 + tv = \psi \quad (\text{on } \Gamma)$$

を満たすので、 $J$  の定義域に属している。 $u_0$  が最小値を与えるという仮定から、

$$J[u_0 + tv] \geq J[u_0].$$

これは  $f(t) := J[u_0 + tv]$  とおくとき、 $f$  が  $t = 0$  で最小値を取る、と言い替えられる。ところが  $f$  は

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{\Omega} \nabla(u_0 + tv) \cdot \nabla(u_0 + tv) dx \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u_0|^2 + 2t \nabla u_0 \cdot \nabla v + t^2 |\nabla v|^2) dx \\ &= J[u_0] + 2t \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx + t^2 J[v] \end{aligned}$$

のような 2 次関数であるから、これが 0 で最小になるには、1 次の係数が 0 である必要がある:

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx = 0.$$

これを部分積分して (あるいは Green の定理を使って)

$$\int_{\Omega} \Delta u_0 v \, dx = 0.$$

$v$  が任意であることから、(変分法の基本補題<sup>22</sup>というのが使えて)

$$\Delta u_0 = 0 \quad (\text{in } \Omega). \quad \blacksquare$$

問題は  $J[u]$  を最小にする関数  $u = u_0$  の存在を示すことである。Riemann は当初、 $J$  は下に有界 (値は 0 以上) だから明らかだと思ったらしいが、決してそうではない<sup>23</sup>。関数空間は無次元の空間なので、「有界閉集合は compact」という定理が成り立たず、最小値の存在を示すのは難しい。

このため、歴史的には他の方法で解の存在を証明する努力がなされ、それらのいくつかは成功したが、一方で、Riemann による (Dirichlet の原理を用いる) 証明を正当化する努力も続けられ、Hilbert (David Hilbert, 1862–1943) によって果たされた (1900)。現在では、Dirichlet の原理を用いる論法はさらに整理されて、関数解析を使って説明されることが多い。

Riemann の写像定理の簡単な歴史は、高橋 [43] にある。Dirichlet の原理の説明は色々な本にあるが、例えば歴史的なことは杉浦 [38]、現代の関数解析からの視点は岡本・中村 [11] を見よ。Laplace 方程式などの楕円型方程式の境界値問題の変分法的な取り扱い (弱解の方法) について、ある程度まとまった説明が読みたいならば、例えば溝畑 [74]、あるいはブレジス [67] が良い<sup>24</sup>。

### 3.6.5 等角写像による単純化

本題に入る前に、 $\Delta$  と簡単な変数変換の関係について命題を二つほど紹介する。

---

<sup>22</sup> 「 $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  が任意の  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  に対して、 $\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) \, dx = 0$  を満たすならば、実は  $f = 0$  (a.e.)」。

これを変分法の基本補題 (fundamental lemma of calculus of variations) と呼ぶ。

<sup>23</sup> 実数論で有名な Dedekind が「証明」までしたが、Weierstrass が反例を与えた (つまりその証明はまちがいであった) という有名な話がある。

<sup>24</sup> 溝畑 [74] は有名で、筆者も学部 4 年生の頃に自主ゼミで精読したことがあるが、現在では、ブレジス [67] の方を強く勧めたい。

命題 3.6.3 (調和関数と座標変換)  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^n$  の領域、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を  $C^2$  級の関数とすると、以下の (1), (2) が成り立つ。

(1) 任意の  $a \in \mathbf{R}^n$  に対して、関数  $F$  を

$$F(y) = f(x), \quad x = y + a \quad (y + a \in \Omega)$$

で定めるとき

$$\Delta_y F(y) = \Delta_x f(x), \quad x = y + a \quad (y + a \in \Omega).$$

すなわち Laplacian は座標系の平行移動に関して不変である。特に  $\Delta f = 0$  ならば  $\Delta F = 0$ 。

(2) 任意の  $n$  次実直交行列  $U$  に対して、関数  $F$  を

$$F(y) = f(x), \quad x = Uy \quad (Uy \in \Omega)$$

で定めるとき、

$$\Delta_y F(y) = \Delta_x f(x), \quad x = Uy \quad (Uy \in \Omega).$$

すなわち Laplacian は座標系の直交変換に関して不変である。特に  $\Delta f = 0$  ならば  $\Delta F = 0$

証明 (1) 任意の  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) に対して

$$\frac{\partial F}{\partial y_k}(y) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(y + a), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y_k^2}(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(y + a)$$

であるから

$$\Delta_y F(y) = \Delta_x f(y + a).$$

(2)  $U$  の第  $(i, j)$  成分を  $u_{ij}$  とおくと、任意の  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y_k}(y) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(Uy) \frac{\partial x_i}{\partial y_k}(y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(Uy) u_{ik}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_k^2}(y) &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(Uy) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial y_k} \right) u_{ik} = \sum_{i,j} u_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(Uy) u_{ik} \\ &= {}^t U H U \text{ の第 } (k, k) \text{ 成分,} \end{aligned}$$

ただし

$$H = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Uy) \right) = f \text{ の Hesse 行列.}$$

ゆえに

$$\Delta F(y) = \text{tr}({}^t U H U) = \text{tr}({}^t U U H) = \text{tr}(H) = \Delta f(x). \blacksquare$$

命題 3.6.4 (2 次元の Laplacian と正則関数)  $\tilde{\Omega}$  を  $\mathbf{C}$  の領域、 $w = \varphi(z)$  を  $\tilde{\Omega}$  上定義された複素数値の正則関数として、 $\Omega = \varphi(\tilde{\Omega})$  とおく。 $\mathbf{C}$  と  $\mathbf{R}^2$  を自然に同一視して、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を  $C^2$  級の関数として

$$F(x, y) = f(u, v), \quad w = u + \sqrt{-1}v = \varphi(z), \quad z = x + \sqrt{-1}y, \quad (z = x + \sqrt{-1}y \in \tilde{\Omega})$$

により関数  $F$  を定義するとき (つまり  $F = f \circ \varphi$ )、

$$\Delta F(x, y) = \Delta f(u, v) |\varphi'(z)|^2 \quad (z = x + \sqrt{-1}y \in \tilde{\Omega}).$$

言い換えると

$$\Delta F(x, y) = \Delta f(u, v) (u_x(x, y)^2 + u_y(x, y)^2)$$

が成り立つ。特に  $f$  が調和関数ならば、 $F$  も調和関数である。

証明 合成関数の微分法により

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

$F_{yy}$  も同様に計算できるので、

$$\Delta F = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} (u_x^2 + u_y^2) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} (u_x v_x + u_y v_y) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (v_x^2 + v_y^2) + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v.$$

$u, v$  は Cauchy-Riemann の方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

を満たすことから、

$$u_x v_x + u_y v_y = u_x (-u_y) + u_y u_x = 0, \quad v_x^2 + v_y^2 = (-u_y)^2 + u_x^2 = u_x^2 + u_y^2$$

が得られる。また良く知られているように

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

が成り立つので、

$$\Delta F(x, y) = \Delta f(u, v) \cdot (u_x^2 + u_y^2). \blacksquare$$

それでは本題に移る。平面内の単連結な領域 ( $\neq \mathbf{C}$ ) は、等角写像によって、単位円板に写すことが出来る。実際、次の二つは複素関数論で基本的な定理である (証明はここで気軽に紹介できるようなものではないので省く)。



**定理 3.6.5 (Riemann の写像定理)**  $\Omega$  が複素平面  $\mathbf{C}$  の単連結な領域で、 $\mathbf{C}$  とは異なるものであるとする。このとき、 $\Omega$  を単位円板  $D := \{w \in \mathbf{C}; |w| < 1\}$  に双正則に写す等角写像  $\Phi$  が存在する。

**定理 3.6.6 (Carathéodory)**  $\Gamma$  を複素平面内の Jordan 閉曲線で、 $\Omega$  を  $\Gamma$  の囲む有界領域とすると、上の定理の等角写像  $\Phi$  は  $\bar{\Omega}$  から  $\bar{D}$  の上への同相写像に拡張できる。

以下、上の二つの定理に現れる  $\Phi$  を用いて議論する。円板内の Laplace 方程式のディリクレ問題

$$\begin{aligned}\Delta v &= 0 \quad (\text{in } D) \\ v(x) &= \psi(\Phi^{-1}(x)) \quad (x \in \partial D)\end{aligned}$$

を (例えば Fourier 級数を用いて) 解いて、

$$u := v \circ \Phi$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (\text{in } \Omega) \\ u(x) &= \psi(x) \quad (x \in \Gamma)\end{aligned}$$

が成り立つ ( $u$  が Laplace 方程式を満たすことは命題 3.6.4 による)。つまり  $u$  は Dirichlet 境界値問題 (DP) の解である。

**注意 3.6.7 (Riemann の写像定理の証明方法について)** Riemann は写像定理を証明するために、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題の解の存在を示す必要があったことは既に説明した。ここでは Dirichlet 境界値問題の解の存在を示すために写像定理を使っているのも、ともすると堂々巡り (循環論法) のようであるが、現在では写像定理を証明するために、Dirichlet 境界値問題を解かないで済ませる方法が知られているので、上の議論は無意味ではない。ちなみに、最近の複素関数論の教科書では、求める等角写像を、ある汎関数<sup>25</sup>の最大問題の解と特徴づけ、その存在を正規族 (normal family) の理論を用いて示するのが普通である (そういう意味では、これも一種の変分法であると言えるだろう)。■

### 3.6.6 Poincaré-Perron の方法

(ここはキーワードの紹介のみで済ませる。)

最大値原理を用いて、解の一意性や安定性を示したが、実は、これを突き詰めて行って、解の存在を示す **Poincaré-Perron の方法** (略して **Perron の方法**) (**Perron's method**) と呼ばれる方法がある。ペトロフスキー [69] や辻・小松 [46] などに載っている。解の存在を証明できる問題の範囲については、他の方法と比べて一長一短がある。

この方法は、初等的ではあるが、最近は案外使い出があるとみなされているようである。Laplace 方程式以外の、一般の 2 階楕円型方程式、2 階放物型方程式へも拡張されている。

<sup>25</sup>(余計なことかもしれないが) この汎関数の値は、正則関数で写した領域の面積を意味する。

### 3.6.7 積分方程式への帰着, Potential 論

Carl Gottfried Neumann (1832–1925) は Dirichlet, Neumann 問題を境界上の積分方程式に帰着した。例えば Jordan 閉曲線  $\Gamma$  で囲まれた領域  $\Omega$  における Dirichlet 問題

$$(3.6.1) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$(3.6.2) \quad u = \psi \quad (\text{on } \Gamma)$$

について説明する。 $\Gamma$  を  $p(t)$  ( $t \in [a, b]$ ) とパラメーター曲線で表わし、点  $p(t)$  における内向き単位法線ベクトルを  $n_t$  とする。 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  を  $f(a) = f(b)$  を満たす連続関数とし、Dirichlet 問題の解  $u$  を (いわゆる二重層ポテンシャル) (double layer potential)

$$u(x) = - \int_a^b f(t) \frac{\partial}{\partial n_t} \log |x - p(t)| dt \quad (x \in \mathbf{R}^2)$$

の形で求める。

$u$  の内部からの極限と、外部からの極限は等しくなく (特に  $u$  は  $\mathbf{R}^2$  で連続ではない)、その差は  $2\pi f(t)$  である。さらに  $\Gamma$  上の点における法線方向の微分は内向きと外向きで等しい。このことから、 $f$  は次の積分方程式を満たす。

$$(3.6.3) \quad g(s) = f(s) + \int_a^b k(s, t) f(t) dt,$$

ただし

$$g(s) := \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{x \rightarrow x(s) \\ x \in \Omega}} u(x), \quad k(s, t) := -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_t} \log |p(t) - p(s)|$$

である。

パラメーター  $t$  を  $\Gamma$  上の固定点からの距離として、 $p(t) = (x(t), y(t))$  とすると、

$$k(s, t) = \frac{(y(s) - y(t))x'(t) - (x(s) - x(t))y'(t)}{(x(s) - x(t))^2 + (y(s) - y(t))^2}$$

となるので、 $\Gamma$  が  $C^2$  級であれば  $k = k(s, t)$  は連続になり、特に  $k(t, t)$  が  $p(t)$  における  $\Gamma$  の曲率になる。

Fredholm (E. I. Fredholm, 1866–1927) は (3.6.3) を有限次元の線型方程式

$$g_i = f_i + \lambda h \sum_{j=1}^n k_{ij} f_j$$

で近似して考えた。ただし  $\lambda \in \mathbf{C}$  は補助パラメーターで、

$$f_i = f(\xi_i), \quad g_i = g(\xi_i), \quad k_{ij} = k(\xi_i, \xi_j), \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad \xi_i = a + ih$$

である。

ここで

$$K := (k_{ij}), \quad \delta_n(\lambda) := \det(I + \lambda h K), \quad \delta_n(\lambda; i, j) = I + \lambda h K \text{ の余因子}$$

とおくと、いわゆる Cramer の公式によって

$$f_i = g_i + \frac{1}{\delta_n(\lambda)} \sum_{j=1}^n (\delta_n(\lambda; j, i) - \delta_n(\lambda) \delta_{ij}) g_j.$$

$n \rightarrow \infty$  の極限を考えると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\lambda) = \delta(\lambda), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n(\lambda; j, i) - \delta_n(\lambda) \delta_{ij}}{h} = -\lambda \delta(\lambda; s, t),$$

ただし

$$\begin{aligned} \delta(\lambda) &:= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b K \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} dt_1 \cdots dt_n, \\ \delta(\lambda; s, t) &:= k(s, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b K \begin{pmatrix} s & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} dt_1 \cdots dt_n, \\ K \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} &:= \det(k(s_i, t_j)). \end{aligned}$$

$\delta(\lambda)$  は  $\lambda$  の整関数<sup>26</sup>であるが、**Fredholm** 行列式と呼ばれている。 $\delta(\lambda) \neq 0$  の場合は

$$f(s) = g(s) - \frac{\lambda}{\delta(\lambda)} \int_a^b \delta(\lambda; s, t) g(t) dt$$

と解ける。 $\delta(\lambda) = 0$  の場合はさらに詳しい解析が必要であるが、Fredholm は次の定理を得た (1903)。

#### Fredholm の交代定理 (the Fredholm alternative)

積分方程式

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s, t) f(t) dt$$

がすべての連続関数  $g$  に対して唯一の解  $f$  を持つための必要十分条件は、 $g = 0$  のときの解が  $f = 0$  のみであることである。これは  $\delta(\lambda) \neq 0$  と同値である。

Hilbert は Fredholm のこの仕事が発表されてから、この結果を数列空間  $\ell^2(\mathbf{N})$  において見直した (1900 年に Fredholm の論文の内容を聴いてから検討を始め、その結果は 1904 年から 1910 年の間に発表された<sup>27</sup>)。そこには現代の関数解析において重要な考え方の原型がいくつも現れているが、まだ  $\ell^2(\mathbf{N})$  と  $L^2[a, b]$  の同等性や、 $\ell^2(\mathbf{N})$  の完備性などは意識されていなかった<sup>28</sup>。—

この節の記述は小谷・俣野 [28] を参考にした。積分方程式への帰着の部分は、溝畑 [74] などがコンパクトながら読みやすいかも知れない (ポテンシャルの詳しい解説ということなら、ペトロフスキー [69] や Kellog [85] を勧める)。積分方程式の固有値問題の解説は志賀 [31] に

<sup>26</sup>複素平面全体で正則な関数のことを整関数 (entire function) と呼ぶのであった。

<sup>27</sup>「線形積分方程式の一般論の基礎」 (1912) にまとめられているそうである。

<sup>28</sup>ちなみに、現在の関数解析で学ぶような Hilbert 空間の定義は John von Neumann (1903–1957) に始まる (ノイマン [56] を参照せよ)。

詳しい。もっともこの辺りの議論は、現在ではすっかり整理されていて、エッセンスは関数解析の標準的なメニューと言えるので、ある程度詳しい関数解析の教科書には大抵載っている(例えば藤田・黒田・伊藤 [60])。寺沢 [48] にはクラシックな形のままの Fredholm の議論が書いてあって、そういう意味では貴重である。

### 余談 3.6.2 (歴史についてゴタゴタ書いたことの言い訳) 最近

回り道のように見えても、結局は問題の発生したところまで遡る方が理解が早い

と痛感している。もう少し具体的に言うと

数学の理論の発達には紆余曲折があって、歴史に沿ってそれらを全部勉強しようとするのは不経済だし、ともすると凡人にはかえって迷子になる危険が大きい。けれども、完全に出来上がってしまったものだけを学ぼうとするのも別の弊害がある。その後の理論を引っ張ったような大問題については、はしょった説明でもいいからしておく方がよい。

偏微分方程式論は、どこから話し出せば良いか当惑するくらい内容豊富である。それに初めて触れる学生相手の授業では、何をどのように講義すべきか、というのは悩ましい問題である。筆者自身の現時点での結論は

クラシックなことを将来の発展を見越した形で話すのがよい

である。筆者が学部3年生の頃を思い返すと、関数解析の勉強に大変な時間をつぎ込んでいた。それは関数解析を面白いと思ったからではあるが、当時は抽象的な面白さにあこがれていたところが大きく、時々出て来る具体例の理解に結構手こずっていた(実は面倒くさいと思っていた)覚えがある。今となっては信じられないのだが、

- 変分法 (変分問題の Euler 方程式とは何かとか、Dirichlet の原理とか)
- Fourier の方法による熱伝導方程式の解法
- Fredholm による、ポテンシャルを用いた Laplace 方程式の解法

などについて、ほとんど何も知らないままに関数解析(とそれに基づく偏微分方程式論)を勉強していたのだから呆れたものであった。一つだけ言い訳をすれば、半分はカリキュラムにも責任があったと思う。後になって、一つ一つこれらのものを学んでからようやく、「何だそうだったのか」という感想を持った。同時にそれらの知識を少しでも持っていれば、もう少し抽象論も勉強しやすかったのにと恨めしく思った<sup>29</sup>。

そういうわけで、このノートには、詳しく説明もせずに(ある意味では無責任ともいえる)、こんなことがある、あんなことがある、とかなり饒舌<sup>じょうぜつ</sup>に書いてある。初めて勉強する人には、ノイズに近いと感じられるかもしれないが、今後の勉強のためになると思ってあえてこうしてみた。(私は、3年生の頃の自分に読ませたいノートを書いたつもりである。) ■

余談 3.6.3 (調和関数に関するさらなる学習) この章では、Laplace 方程式は Poisson 方程式の特殊な場合(同次方程式バージョン)という立場で解説したが、Laplace 方程式、調和関数は特別で詳しく研究されている。細かいことが知りくなった場合は、Axler-Bourdon-Wade [82] が参考になる。ポテンシャルによる扱いについては、古典である Kellog [85] 以外に、Folland [83] が便利である。 ■

<sup>29</sup>数学科の中で、学生間に縦のつながりがあれば、あるいは何の問題もないことなのかもしれないが、残念ながら現状はそうない。

### 3.7 練習問題

(期末試験の過去問もずいぶんたまったので、一度手を入れて、解答も現在の目から見て推奨できるものに差し替えたい。)

問題 1. (Laplacian の平面極座標による表示) 平面の極座標を考える。つまり  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  とするとき、次の問に答えよ。

(1) 次の偏導関数を求めよ。

(a)  $x_r, x_\theta, y_r, y_\theta$ .

(b)  $r_x, r_y, \theta_x, \theta_y$ .

(2) 関数  $f = f(x, y)$  が与えられているとき、 $g(r, \theta) = f(x, y)$  で関数  $g$  を定める。このとき

(a)  $g_r, g_\theta$  を  $f_x, f_y$  で表せ。

(b)  $f_x, f_y$  を  $g_r, g_\theta$  で表せ。

(3)  $f_{xx}, f_{yy}$  を  $g$  の偏導関数で表し、次の式が成り立つことを確かめよ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}.$$

(注意: 結果が分かっているならば、右辺を計算・整理して左辺に等しいことを示す方がずっと簡単である。しかし、最初は結果が分からないわけだから、こういう計算も出来なくてはいけない。)

解答 (「多変数の微分積分 1」で学んだはずなので、結果のみ)

(1-a)

$$x_r = \cos \theta, \quad x_\theta = -r \sin \theta, \quad y_r = \sin \theta, \quad y_\theta = r \cos \theta.$$

(1-b)

$$r_x = \cos \theta, \quad r_y = \sin \theta, \quad \theta_x = -\frac{1}{r} \sin \theta, \quad \theta_y = \frac{1}{r} \cos \theta.$$

(2-a)

$$\begin{aligned} g_r &= f_x x_r + f_y y_r = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta, \\ g_\theta &= f_x x_\theta + f_y y_\theta = -f_x r \sin \theta + f_y r \cos \theta. \end{aligned}$$

(2-b)

$$\begin{aligned} f_x &= g_r r_x + g_\theta \theta_x = g_r \cos \theta - \frac{\sin \theta}{r} g_\theta \\ f_y &= g_r r_y + g_\theta \theta_y = g_r \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} g_\theta. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \cos^2 \theta g_{rr} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} g_{r\theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} g_r + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} g_{\theta\theta}, \\f_{yy} &= \sin^2 \theta g_{rr} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} g_{r\theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} g_r + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} g_{\theta\theta}.\end{aligned}$$

ゆえに

$$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta}. \blacksquare$$

問題 2.  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が  $C^2$  級の関数である時、 $u(x) := f(r)$ ,  $r := \|x\|$  ( $x \in \mathbf{R}^n$ ) とおくと、

$$\Delta u(x, y) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) \quad (x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$$

が成り立つことを示せ。 $(n=2)$  の場合は前問からすぐ分かるが、 $n>2$  の場合にもすぐ分かるのは有益。

問題 3. (簡単な調和関数の例)

(1)  $u$  を、平面から原点を除いた領域  $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$  で定義された調和関数とする。 $u$  が  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  のみの関数である、すなわち 1 変数実数値関数  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  が存在して、

$$u(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad ((x, y) \in \Omega)$$

が成り立つとする。このとき  $u$  を求めよ。

(2)  $\mathbf{R}^2$  で定義された調和関数  $u$  が、 $n$  次同次である、すなわち

$$u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n u(x, y) \quad (\lambda > 0, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{O\})$$

が成り立つとする。このとき  $u$  を求めよ。

解答 (円板や円環で Laplace 方程式の Dirichlet 問題を解いたときに現れる関数 ( $\log r$  や調和多項式) に慣れてもらおう、という主旨の問題である。)

(1)  $u(x, y) = f(r)$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) であるが、 $\Delta u = 0$  より

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) f(r) = 0.$$

ゆえに

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = 0.$$

$f' = g$  とおくと  $g' + g/r = 0$ . 移項して

$$\frac{g'}{g} = -\frac{1}{r}.$$

これは変数分離形であるから簡単に解けて

$$g(r) = \frac{C}{r}.$$

となる ( $C$  は任意定数)。ゆえに  $f(r) = C \log r + C'$  ( $C'$  は任意定数)。これから

$$u(x, y) = C \log \sqrt{x^2 + y^2} + C'.$$

(2) 同次性の仮定から

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^n u(\cos \theta, \sin \theta).$$

ゆえに  $F(\theta) = u(\cos \theta, \sin \theta)$  とおくと、

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^n F(\theta).$$

$\Delta u = 0$  であるから

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (r^n F(\theta)) = 0.$$

ゆえに

$$n(n-1)r^{n-2}F + nr^{n-2}F + r^{n-2}F'' = 0.$$

整理して

$$n^2 F + F'' = 0.$$

これは

$$F(\theta) = A \cos n\theta + B \sin n\theta \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

と解ける ( $F$  は微分方程式以外に、周期  $2\pi$  の周期関数でなければいけないが、それも自動的に満たされる)。これから

$$u(x, y) = r^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta). \blacksquare$$

問題 4. (円板におけるラプラス方程式のディリクレ問題)  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$  における Dirichlet 問題

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 \quad (\text{in } \Omega) \\ u(x, y) &= y^3 \quad ((x, y) \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

を解け。

解答  $U(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$  とすると、境界条件は

$$U(1, \theta) = \sin^3 \theta \quad (\theta \in [0, 2\pi))$$

である。 $\sin^3 \theta$  を Fourier 級数展開すると<sup>30</sup>

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{4}(3 \sin \theta - \sin 3\theta).$$

ゆえに、解の公式から

$$U(r, \theta) = \frac{1}{4}(3r \sin \theta - r^3 \sin 3\theta).$$

ここまでで解答として構わないが、 $x, y$  で表しておこう。 $i$  を虚数単位として、

$$r^3 \sin 3\theta = \operatorname{Im} (x + iy)^3 = \operatorname{Im} [(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)] = 3x^2y - y^3$$

から

$$u(x, y) = \frac{1}{4} [3y - (3x^2y - y^3)] = \frac{1}{4}(3y - 3x^2y + y^3). \blacksquare$$

**問題 5.** (立方体領域における Laplace 方程式の Dirichlet 問題) 立方体領域における Laplace 方程式の Dirichlet 問題

$$(3.7.1) \quad \Delta u(x, y, z) = 0 \quad ((x, y, z) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1))$$

$$(3.7.2) \quad u(x, y, 0) = f(x, y) \quad ((x, y) \in [0, 1] \times [0, 1])$$

$$(3.7.3) \quad u(x, y, z) = 0 \quad (z = 1 \text{ or } x = 0, 1 \text{ or } y = 0, 1)$$

を Fourier の方法を用いて解け。

**解答** まず (非同次の境界条件 (3.7.2) は置いておいて)  $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$  の形の関数で (3.7.1), (3.7.3) を満たすものを求める。

$$(3.7.4) \quad X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0,$$

$$(3.7.5) \quad X(0) = X(1) = 0, \quad Y(0) = Y(1) = 0, \quad Z(1) = 0.$$

(3.7.4) を  $XYZ$  で割って、

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

移項して

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z}.$$

この式の値は定数であることが分かるので、それを  $\lambda$  とおく:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = \lambda.$$

---

<sup>30</sup>具体的には 3 倍角の公式  $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$  から求めるのが簡単である。あるいは  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$  から、 $\sin^3 \theta = \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{8i^3} (e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}) = -\frac{1}{4} \left( \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - 3 \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta$ . Fourier 級数展開する (= Fourier 係数を求める) ために、積分を計算しなくても済む場合があることに注意しよう。期末試験では、計算の手間を省かせてあげるために、こういう問題を出すことが多い。理解するよう努力してもらいたい。



これから

$$\frac{Y''}{Y} = -\left(\lambda + \frac{Z''}{Z}\right).$$

この式の値も定数であることが分かるので、 $\mu$  とおくと、

$$X'' = \lambda X, \quad Y'' = \mu Y, \quad Z'' = -(\lambda + \mu)Z.$$

まず  $X, Y$  について考えて、 $m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$  として

$$\lambda = -(m\pi)^2, \quad \mu = -(n\pi)^2, \quad X(x) = \sin m\pi x, \quad Y(y) = \sin n\pi y.$$

最後に  $Z$  であるが、条件は

$$Z'' = (m^2 + n^2)Z, \quad Z(1) = 0.$$

まず微分方程式の一般解は、簡単のため  $k = \pi\sqrt{m^2 + n^2}$  とおいて

$$Z(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (A, B \text{ は任意定数}).$$

$Z(1) = 0$  から

$$Ae^k + Be^{-k} = 0.$$

ゆえに  $B = -Ae^{2k}$  となるから、

$$Z(z) = Ae^{kz} + (-Ae^{2k})e^{-kz} = A(e^{kz} - e^{k(2-z)}).$$

そこで、

$$u(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}(e^{\pi\sqrt{m^2+n^2}z} - e^{\pi\sqrt{m^2+n^2}(2-z)}) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

とおいて、(3.7.2) が成り立つようにするには、

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}(1 - e^{2\pi\sqrt{m^2+n^2}}) \sin m\pi x \sin n\pi y.$$

ゆえに

$$A_{mn} = \frac{f_{mn}}{1 - e^{2\sqrt{m^2+n^2}\pi}}, \quad f_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin m\pi x \sin n\pi y \, dx dy.$$

あるいは (この方が最後の式がコンパクトになる)、

$$Z'' = k^2 Z, \quad Z(1) = 0$$

の解として

$$Z(z) = \sinh k(1 - z)$$

を取ることもできる。この場合は、

$$u(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn} \sinh(\pi\sqrt{m^2 + n^2}(1 - z)) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

と表すことになる。

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn} \sinh(\pi\sqrt{m^2 + n^2}) \sin m\pi x \sin n\pi y$$

から

$$B_{mn} = \frac{f_{mn}}{\sinh(\pi\sqrt{m^2 + n^2})}.$$

ゆえに

$$u(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} \frac{\sinh(\pi\sqrt{m^2 + n^2}(1 - z))}{\sinh(\pi\sqrt{m^2 + n^2})} \sin m\pi x \sin n\pi y. \blacksquare$$

(この問題は立方体の 1 つの面でだけ非同次境界条件、残りの 5 つの面で同次境界条件を課したが、少し考えると、同様にして 6 つの面で非同次境界条件を課した一般の Dirichlet 問題を解くことができる。)

## 付 録 A 歴史的なことなど

### A.1 数学についての言葉

von Neumann 全集の最初の論文 “The Mathematician” から (授業で翻訳を紹介したことがあるけれど、著作権の問題でここでは原文を引用する)

— that mathematical ideas originate in empirics, although the genealogy is sometimes long and obscure. But, once they are so conceived, the subject begins to live a peculiar life of its own and is better compared to a creative one, governed by almost entirely aesthetical motivations, than to anything else arid, in particular, to an empirical science. There is, however, a further point which, I believe, needs stressing. As a mathematical discipline travels far from its empirical source, or still more, if it is a second and third generation only indirectly inspired by ideas coming from “reality,” it is beset with very grave dangers. It becomes more and more purely aestheticizing, more and more purely *l’art pour l’art*. This need not be bad, if the field is surrounded by correlated subjects, which still have closer empirical connections, or if the discipline is under the influence of men with an exceptionally well-developed taste. But there is a grave danger that the subject will develop along the line of least resistance, that the stream, so far from its source, will separate into a multitude of insignificant branches, and that the discipline will become a disorganized mass of details and complexities. In other words, at a great distance from its empirical source, or after much “abstract” inbreeding, a mathematical subject is in danger of degeneration.

John Louis von Neumann (1903–1957) の業績: 量子力学の数学的基礎づけ、最初のコンピュータ ENIAC, プログラム内蔵式コンピュータ EDSAC の開発、数値解析の父、ゲームの理論の創始者、原爆の爆縮レンズの発明…

### A.2 微分方程式歴史覚え書き

数学の歴史についての読み物と言うと、ベル「数学をつくった人々」[70] や遠山・矢野編集「100 人の数学者」[52] が手に取って読みやすい本であろう (その他にブルバキ「数学史」というものもあるが、微分方程式についてはあまり書かれていない)。フーリエの仕事については、何と言っても、ケルナー「フーリエ解析大全」[27] がお勧めである (とても面白い)。最近出版されたコルモゴロフ他編 [30] は、常微分方程式、変分法の歴史に詳しい貴重な文献である。

### A.2.1 微分方程式のはじまり — Newton

Newton (Isaac Newton, 1642–1727) は微分積分学の創始者、力学の創始者 (あるいは理論物理学の創始者) として有名だが、力学の問題を解くために多くの微分方程式を解いている (最短降下線の問題、懸垂線<sup>1</sup>)。著書『プリンキピア・マセマティカ』 (自然哲学の数学的原理, 1687 年出版) の中で万有引力の法則を仮定すると惑星の運動に関する Kepler の法則<sup>2</sup>が導かれることを証明した<sup>3</sup>。プリンキピアは微積分を使わない古典的な書き方で書かれているが、本質的には運動方程式 (それは 2 階の常微分方程式である) を解くことによって解決された。

ニュートンのプリンキピア・マセマティカに関する解説としては、筆者の目に止まった本の中から、<sup>ガモフ</sup>Gamov [21], チャンドラセカール [45], Arnold [2] をあげておく。[21] には現代の普通の物理学の言葉で、ニュートンがいかに万有引力の法則を発見し、Kepler の法則を証明したかが書いてある。[45] はプリンキピアを真つ正面から読解するという本である。[2] は著名な力学系の研究者である著者による歴史読み物である。

#### Newton からライバル Leibniz への手紙

以下は遠山 [51] に載っている話。Newton は 1676 年 10 月に次のような暗号文 (鍵はないので作った本人にしか解けやしない) を Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) に送ったそうである。

aaaaaa cc d æ eeeeeeeeeeeee ff iiiiii lll nnnnnnnnnn oooo qqqq rr ssss tttttttt  
vvvvvvvvvvvvvv x

これは並べ替えによって

Data æqvatione qvotcvnqve flventes qvantitates involvente flvxiones invenire,  
et vice versa.

というラテン語の文になり、その意味は

「いくつかの流量をふくむ方程式が与えられているとき、流率をもとめること、  
また逆に流率から流量をもとめること」

となる。遠山先生の解釈によると「流量から流率をもとめるのは微分であり、逆に流率から流量をもとめることは微分方程式を解くことなのである」。つまり Newton は自分が微分方程式を発見 (発明?) したことをライバルには教えずに、自分が発見したという証拠を残しておこうとした、ということなのでしょう (なかなか世知辛いですね)。

<sup>1</sup>なお、最近の学生はこの手の物理にうといので、参考書を紹介しておく。高桑 [41] は、大学初年級の物理学に現われる常微分方程式を数学的に簡潔に説明しており、多分現在の数学科の学生にも読みやすいと思われる。

<sup>2</sup>Yohannes Kepler (1571–1630) は偉大な天文観測家である Ticho Brahe (1546–1601) の助手であったが、Brahe の死後に彼の観測結果を整理分析することで有名な Kepler の法則を発見した。第一、第二法則は 1609 年に、第三法則は 1619 年に発表された (第三法則の発見には、Napier による対数の発見 (発明というべき? 出版されたのは 1614 年) が本質的に役に立ったらしい)。

<sup>3</sup>見方によっては、プリンキピアは、ただ一つのこと (Kepler の法則) を証明するために書かれた書物であり、それを書くために微分積分学、力学を打ち立てる必要があった、つまり Kepler の法則を証明するために微分積分学と力学が作られた、となるであろう。

(Newton の力学に関する仕事の先駆けとしては、有名な Galileo Galilei <sup>4</sup> (1564–1642, イタリアの Pisa に生まれ、イタリアの Arcetri にて没する) がいる。「運動」が彼によってはじめて数学的に取り扱われるようになったが、微積分のない時代であるから、大変な苦勞をしている。有名な落体の法則については、ガリレオ・ガリレイ 著, 今野武雄, 新田節次訳, 新科学対話 (下), 岩波文庫 33-906-4, 岩波書店 (1948) で読むことができる。)

### A.2.2 波動方程式

もっとも簡単な偏微分方程式の一つである 1 次元波動方程式

$$u_{tt} = u_{xx}$$

について、すでにテイラー (Brook Taylor, 1685–1731, 英国の Edmonton に生まれ、Somerset House にて没する) は  $x \in [0, 1]$  の範囲で考える場合に「定常解」

$$u(x, t) = \sin \pi t \sin \pi x$$

を発見していた (1715)。<sup>ダランベール</sup> d'Alembert (Jean Le Rond d'Alembert, 1717–1783, Paris に生まれ、Paris にて没する) は、後に彼の名前を冠されて d'Alembert 解と呼ばれることになった

$$u(x, t) = f(x - t) + g(x + t) \quad (f, g \text{ は任意の関数})$$

を発見した (1747, 発表は 1750)。直後にオイラー (Leonhard Euler, 1707–1783, Basel に生まれ、St Petersburg にて没する) が初期値問題の解の公式を与えた。続いて 1753 年にダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli, 1700–1782, オランダの Groningen に生まれ、スイスの Basel にて没する) が定常解の合成である級数解

$$c_1 \sin \pi t \sin \pi x + c_2 \sin 2\pi t \sin 2\pi x + c_3 \sin 3\pi t \sin 3\pi x + \cdots$$

を発見した。

### A.2.3 熱伝導方程式

Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830, フランスの Auxerre に生まれ、Paris にて没する) は熱伝導方程式を発見しただけでなく、Fourier の方法を用いて解くことに成功した。『熱の解析的理論』 (1807, 1811, 1822) にまとめられている (邦訳 [65] がある)。

---

<sup>4</sup>当時の有名なイタリア人は、姓でなく名前でよばれる習慣があった。

## Fourier の熱理論

Fourier は、後に否定されたカロリック説 (熱を元素のようなもの「熱素」 — カロリック (化学で有名なラボアジエの命名) — であるとして考える) に基づいて熱理論を考えたそうである。そういうわけで、Fourier は間違った理論に基づいて議論をしたとも言える。しかし、

一般には熱量が保存されるわけではなく、エネルギーが保存されると考えるべきであるが、化学反応や摩擦熱などを考慮に入れる必要がないような限定された状況では、確かに熱量は保存されるので、あたかも元素であるかのような取り扱いが可能である

ので、その場合は Fourier の議論は正しいわけである。『熱の解析的理論』の中の一節には次のように書かれているという。

「熱の性質については、不確かな仮説しかおくことができないが、その結果が取り出されるような数学法則の教えることは、すべての仮説から独立している。それらは一般の現象から共通に見出され、そして正確な実験によって確かめられる基本的事実の注意深い検証だけを必要としている。したがってまず最初に、観察の一般的結果を明示し、計算すべき量に正確な定義を与えて、計算の基礎とすべき原理を打ち出すことが肝要である。」(訳は志賀浩二著「無限のなかの数学」岩波新書 (1995) から引用した)

## Fourier の手紙

(Fourier が Fourier 級数を発見・発明したと言うわけだけど、そんなに単純ではないらしいということ)

「私の理解では、この展開法を一般の関数にも適用できると思うのです。別の方法で同じ方程式

$$\phi(x) = \sin x \int \phi(x) \sin x dx + \sin 2x \int \phi(x) \sin 2x dx + \cdots$$

に達しましたが、これは以前に得ていたものなのです。この部分の私の結果は、2 年前にビオ (M. Biot) とポアソン (M. Poisson) に送りました。当時、彼らは偏微分方程式の積分を三角関数や指数関数の級数で表現する方法を知っていたのに、それを指摘しなかったのです。ダランベール (d'Alembert) やオイラー (Euler) は解を三角関数で展開するために私のような積分を用いていたのです。この事実について私は全くの無知でした。あるいは完全に忘れていたのかも知れません。第 3 の定理の証明に挑戦していたときに、

$$\phi(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots$$

の両辺に  $\cos x dx$  を掛けて 0 から  $\pi$  まで積分するという方法を利用したのです。最初にこの方法を確立した数学者を引用すべきなのですが、知らないのは残念です。ダランベールやオイラーの研究に関しては、たとえ彼らがこの展開法を知っていたところで不完全な使い方しかしていないのですから、加えることはできません。彼らは、任意の…関数がこの種の展開で解けるはずはないと信じていました。私が熱の理論を解く際に直面した第 1 の問題のように、定数をコサインの三角和で展開するなどといったことをした人はいないように思われるのです。また、この展開が意味を持つような極限を見つけることも必要でしょう。たとえば、方程式

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \cdots$$

は  $x$  が  $\pi$  から  $2\pi$  になるともはや成立しないことも確認されるべきことです。しかしながら、右辺はそこでも収束しており、ただ、その和が  $x/2$  と異なり、…」  
(この訳もケルナー [27] (高橋陽一郎訳) から引用した。)

## A.2.4 Laplace 方程式

<sup>ラグランジュ</sup> Lagrange (Joseph Louis Lagrange, 1736–1813) が流体力学の論文 (1760) の中で言及したのが最初だと言われている (重力ポテンシャルでないのは意外な感じがする)。名前の元となった <sup>ラプラス</sup> Laplace (1749–1827) 自身は極座標表示された Laplace 方程式を 1782 年の論文で、直交座標表示された Laplace 方程式を 1787 年の論文で発表している (Kellog [85] の p. 123 を見よ)。

Laplace 方程式の境界値問題の解の存在を示すための Dirichlet 原理は、Gauss (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855), Lord Kelvin (William Thomson, 1824–1907), Dirichlet (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1865) 等によって「知られていた」が、有名になったのは Riemann (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866) が学位論文 (1851) の中で写像定理の証明に用いたことによる。

## A.2.5 Poisson 方程式

<sup>ポアソン</sup> Poisson (Simeon-Denis Poisson, 1781–1840) の 1813 年の論文に現われた (Kellog [85] の p. 156 を見よ)。

## A.3 年表

- (常微分方程式の研究は Sir Isaac Newton (1642–1727, 英国の Woolsthorpe に生まれ、ロンドンに没する) に始まる。主著『自然哲学の数学的原理 (プリンキピア)』 (1687 年))
- 1750 年頃 1 次元波動方程式  $u_{tt} = u_{xx}$ 
  - Taylor (1685–1731) による定常解  $u(x, t) = \sin \pi t \sin \pi x$  の発見 (1715)。
  - ダランベール (Jean Le Rond d'Alembert, 1717–1783, Paris に生まれ、Paris に没する) の解の公式  $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$  (1747, 1750)
  - オイラー (Leonhard Euler, 1707–1783, Basel に生まれ、St Petersburg に没する) による初期値問題の解の公式 (1750?)
  - ダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli, 1700–1782, Groningen に生まれ、スイスの Basel に没する) の三角級数解 (1753)
- いずれが正しいか論争勃発
- 18 世紀も末に近づくとある種の行き詰りが感じられるようになってきた。有名な Lagrange の d'Alembert への手紙 (1781)。
- 1800 年頃フーリエ (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830, Auxerre に生まれ、Paris にて没する) による熱方程式の解析、Fourier 級数, Fourier 変換, Fourier の変数分離方法, 主著『熱の解析的理論』 (1822)。



→ Fourier 級数の収束の問題をめぐり解析学に大きな影響  
積分の定義 (Riemann<sup>5</sup>, Lebesgue), 関数概念 (Dirichlet)

- 熱方程式以外の様々な方程式に適用される。
- 一般の領域での解の存在証明が問題としてクローズアップされてくる。
- 1851 年、リーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866) は学位論文で (Riemann の) 写像定理の証明 (Laplace 方程式の境界値問題の解を用いる) に「Dirichlet の原理」を用いる。  
→ ワイエルシュトラス (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897) の批判
- (1886 年, ペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) による連続な  $f$  に対する常微分方程式の初期値問題  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  の解の存在証明.)
- 1900 年頃、Laplace 方程式の境界値問題の解の存在問題をめぐって成果
  - C. ノイマン (Carl Gottfried Neumann, 1832–1925) は Laplace 方程式の境界値問題を積分方程式に帰着させて成果
  - フレドホルム (Erik Ivar Fredholm, 1866–1927, スウェーデンの Stockholm に生まれ、Stockholm にて没する) による積分方程式論 (有名な交代定理は 1903 年)
  - ヒルベルト (David Hilbert, 1862–1943)
    - \* Fredholm の結果の見直し (関数解析の原型を作る)
    - \* Dirichlet 原理による存在証明の正当化 (1900 年)
- 1924 年 Courant-Hilbert による『数理物理学の方法』  
(1926 年 Schrödinger の波動力学にぴったり)
- 1930 年代, 弱解の概念, 特にソボレフ (Sergei Lvovich Sobolev, 1908–1989, Russia に生まれ、Russia に没する) による一般化導関数と Sobolev 空間の導入
- 超関数の概念
  - シュヴァルツ (Laurent Schwartz, 1915–2002, Paris に生まれ) の distribution (論文発表は 1948 年)
  - 佐藤幹夫 (1928–) の hyperfunction (1958)

(TODO: 以下のことを加筆すべき。Lebesgue 積分。von Neumann による抽象的な Hilbert 空間の導入とそれを用いた量子力学の基礎付け。Banach の業績。)

---

<sup>5</sup>『任意関数の三角級数による表現の可能性について』“Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe” (1854).



## A.4 おまけ：解析学の基礎の歴史

- いずれにせよ、18 世紀は微積分が大活躍した時代で、Euler (1707–1783) が膨大な仕事を残したのが象徴的。
- 1800 年台前半は、微積分の基礎の見直しが始まった時代。Cauchy による極限 ( $\varepsilon\delta$  による極限の定義、Cauchy 列)  
Abel による  $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  の証明
- 1837 年 Dirichlet による関数の定義 (現代の用語で言えば、「関数とは写像である」)
- Weierstrass の仕事。特に一様収束の概念。(連続関数の一様収束極限は連続、項別積分、項別微分、M-テスト)

最近出版された中島 [53] がお勧めである。

## 付 録 B 解析学一夜漬け

これまで解析学の勉強を長く続け、多くのことを学んできたわけだが、この講義ではそれらを縦横無尽に駆使することになる。これを「何とうまく使えるのだろうか」と感心するのは、実は本末転倒で、歴史的には、必要があったから、これらの理論が創られ、磨かれてきたのである（「必要は発明の母」）。

ここで重要なものをおさらいして<sup>1</sup>、復習する場合の道案内をする（本来、既に習ったことを必要に応じて復習するのは学生の責任であろうけれど、現実には分量が多くかなり忙しくなるので助太刀しよう）。

### B.1 記号

（工事中 — かなり不完全だがないよりはましなので）

$\mathbf{N} := 1$  以上の整数全体の集合  $= \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbf{Z} :=$  整数全体の集合  $= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,

$\mathbf{R} :=$  実数全体の集合,  $\mathbf{C} :=$  複素数全体の集合.

行列やベクトルの右肩に  $T$  を書いて転置を表わす。

$$\operatorname{grad} u := \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T.$$

$$\operatorname{div} \vec{f} := \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{curl} \vec{f} := \nabla \times \vec{f}$$

ただし  $\times$  は 3 次元ベクトルのベクトル積を意味する。つまり

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \vec{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \vec{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= \left( \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>独り言: 以下で定理の証明は省略し、それらについては参考文献に任せることにしたが、ほとんどは杉浦 [36], [37] で済んでいる。Fourier 級数と常微分方程式についてはその限りではないが、Fourier 級数について高木『解析概論』が役立つのは流石である（杉浦先生の本には Fourier 変換はまとまった章があるのだが、Fourier 級数の話は欠けている…）。ところで、いずれの本でも常微分方程式は解説されていない。この点は残念である（私は解析の多くの問題の源泉は微分方程式にあると考えているので）。

$$\Delta u := \nabla \cdot \nabla u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

## B.2 厳選定理集

### B.2.1 合成関数の微分法

次の定理は多変数の微分積分学を扱うすべての本に載っているはずである。

定理 B.2.1 (面倒なので仮定は省略)

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a), \quad b = f(a).$$

あるいは

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}.$$

この定理は式を覚えるのは簡単だが、実際に習得して使いこなすのにはそれなりの練習が必要である (波動方程式の章の計算を追うのは良い練習になるので、この機会に頑張ってください)。

問 (平面極座標による Laplacian 表示)  $\mathbf{R}^2$  において、

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

であることを示せ。

### B.2.2 コンパクト集合の常識

この講義で直接必要になるのは定理 B.2.4 だけであるが、そのもととなる二つの定理 (ここでは補題としておく) も忘れてはならない。

証明は例えば杉浦 [36] の §1.7 「コンパクト集合」を見よ (定理 B.2.4 の証明だけならば大抵の微分積分学のテキストにある)。

補題 B.2.2 ( $\mathbf{R}^n$  のコンパクト部分集合)  $\mathbf{R}^n$  の部分集合  $A$  について、 $A$  がコンパクトであるための必要十分条件は、 $A$  が有界閉集合であることである。

補題 B.2.3 (コンパクト集合上の実数値連続関数は最大値・最小値を持つ) 連続関数によるコンパクト集合の像はコンパクト集合である。特に空でないコンパクト集合上の実数値連続関数は最大値と最小値を持つ。

定理 B.2.4  $K$  を  $\mathbf{R}^n$  の空でない有界閉集合、 $f: K \rightarrow \mathbf{R}$  を連続関数とすると、 $f$  は  $K$  の上で最大値と最小値を取る。

### B.2.3 2 階導関数と極値問題

次の定理も多くの微分積分学のテキストにある。例えば杉浦 [36] 定理 8.4 など。

定理 B.2.5 (2 階導関数による極値の判定)  $\mathbf{R}^n$  の開集合  $\Omega$  で定義された  $C^2$  級の実数値関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  が、 $a \in \Omega$  で

$$f'(a) = 0, \quad \text{Hesse 行列} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) \text{ は正定値}$$

を満たすならば、 $f$  は  $a$  で狭義の極小値を取る。つまり十分小さな正数  $\delta$  を取ると、

$$f(a) < f(x) \quad (0 < \|x - a\| < \delta, x \in \Omega).$$

### B.2.4 積分記号下の微分、微分と積分の順序交換

等式

$$\frac{d}{dt} \int_A f(t, x) dx = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$$

が成り立つことを、「積分記号下の微分が出来る」とか「微分と積分の順序交換ができる」などと言う。色々なもの (微分方程式の解など) を積分表示するので、頻繁に利用することになる。

以下に一番単純な場合を紹介しておくが、これ以外に

1. ルベグ積分の収束定理 (項別積分定理) の系として得られる場合<sup>2</sup>
2. 広義積分で一様収束の議論で得られる場合<sup>3</sup>

がある (いずれも伊藤 [5] にある<sup>4</sup>。なお杉浦 [36] IV.14 も参考になる。 )。

定理 B.2.6 (積分記号下の微分、微分と積分の順序交換)  $A$  を  $\mathbf{R}^n$  のコンパクト集合、 $I$  を  $\mathbf{R}$  の区間として、 $K = A \times I$  とおき、 $f: K \rightarrow \mathbf{C}$  は連続とすると、次の (1), (2) が成り立つ。

(1)  $F(t) := \int_A f(x, t) dx$  ( $t \in I$ ) は  $I$  で定義された連続関数となる。

(2)  $\frac{\partial f}{\partial t}$  が  $K$  で連続ならば、 $F$  は  $I$  上  $C^1$  級で、 $F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) dx$ 。

(例えば杉浦 [36] 定理 14.1 を見よ。)

<sup>2</sup>大学院の入試問題の種になったりする。

<sup>3</sup>これは実はルベグの収束定理の守備範囲外である。

<sup>4</sup>楽屋裏から: この講義では、無限領域での微分方程式はほとんど取り扱っていない。Fourier 級数は大いに利用するが、Fourier 変換はあまり使わない。その理由は無限領域の問題に必要なテクニックは一段高度になり (例えばこの積分記号下の微分も積分範囲がコンパクトでないと難しくなるわけである)、学習に負荷がかかると考えたためである。

## B.2.5 一様収束

解析関係のあちこちで出て来たが、復習には微分積分学の教科書、例えば杉浦 [36] を勧める。一様収束の判定法としては、次の定理が良く使われる。

**定理 B.2.7 (Weierstrass の M test, 優収束定理)** 空でない集合  $A$  を定義域とする複素数値の関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  に対して、

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad (x \in A, n \in \mathbf{N}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

を満たす数列  $\{M_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が存在するならば、関数項級数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  は  $A$  で一様に絶対収束する。

(例えば、杉浦 [36] の定理 13.5)

**定理 B.2.8 (一様収束ならば項別積分可能)** 測度有限の可測集合  $A$  上定義された可積分な関数からなる関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が  $A$  上一様収束するならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) dx = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

(例えば、杉浦 [36] の定理 13.6)

**定理 B.2.9 (形式的に項別微分した関数列が一様収束するならば項別微分可能)**  $\mathbf{R}$  の有界閉区間  $I = [a, b]$  上定義された  $C^1$  級の関数からなる関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が、条件

(i) 任意の  $x \in I$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  が存在する。

(ii) 導関数からなる関数列  $\{f'_n\}$  は  $I$  上一様にある関数  $g$  に収束する。

を満たすならば、 $f$  は  $I$  で  $C^1$  級で  $f' = g$ 。

(例えば、杉浦 [36] の定理 13.7)

積分と違って微分は局所的な演算だから、定理 B.2.9 の仮定 (ii) における「一様収束」は「広義一様収束」に置き換えてもよい。

## B.2.6 3次元ベクトル解析から

定理 B.2.10 (Gauss の発散定理)  $C^1$  級の境界  $\partial\Omega$  を持つ  $\mathbf{R}^n$  の有界領域  $\Omega$  と、 $\bar{\Omega}$  上の  $C^1$  級ベクトル場  $\vec{f}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}^n$  に対して、

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

ただし、 $d\sigma$  は  $\partial\Omega$  の面積要素、 $\vec{n}$  は  $\partial\Omega$  上の点における  $\Omega$  の外向き単位法線ベクトルを表わす。

(例えば杉浦 [37] の定理 5.3 を見よ ( $n=3$  として説明してあるが、何次元でも同じである)。「 $C^1$  級の境界を持つ」や「閉集合上での  $C^1$  級関数」の意味の説明は、ここでは省略する。)

定理 B.2.11 (渦無しベクトル場はポテンシャルを持つ)  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^3$  内の単連結領域、 $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$  を  $C^1$  級のベクトル場とすると、次の (i), (ii) は互いに同値である。

- (i)  $\vec{f}$  はポテンシャルを持つ。すなわち  $\vec{f} = \operatorname{grad} \varphi$  を満たす  $C^2$  級の関数  $\varphi$  が存在する。
- (ii)  $\vec{f}$  は渦無しである。すなわち  $\Omega$  内の至るところで  $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$  が成り立つ。

(例えば杉浦 [37] の定理 6.4 を見よ。)

余談 B.2.1 (ベクトル解析の勉強) 筆者自身は、最初は電磁気学の中で古典的な 3 次元ベクトル解析として学び (参考書は『ファインマン物理学』 [57] だった)、数学の中で微分形式を用いた外微分法として再度<sup>5</sup>学び直すことになった。二度手間であるようだが、どちらか一方だけで済ませようとするのは無理があると思う<sup>6</sup>。最近、物理を履修していない数学科の学生が増えつつあるのは正直困っている (履修しなくて済むようになってしまっているわけだが…実は数学のカリキュラムは self-contained ではなかったということか)。電磁気学の説明をする数学書が増えたのも<sup>7</sup>「なるほど」と思う。

## B.2.7 Fourier 級数

周期  $2\pi$  の関数  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  に対して、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

で定義される  $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  を  $f$  の Fourier 係数、

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

<sup>5</sup>実は解析と幾何で合計二回。

<sup>6</sup>杉浦 [36], [37] では、3 次元ベクトル解析として説明してあり、それを採用した理由を述べてある。出版された当時、私の周りでは「そういう書き方にしたんだ (外微分法にできなかったんだ)」とやや残念がる人が多かったが、今では私は杉浦先生に賛成である。

<sup>7</sup>深谷賢治, 電磁場とベクトル解析, 岩波講座 現代数学への入門, 岩波書店 (1995) や落合卓四郎・高橋勝雄, 多変数の初等解析入門, 東京大学出版会 (2002) など。

を  $f$  の Fourier 級数と呼ぶ。

多くの場合に、Fourier 係数はもとの関数を再生する (一意的に決定する) のに十分な情報を持つ<sup>8</sup>。以下に紹介する簡単な場合には、Fourier 級数が通常の意味で収束し、和は  $f(x)$  そのものに等しい。

**定理 B.2.12** (連続区分的に  $C^1$  級関数の Fourier 級数の収束)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  は周期  $2\pi$  の周期関数で、連続かつ区分的に  $C^1$  級とするならば、

$$(B.2.1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{右辺は } \mathbf{R} \text{ 上一様絶対収束}).$$

ただし  $\{a_n\}_{n \geq 0}, \{b_n\}_{n \geq 1}$  は次式で定義される数列である:

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

この定理の証明は、高木 [42] 『解析概論』, 藤田 [61], あるいは大抵の Fourier 解析のテキストに載っている。これを認めれば、以下の系は簡単な計算で導出できる。

**系 B.2.13** (偶関数、奇関数の Fourier 級数展開) 上の定理 B.2.12 の仮定に加えて、

(1) (Fourier 余弦展開)  $f$  が偶関数である場合は、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (\text{右辺は } \mathbf{R} \text{ 上一様絶対収束}), \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

(2) (Fourier 正弦展開)  $f$  が奇関数である場合は、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (\text{右辺は } \mathbf{R} \text{ 上一様絶対収束}), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

任意の周期関数は簡単な変数変換で周期  $2\pi$  の周期関数に変換されるので、任意の周期関数が  $\cos, \sin$  で展開されることになる。例えば  $f$  が周期  $T$  の周期関数である場合は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

$$a_n := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \quad b_n := \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx$$

となる。

関数が有限区間で定義されている場合、適当な方法で周期関数として  $\mathbf{R}$  全体に拡張できるので、やはり  $\cos, \sin$  で表現できる。この「微分方程式 2」では次の形で利用することが多い。

<sup>8</sup> 分かりづらい表現かも知れないので少し補足する。通常の意味では収束しなくても、和の取り方や (色々な「総和法」がある)、位相を変える (例えば Hilbert 空間  $L^2$  や、超関数の導入が有名) ことで元の関数に収束させられることが多い。普通の意味では Fourier 級数は元の関数に等しくならなくても、元の関数の情報はもれなく保存している、と言えるであろう。



系 B.2.14  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$  が  $C^1$  級で  $f(0) = f(1) = 0$  を満たすならば、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \quad (\text{一様絶対収束}), \quad b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx.$$

(証明のあら筋: まず  $x \in [-1, 0)$  に対して  $f(x) = -f(-x)$  とおくことで、 $[-1, 1]$  まで奇関数として拡張する。それから周期 2 の周期関数として  $\mathbf{R}$  全体に拡張する。)

系 B.2.15  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$  が  $C^1$  級ならば、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x \quad (\text{一様絶対収束}), \quad a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx.$$

(証明のあら筋: まず  $x \in [-1, 0)$  に対して  $f(x) = f(-x)$  とおくことで、 $[-1, 1]$  まで偶関数として拡張する。それから周期 2 の周期関数として  $\mathbf{R}$  全体に拡張する。)

問  $\sin$  による展開では ( $\cos$  による展開では必要のない) 条件  $f(0) = f(1) = 0$  が必要になる理由を説明せよ。

定理 B.2.12 の証明で、次の定理が使われることがある (これを使わない証明もあるが、使うやりの方がメジャー)。ここでは応用範囲を広くするように (証明も分りやすいように?) やや抽象的な形で紹介する。

定理 B.2.16 (Bessel の不等式)  $X$  を内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を持つ内積空間、 $\{\varphi_\alpha\}$  をその正規直交系とすると、任意の  $f \in X$  に対して

$$\sum_{\alpha} |\langle f, \varphi_\alpha \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle$$

(証明のあら筋:  $x \in X$  に対して  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  とする。  $p := \sum_{\alpha} \langle f, \varphi_\alpha \rangle \varphi_\alpha$  とおくと、 $\|p\|^2 = \sum_{\alpha} |\langle f, \varphi_\alpha \rangle|^2$ 。さらに  $(f - p) \perp p$  であり、原点  $0$ ,  $p$ ,  $f$  という 3 点を頂点とする三角形が直角三角形になるので、ピタゴラスの定理から  $\|p\|^2 + \|f - p\|^2 = \|f\|^2$  が導かれ、 $\|p\|^2 \leq \|f\|^2$  が得られる<sup>9</sup>。)

## B.2.8 線型方程式

線型写像については、次の定理が基本的である。

定理 B.2.17 線型写像の核は線型空間である。

こう書くと身もふたもないくらい短いが...

$X, Y$  を体  $\mathbf{K}$  上の線型空間、 $f: X \rightarrow Y$  を線型写像とする。 $f$  の核とは

$$\ker f := f^{-1}(0) = \{x \in X; f(x) = 0\}$$

<sup>9</sup>余談であるが、内積がらみの不等式はほぼ例外無くピタゴラスの定理で解釈できる。



で定義される  $X$  の部分集合  $\ker f$  のことであつた。上の定理の正確な意味は、 $\ker f$  が  $X$  の線型部分空間になるということである。

問 定理 B.2.17 を証明せよ。

ところで解析学では、線型写像は線型作用素として表示するのが普通である。以下そうしてみよう。 $x \in X$  に対して  $f(x)$  を  $Ax$  と書くことにする。

すると  $\ker f$  は、方程式

$$(B.2.2) \quad Ax = 0$$

の解空間  $N(A) = \{x \in X; Ax = 0\}$  に他ならない。

このように線型作用素の値  $= 0$  と表わされる方程式を線型同次方程式と呼ぶ。

上の定理は、 $x_1, x_2, \dots, x_n$  が (B.2.2) の解ならば、それらの線型結合

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{K})$$

も (B.2.2) の解であることを主張している。これを重ね合せの原理 (principle of superposition) と呼ぶ。

つまり定理 B.2.17 を言い換えると、

線型同次方程式では重ね合せの原理が成り立つ

となる。

一方、 $Ax = 0$  ではなくて、右辺を一般的にした

$$(B.2.3) \quad Ax = b$$

の形の方程式を線型非同次方程式と呼ぶ。

線型非同次方程式 (B.2.3) の解が一つでも見つければ、(B.2.3) を解くことは、対応する線型同次方程式 (B.2.3) を解くことに帰着される。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 B.2.18  $X, Y$  は線型空間、 $A: X \rightarrow Y$  を線型作用素、 $x_0 \in X$  は  $Ax_0 = b$  を満たすとするとき、

$$\{x \in X; Ax = b\} = \{x_0 + z; z \in N(A)\}, \quad N(A) := \{z \in X; Az = 0\}.$$

標語的に書くと、

線型非同次方程式の一般解 = 線型非同次方程式の特解 + 線型同次方程式の一般解

問 定理 B.2.17 を証明せよ (定理の理解には一度自分で証明することが絶対に必要である)。

以上は線形代数で学んだことであるが、同じことが、線形代数以外のあちこちで出て来ることを理解するのが重要である。例えば、常微分方程式論を学んだときも、線形方程式は特に重要として詳しく学んだ。「単独の  $n$  階線形同次常微分方程式  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$  の解空間の次元は  $n$  である」などの定理を覚えているだろうか？ 偏微分方程式においても、線形方程式は基礎的で重要である。ただし、同次方程式の解空間は有限次元にはならないところが問題を難しくする。

例題 B.2.1 (線形性、線形同次性の区別) 以下の  $u$  の方程式について、線形性、線形同次性を判別せよ。

(1)  $\frac{d^2u}{dt^2} + p\frac{du}{dt} + qu = 0$  ( $p, q$  は定数).

(2)  $u_t = \Delta u + e^u$ .

(3)  $u(0, t) = A, u(1, t) = B$  ( $A, B$  は定数).

(4)  $u(0, t) = u(1, t), u_x(0, t) = u_x(1, t)$ .

解答 (1) 線形同次方程式. (2) 非線形方程式. (3) 線形非同次方程式. (4) 線形同次方程式. ■

## B.2.9 定数係数線型常微分方程式

この小節の内容は、常微分方程式を扱うテキストのほとんどすべてに載っている。例えば、藤田 [61], 俣野 [71], 笠原 [12] など。行列の指数関数については、杉浦・横沼 [39] も参考になる。

定理 B.2.19 ( $n$  階単独の定数係数線型常微分方程式) 複素係数多項式  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$  ( $a_n \neq 0$ ) の相異なる根を  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , それらの重複度を  $r_1, \dots, r_m$  とするとき、常微分方程式

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)x = 0 \quad \text{つまり} \quad a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^{(2)} + a_1 x' + a_0 x = 0$$

の一般解は

$$x(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{r_j} a_{jk} t^{k-1} e^{\lambda_j t} \quad (a_{jk} \text{ は任意定数})$$

である。特に解空間は (通常関数の和、スカラー積に関して)  $n$  次元の線型空間になる。

この定理の状況下で、関数系

$$t^{k-1} e^{\lambda_j t} \quad (1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq r_j)$$

を (解空間の基底になるという意味で) 解の基本系と呼ぶが、 $p(x)$  が実係数多項式である場合に、実数値関数からなる解の基本系が取れることを保証する次の定理は重要である。

**定理 B.2.20**  $p(x)$  を実係数  $n$  次多項式で、相異なる根を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \overline{\lambda_{m+1}}, \dots, \lambda_{m+2}, \overline{\lambda_{m+2}}, \dots, \lambda_\ell, \overline{\lambda_\ell}$ , ただし  $\lambda_j \in \mathbf{R}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ),  $\lambda_j \notin \mathbf{R}$  ( $j = m+1, m+2, \dots, \ell$ ) とおき、 $\lambda_j$  の重複度を  $r_j$ ,  $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$  ( $\mu_j, \nu_j \in \mathbf{R}$ ) とおくとき、

$$p(x) = a(x - \lambda_1)^{r_1}(x - \lambda_2)^{r_2} \cdots (x - \lambda_m)^{r_m} \\ \left[ (x - \mu_{m+1})^2 + \nu_{m+1}^2 \right]^{r_{m+1}} \left[ (x - \mu_{m+2})^2 + \nu_{m+2}^2 \right]^{r_{m+2}} \cdots \left[ (x - \mu_\ell)^2 + \nu_\ell^2 \right]^{r_\ell} \\ (a \text{ は } p(x) \text{ の最高次の係数})$$

となるが、常微分方程式

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)x = 0 \quad \text{つまり} \quad a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_2 x^{(2)} + a_1 x' + a_0 x = 0$$

の一般解は

$$x(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{r_j} a_{jk} t^{k-1} e^{\lambda_j t} + \sum_{j=m+1}^{\ell} \sum_{k=1}^{r_j} t^{k-1} e^{\mu_j t} (a_{jk} \cos \nu_j t + b_{jk} \sin \nu_j t) \\ (a_{jk}, b_{jk} \text{ は任意定数})$$

である。

**例題** 次の問に答えよ。ただし  $y$  は  $x$  の関数で  $y' = dy/dx$ ,  $y'' = d^2y/dx^2$  とする。

- (1)  $y'' - 2y' - 3y = 0$  の一般解を求めよ。初期条件  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$  を満たす解を求めよ。
- (2)  $y'' - 2y' + y = 0$  の一般解を求めよ。初期条件  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$  を満たす解を求めよ。
- (3)  $y'' + y' + y = 0$  の一般解を求めよ。
- (4)  $y'' - 3y' + 2y = 1 + x$  の一般解を求めよ。

**答**

- (1) 一般解は  $y(x) = Ae^{3x} + Be^{-x}$  ( $A, B$  は任意定数). 初期値問題の解は  $y(x) = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-x})$ .
- (2) 一般解は  $y(x) = Ae^x + Bxe^x$  ( $A, B$  は任意定数). 初期値問題の解は  $y(x) = e^x + 2xe^x$ .
- (3)  $y(x) = e^{-x/2} \left( A \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + B \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$  ( $A, B$  は任意定数).
- (4)  $y = ax + b$  とすると

$$y'' - 3y' + 2y = 0 - 3(a) + 2(ax + b) = 2ax + 2b - 3a$$

であるから、これが  $1 + x$  と等しくなるためには  $a = 1/2$ ,  $b = 5/4$ . ゆえに特解として  $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$  が得られる。一方、 $y'' - 3y' + 2y = 0$  の一般解は  $y = Ae^x + Be^{2x}$  ( $A, B$  は任意定数) であるから、求める一般解は

$$y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{5}{4} \quad (A, B \text{ は任意定数}). \blacksquare$$

定理 B.2.21 (1 階の連立定数係数線型常微分方程式)  $n$  次複素正方行列  $A$  と、 $x_0 \in \mathbf{C}^n$  が与えられたとき、常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

の解は

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

ただし

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

## B.2.10 不等式

当たり前過ぎるので定理として掲げることはやめておくが、

$$f \leq g \quad (A \text{ 上ほとんど至るところ}) \implies \int_A f(x) d\mu(x) \leq \int_A g(x) d\mu(x)$$

や

$$\left| \int_A f(x) d\mu(x) \right| \leq \int_A |f(x)| d\mu(x)$$

は頻出する。 $\mathbf{R}^n$  のルベグ可測集合上のルベグ積分だけでなく、色々な場合に成り立つ。特に絶対収束する級数に限ると、級数も一種の積分と考えられることに注意しよう。例えば Schwarz の不等式

$$\left| \int_A f(x)g(x) d\mu(x) \right| \leq \left( \int_A |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \left( \int_A |g(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}$$

を級数について翻訳すると

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{1/2}$$

となる。

## 付 録 C 一様収束、広義一様収束

一様収束 (uniform convergence) の概念は、既にあちこちで出て来たはずだが、身についていない人が多いように思われるので、簡単に復習しておく。証明など詳しいことは

杉浦光夫、解析入門 I, 東京大学出版会 (1980) の §13

など、微積分の教科書を見ると良い。

### C.1 各点収束では不十分

$\mathbf{R}^m$  の部分集合  $\Omega$  上で定義され、 $\mathbf{R}$  の値を取る関数列  $\{f_n\}$  に対して、 $x \in \Omega$  を取れば、実数列  $\{f_n(x)\}$  が得られる。この数列の極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  がすべての  $x \in \Omega$  に対して存在するとき、関数列  $\{f_n\}$  は  $\Omega$  で各点収束するという。

例 C.1.1 (連続関数の各点収束極限は不連続になり得る) 各  $n \in \mathbf{N}$  に対して、 $f_n: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  を

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x > 1/n) \\ nx & (-1/n \leq x \leq 1/n) \\ -1 & (x < -1/n) \end{cases}$$

で定義するとき、 $f_n$  は連続であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad f(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

となるが、 $f$  は不連続である。■

例 C.1.2 (各点収束だけでは項別積分出来ない)

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2}$$

とすると、 $\forall x \in \mathbf{R}$  に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

であるが、

$$\int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx = \frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx = \frac{\pi}{2} \neq 0 = \int_{\mathbf{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx. \blacksquare$$

問 魔女の帽子とも呼ばれる関数

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & (0 \leq x \leq 1/n) \\ -n^2(x - 2/n) & (1/n < x \leq 2/n) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 2/n) \end{cases}$$

について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx$ ,  $\int_{\mathbf{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$  を求めよ。

## C.2 一様収束の定義、compact 集合上の連続関数の最大値ノルム

$\mathbf{R}^m$  の部分集合  $\Omega$  上定義された実数値関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が、 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  に一様収束するとは、

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbf{N}) (\forall n \in \mathbf{N}: n \geq N) (\forall x \in \Omega)$$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

言い換えると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_n(x)| = 0$$

が成り立つことである。

任意の  $a \in \Omega$  に対して、不等式

$$|f(a) - f_n(a)| \leq \sup_{x \in \Omega} |f(x) - f_n(x)|$$

は明らかだから、関数列  $\{f_n\}$  が  $f$  に一様収束するならば、数列  $\{f_n(a)\}$  は  $f(a)$  に収束する。 $a$  は任意であったから、関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  は  $f$  に各点収束する。つまり

一様収束  $\implies$  各点収束.

特に  $\Omega$  がコンパクト集合  $K$  であって、 $K$  上の連続関数のみを考える場合は、 $K$  上の連続関数全体の集合  $X := C(K)$  に最大値ノルム

$$\|f\| := \max_{x \in K} |f(x)|$$

を導入すると、 $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が  $f$  に一様収束するとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$$

が成り立つことと同値である。すなわち

$$\{f_n\} \text{ が } f \text{ に一様収束} \iff X \text{ の距離で } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

が成り立つ。

注意 C.2.1 (sup ノルム) 連続でない関数に対しても使えるように、最大値ノルムをもう少し一般化した  $L^\infty$  ノルムが使われることが多い。■

### C.3 Weierstrass の M 判定法

関数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

が一様収束するための十分条件を与える、次の **Weierstrass の M 判定法** (M test) は使いやすい。

**命題 C.3.1 (Weierstrass の M 判定法)**  $\Omega$  上定義された関数列  $\{g_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ , 数列  $\{M_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  に対して

$$|g_n(x)| \leq M_n \quad (x \in \Omega, n \in \mathbf{N}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$

が成り立つならば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n$$

は  $\Omega$  で (ある関数に) 一様収束する。

**例 C.3.2** (巾級数は収束円の内部で広義一様収束する) 巾級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が  $z = z_0$  で収束するならば、 $r := |z_0|$  とおくとき、巾級数は  $\{z; |z| < r\}$  で広義一様収束する。

**証明** 収束する級数の一般項は 0 に収束する、すなわち  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n z_0^n| = 0$  であるから、

$$\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad |a_n z_0^n| \leq M \quad (n \in \mathbf{N}).$$

ゆえに

$$|a_n| \leq M r^{-n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

さて、 $0 < \rho < r$  なる  $\rho$  を任意に一つ固定するとき、 $|z| \leq \rho$  なる任意の  $z$  に対して

$$|a_n z^n| \leq |a_n| \rho^n \leq M r^{-n} \rho^n = M \left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

そして

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{\rho}{r}\right)^n = \frac{M}{1 - \rho/r} < \infty$$

であるから、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  は  $\{z; |z| \leq \rho\}$  で一様に収束する ( $M_n = M(\rho/r)^n$  として M 判定法を用いる)。■

## C.4 連続性の遺伝、広義一様収束の定義

連続性と一様収束の関係については、

命題 C.4.1 (連続関数列の一様収束極限は連続)  $\mathbf{R}^m$  の部分集合  $\Omega$  上の連続関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が、関数  $f$  に  $\Omega$  で一様収束するならば、 $f$  は  $\Omega$  で連続である。

という定理を学んだ人も多いであろう。証明は略するが、キーは

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$$

という不等式である (右辺第 1, 3 項は、一様収束の仮定から、 $N$  を大きくすれば小さくなり、右辺第 2 項は  $f_n$  の連続性から、 $x$  が  $a$  に近ければ小さくなる)。この系として、次の重要な結果が導かれる (Banach 空間という言葉はまだ学んでいない場合は、無視して構わない)。

系 C.4.2 (コンパクト集合上の実数値連続関数の空間は Banach 空間)  $\mathbf{R}^m$  のコンパクト部分集合  $K$  上の実数値連続関数の全体の集合  $C(K)$  は、最大値ノルムの定める距離について完備である。言い換えると、 $C(K)$  は Banach 空間である。

ところで、連続性は局所的な性質であるから、連続性を示すだけならば、一様収束性は過剰な要求であることが分かる。つまり、以下のように、一様収束性を少し弱くした「広義一様収束」という条件から、極限の連続性が導かれる。

$\mathbf{R}^m$  の部分集合  $\Omega$  上で定義された関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が、 $\Omega$  に含まれる任意のコンパクト集合上一様収束するとき、 $\{f_n\}$  は  $\Omega$  で広義一様収束するという。

命題 C.4.3  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^m$  の開部分集合、または閉部分集合とするとき、 $\Omega$  上の連続関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が、関数  $f$  に  $\Omega$  で広義一様収束すれば、 $f$  は  $\Omega$  で連続である。

## C.5 一様収束と項別積分

一様収束と積分との関係では、

命題 C.5.1 (一様収束するならば項別積分可能)  $\mathbf{R}^m$  のコンパクト集合  $K$  上の連続関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が、 $K$  上で関数  $f$  に一様収束するならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f_n(x) dx = \int_K f(x) dx.$$

という定理と、その系



系 C.5.2 (一様収束ならば項別積分可能)  $\mathbf{R}^m$  のコンパクト集合  $K$  上の連続関数  $\{g_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  の作る級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

が  $K$  上で一様収束するならば、

$$\int_K \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_K g_n(x) dx.$$

が重要であるが、この証明は簡単で、

$$\begin{aligned} \left| \int_K f_n(x) dx - \int_K f(x) dx \right| &\leq \int_K |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \max_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \int_K dx \\ &\leq \max_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \mu(K) \rightarrow 0 \\ &(\mu(K) \text{ は } K \text{ の測度}) \end{aligned}$$

で OK である (系については  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x)$  と考えれば良い)。

なお、広義積分の場合は少し難しくなる。応用上は、Lebesgue 積分論における「Lebesgue の収束定理」などを使う方が簡単なことが多い。積分の収束を示すには、広義一様収束では十分でないことに注意してほしい (連続性、微分可能性は局所的な性質だが、積分はそうでない！)。

## C.6 広義一様収束と項別微分

一様収束と微分との関係については、

命題 C.6.1  $\mathbf{R}$  の区間  $I$  上の  $C^1$  級の実数値関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  と、 $f: I \rightarrow \mathbf{R}$  に対して、

(1)  $\{f'_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が (ある関数に)  $I$  で広義一様収束

(2)  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  が  $f$  に  $I$  で (各点) 収束

という二条件が満足されるならば、 $f$  は  $I$  で  $C^1$  級で、

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

と、その系

系 C.6.2 (項別微分した級数が広義一様収束すれば項別微分は許される)  $\mathbf{R}$  の区間  $I$  上の  $C^1$  級関数  $\{g_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  の作る級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

が  $I$  上各点収束し、かつ項別微分して出来る級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} g'_n(x)$$

が  $I$  上で広義一様収束するならば

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} g'_n(x).$$

が基本的である。

(この命題の証明は、項別微分した級数について、項別積分定理を用いることでなされる。その際、積分の範囲は  $I$  全体ではなく、 $I$  に含まれるあるコンパクトな区間である。そのため、項別微分した級数についての広義一様収束性を仮定することになる。)

注意 C.6.3 実は、命題 C.6.1 の条件 (2) の代りに、

(2') ある点  $a \in I$  について、数列  $\{f_n(a)\}_{n \in \mathbf{N}}$  は収束する

を仮定すると、

$\forall x \in I$  について、数列  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$  は収束する

が導かれるので、その極限を  $f(x)$  をおくと、(2) が成り立つことになり、命題 C.6.1 の結論が示される。■

## 付録D Fourier 級数の復習

### D.1 Fourier 級数、Fourier 係数の定義

$\mathbf{R}$  上定義された周期  $2\pi$  の周期関数  $f$  が、一周区間 (例えば  $[-\pi, \pi]$ ) において可積分であるとき、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定義される数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $f$  の **Fourier 係数** と呼び、

$$s_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を  $f$  の **Fourier 級数** と呼ぶ。

Fourier は、任意の関数  $f$  に対して、 $f$  の Fourier 級数は  $f$  に等しい、つまり

$$f(x) = s_f(x) \quad (\text{右辺の級数が収束し左辺に等しい})$$

が成り立つ (正確に言うとは「関数の連続点  $x$  では」という条件つきで) と主張した。この主張は厳密には正しくないが<sup>1</sup>、多くの場合に成立する。

次の結果は有名である (が証明は面倒なので省略されることは多い、またこれを使わなくても済むことが大半である)。

- $f$  が連続であっても、Fourier 級数は収束するとは限らない。
- $f \in L^p$  ( $1 < p < \infty$ ) ならば、 $f$  の Fourier 級数はほとんど至るところ収束して  $f$  に一致する<sup>2</sup>。

**練習問題** ( $2\pi$  以外の周期の場合)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が周期  $2L$  の関数で、適度の滑らかさ (例えば  $C^1$ -級) を持っているとする。 $F(X) = f(LX/\pi)$  ( $X \in \mathbf{R}$ ) とおくと、 $F$  が周期  $2\pi$  の関数になることを利用して、次の式が成り立つことを示せ。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

ただし

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, dx. \blacksquare$$

<sup>1</sup>そもそも Fourier の時代には、関数やその連続性の概念、積分の定義、関数列の収束の概念などが未成熟であり、命題を正確に述べることに難しかった。

<sup>2</sup> $L^p$  や「ほとんど至るところ」の定義は Lebesgue 積分論で学ぶ。

## D.2 Fourier 係数の一意性

次の命題は、基本的過ぎるせいか、陽には書いてない本もあったりするが、重要である。

**命題 D.2.1 (Fourier 係数の一意性)**  $\mathbf{R}$  上定義された周期  $2\pi$  の関数  $f$  が数列  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$  によって

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \quad (x \in \mathbf{R})$$

と一様収束する級数によって表されるならば、

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

証明は例えば藤田 [63] にある。収束の意味を弱めた場合にも色々と結果はある。

## D.3 各点ごとの収束、一致

以下、基本的で、しばしば利用される結果のみを記す。証明は例えば藤田 [61] を見よ。

**補題 D.3.1** 連続関数  $f$  の Fourier 級数が一様収束するならば、 $f$  の Fourier 級数は  $f$  に一致する。

**定理 D.3.2**  $f$  が  $\mathbf{R}$  上定義された周期  $2\pi$  の連続関数で、区分的に  $C^1$  級とするならば、 $f$  の Fourier 級数は一様収束し、 $f$  に一致する。

**定理 D.3.3 (ジャンプがある場合の Fourier 級数の収束)**  $f$  が  $\mathbf{R}$  上定義された周期  $2\pi$  の関数で、区分的に  $C^1$  級ならば、 $f$  の Fourier 級数  $s_f(x)$  は至るところ収束して、

$$s_f(x) = \begin{cases} f(x) & (x \text{ は } f \text{ の連続点}) \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & (x \text{ は } f \text{ の不連続点}) \end{cases}$$

を満たす。ただし

$$f(x+0) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x+\varepsilon), \quad f(x-0) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(x-\varepsilon)$$

である。

**注意 D.3.4**  $f$  が区分的に  $C^1$  級とは、 $-\pi = x_0 < \exists x_1 < \exists x_2 < \dots < \exists x_{n-1} < x_n = \pi$  s.t.  $f$

は  $(x_j, x_{j+1})$  で  $C^1$  級で、 $f$  および  $f'$  の、区間の分点における、左右からの極限值

$$\begin{aligned} f(x_j + 0) &= \lim_{x \downarrow x_j} f(x), & f(x_{j+1} - 0) &= \lim_{x \uparrow x_{j+1}} f(x), \\ f'(x_j + 0) &= \lim_{x \downarrow x_j} f'(x), & f'(x_{j+1} - 0) &= \lim_{x \uparrow x_{j+1}} f'(x) \end{aligned}$$

$(j = 0, 1, \dots, n-1)$  が存在すること」であるとする。■

## D.4 正弦展開、余弦展開

$f$  が  $\mathbf{R}$  上定義された周期  $2\pi$  の関数という代わりに、 $[-\pi, \pi]$  上定義された、 $f(-\pi) = f(\pi)$  を満たす関数といっても (ほぼ) 同じことである。

$f$  が偶関数ならば、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0$$

となる。特に  $f$  の Fourier 級数は余弦関数だけからなる:

$$s_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

一方、 $f$  が奇関数ならば、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

となり、特に  $f$  の Fourier 級数は正弦関数だけからなる:

$$s_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

このことから、半分の区間では、余弦関数または正弦関数の一方だけで表現できる。

**系 D.4.1 (Fourier 余弦展開)**  $[0, \pi]$  上定義された関数  $f$  が連続で区分的に  $C^1$  級ならば、

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

によって  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  を定めるとき、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (\text{右辺の級数は } x \in [0, \pi] \text{ につき一様収束}).$$

証明  $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in [0, \pi]) \\ f(-x) & (x \in [-\pi, 0)) \end{cases}$  とおくと、 $\tilde{f}$  は  $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$  をみたす連続で区分的に  $C^1$  級の偶関数になるので、 $\tilde{f}$  について考えればよい。■

系 D.4.2 (Fourier 正弦展開)  $[0, \pi]$  上定義された関数  $f$  が連続で区分的に  $C^1$  級で、条件

$$f(0) = f(\pi) = 0$$

を満たすならば、

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で数列  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  を定めるとき、

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin nx \quad (\text{右辺は } x \in [0, \pi] \text{ につき一様収束}).$$

証明  $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in [0, \pi]) \\ -f(-x) & (x \in [-\pi, 0)) \end{cases}$  とおくと、 $\tilde{f}$  は  $\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$  をみたす連続で区分的に  $C^1$  級の奇関数になるので、 $\tilde{f}$  について考えればよい。■

## D.5 $L^2$ の意味での収束、一致

以下に示すように、 $L^2(-\pi, \pi)$  という Hilbert 空間を導入して、そこで Fourier 級数を考えると、非常にきれいな結果が成り立つ。すなわち、任意の  $f$  に対して  $f = s_f$ . ただし、級数の収束を、Fourier が元来考えた点別収束の意味ではなくて、平均収束の意味に取らねばならない。

ともすると、収束の意味を変えることは「ずるい撤退」のように感じられるかも知れないが、一般の Fourier 級数が、固有関数展開の結果として必然的に出現することを鑑みれば、その重要な性質「固有関数系の直交性」を表現するための内積から導かれるノルムで収束を考えるのは、極めて自然なことであろう。

定理 D.5.1  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ 、すなわち  $f$  が Lebesgue 可測で

$$\|f\|_{L^2(-\pi, \pi)} < \infty$$

ならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_{f,n}\|_{L^2(-\pi, \pi)} = 0.$$

ただし  $s_{f,n}$  は次式で定義される Fourier 級数の第  $n$  項までの部分和である:

$$s_{f,n}(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

また  $\|\cdot\|_{L^2(-\pi, \pi)}$  は次式で定義される  $L^2(-\pi, \pi)$  のノルムである:

$$\|g\|_{L^2(-\pi, \pi)} := \left( \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

(Parseval の等式、Bessel の不等式、指数関数  $e^{inx}$  を用いた展開についての説明を今後追加する予定。)

## D.6 勉強の手引き

微積分段階の Fourier 級数の話は、例えば藤田 [61] を見るとよい (1 次元熱方程式の勉強に必要な部分に限ると竹之内 [44] が便利であるが、絶版である)。そのレベルをマスターした後は、小松 [29] のようなやや高度の解説書もあるが<sup>3</sup>、普通の学生には、むしろ関数解析のテキストに読み進んで、Hilbert 空間論を学ぶことを勧めたい。あるいは超関数論的な Fourier 解析の取り扱いを学ぶのも良い (面白いし、後々役立つ)。なお、ケルナー [27] は Fourier 解析の広範な応用に触れてあり、とても面白い本であるので、見かけたらページをめくってみることを勧める<sup>4</sup>。

## D.7 バーゼル問題にチャレンジ

### D.7.1 バーゼル問題とは？

The Basel (Basler) Problem とは

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

<sup>3</sup>この本は必要があつて読む場合は (お世辞抜きで) 非常に良い本だと思うが、いわゆる紙数の制限によって、導関数と Fourier 級数の関係に一言も言及しておらず、偏微分方程式に應用してやろうという我々のような立場から見ると、かなり異常な構成の本になってしまっている。著者はそのことを謝っているが、大体日本では出版社が厚い本を出したがるため、著者達に最初から無理な計画を押し付けているせいでは？ と筆者は思う。大変に惜しい本である。

<sup>4</sup>ただし面白いと感じるためには、それなりの修行が必要かもしれない。一度見て面白さが分からなくても、折りに触れてめくってみることを勧める。

の値を求めよ、というもので L. Euler が 1735 年に解いた。答は  $\frac{\pi^2}{6}$ 。

### D.7.2 簡単な注意

さて、

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}, \quad S_o = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \quad S_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

とおくと、容易に

$$S_e = \frac{1}{2^2} S = \frac{1}{4} S, \quad S_o = S - S_e = \frac{3}{4} S, \quad S_a = S_o - S_e = \frac{3}{4} S - \frac{1}{4} S = \frac{1}{2} S$$

であることが分かるので、 $S, S_e, S_o, S_a$  のどれか一つが求まれば、他はみな分かることに注意しよう。例えば  $S = \pi^2/6$  が分かれば、

$$S = \frac{\pi^2}{6}, \quad S_e = \frac{1}{4} S = \frac{\pi^2}{24}, \quad S_o = \frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}, \quad S_a = \frac{1}{2} S = \frac{\pi^2}{12}.$$

以上、平方の場合について議論したが、何乗でも同じである、例えば 4 乗の場合も、

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad S_e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4}, \quad S_o = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}, \quad S_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$$

とおくと、

$$S_e = \frac{1}{16} S, \quad S_o = S - S_e = \frac{15}{16} S, \quad S_a = S_o - S_e = \frac{7}{8} S$$

という関係が導けるので、 $S = \frac{\pi^4}{90}$  から他のすべての値が求まる。

### D.7.3 Fourier 級数の計算で $S_*$ を求める

まず復習から。

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は周期  $2\pi$  とする。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおくと、Fourier 級数は

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

また Parseval の等式は

$$\pi \left[ \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right] = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$



$\operatorname{sign} x$  の展開から

$f(x) = \operatorname{sign} x$  ( $-\pi < x < \pi$ ) は奇関数であるので  $a_n = 0$ , そして

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ は偶数}) \\ \frac{4}{(2k-1)\pi} & (n = 2k-1, k \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

となるので

$$\operatorname{sign} x = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right).$$

Parseval の等式より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$|x|$  の展開から

$f(x) = |x|$  ( $-\pi < x < \pi$ ) は偶関数であるので  $b_n = 0$ , そして  $a_0 = 0$ ,

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 2k, k \in \mathbf{N}) \\ \frac{-4}{(2k-1)^2\pi} & (n = 2k-1, k \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

となるので

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots \right).$$

$x = 0$  を代入して、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Parseval の等式より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

$x^2$  の展開から

$f(x) = x^2$  ( $-\pi < x < \pi$ ) とすると、 $f$  は偶関数であるので  $b_n = 0$ , また  $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2$ ,  $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$  ( $n \geq 1$ ) であるので、

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \cdots \right).$$

$x = 0$  を代入して、

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

また  $x = \pi$  を代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

が分かる。一方 Parseval の等式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

## 付 録 E Fourier 変換の応用

これまで有界な区間における微分方程式を Fourier 級数で解いてきたが、 $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$  における微分方程式を扱うのに Fourier 変換が利用できる。

### E.1 Fourier 変換の復習 (一部予習?)

関数  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  の「素姓が良ければ」、その Fourier 変換と呼ばれる  $\mathcal{F}f = \hat{f}: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  が<sup>1</sup>

$$(E.1.1) \quad \hat{f}(y) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbf{R}^N} f(x) e^{-ix \cdot y} dx \quad (y \in \mathbf{R}^N)$$

で定義される<sup>1</sup>。ただし  $i = \sqrt{-1}$  で、 $x \cdot y$  は  $x$  と  $y$  の内積

$$x \cdot y := \sum_{j=1}^N x_j y_j, \quad x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad y = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_N)$$

を表わす。

**注意 E.1.1** (Fourier 変換  $\mathcal{F}f$  はどういう関数に対して定義できるか) (E.1.1) が普通の積分として意味を持つには  $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$  であることが必要十分であるが、Fourier 変換は重要なので、実に広範囲の関数に対して定義されている。簡単にまとめておく。

- (1)  $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$  の場合、(E.1.1) を  $f$  の Fourier 変換の定義とする。このとき  $\mathcal{F}f$  は有界連続関数で、

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \mathcal{F}f(y) = 0$$

を満たす (Riemann-Lebesgue の定理)。

- (2)  $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$  の場合、 $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$  とは限らないが、いわゆる稠密性の議論によって  $f$  の Fourier 変換を定義する。つまり

$$f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \quad (n \in \mathbf{N}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} = 0$$

となる  $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  を取って、

$$\mathcal{F}f := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}f_n \quad (L^2(\mathbf{R}^N) \text{ における極限})$$

とする (詳細は略する)。この結果  $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbf{R}^N)$  となり、 $\mathcal{F}: L^2(\mathbf{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^N)$  は Hilbert 空間の同型写像になる。

<sup>1</sup> $f$  の Fourier 変換を表す記号として、 $\mathcal{F}f$  でなく、 $\mathscr{F}f$  のような文字を使う方が多いような気がする...

(3)  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  の場合<sup>2</sup>、(E.1.1) で  $f$  の Fourier 変換が定義できる。このとき  $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  で、 $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbf{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  は Frechét 空間の同型写像になる。

(4)  $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  の場合<sup>3</sup>、双対性を用いて  $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  を定義する。すなわち

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^N)).$$

このとき  $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  は位相線型空間としての同型写像になる。■

同様に  $g: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  に対して、その逆 Fourier 変換と呼ばれる  $\mathcal{F}^*g = \tilde{g}: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  が

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbf{R}^N} g(y) e^{ix \cdot y} dy \quad (x \in \mathbf{R}^N)$$

で定義される。

### 導関数の Fourier 変換

$$(E.1.2) \quad \mathcal{F}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f\right) = (iy)^\alpha \mathcal{F}f, \quad \mathcal{F}^*\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha g\right) = (-ix)^\alpha \mathcal{F}^*g.$$

(コンパクトに  $\mathcal{F}\partial_{x_j} = (iy_j)\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}^*\partial_{y_j} = (-ix_j)\mathcal{F}^*$  と書ける。)

### 座標をかけてから Fourier 変換

$$(E.1.3) \quad \mathcal{F}(x^\alpha f) = \left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha \mathcal{F}f, \quad \mathcal{F}^*(y^\alpha g) = \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \mathcal{F}^*g.$$

(コンパクトに  $\mathcal{F}x_{j\cdot} = (i\partial_{y_j})\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}^*y_{j\cdot} = (-i\partial_{x_j})\mathcal{F}^*$  と書ける。)

### Fourier 変換の等長性

$$(E.1.4) \quad (\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)_{L^2(\mathbf{R}^N)} = (\varphi, \psi)_{L^2(\mathbf{R}^N)} \quad (\varphi, \psi \in L^2(\mathbf{R}^N))$$

特に

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbf{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}.$$

### 畳み込みと Fourier 変換

$$(E.1.5) \quad \mathcal{F}(\varphi * \psi) = (2\pi)^{N/2} \mathcal{F}\varphi \mathcal{F}\psi.$$

## E.2 微分方程式への応用

例 E.2.1 (常微分方程式の境界値問題) 与えられた  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  に対して

$$(E.2.1) \quad -u'' + k^2 u = f \quad (\text{in } \mathbf{R})$$

$$(E.2.2) \quad u(x) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

<sup>2</sup> $\mathcal{S}(\mathbf{R}^N)$  は  $\mathbf{R}^N$  上の急減小関数の全体。 $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  と書かれることが多い？

<sup>3</sup> $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  は  $\mathbf{R}^N$  上の緩増加超関数の全体。

を満たす  $u = u(x)$  を求めよ、という問題を考える。

微分方程式 (E.2.1) の両辺を Fourier 変換する。まず線形性から

$$-\mathcal{F}(u'') + k^2 \mathcal{F}u = \mathcal{F}f.$$

公式 (E.1.2) より

$$-(iy)^2 \hat{u}(y) + k^2 \hat{u}(y) = \hat{f}(y).$$

ゆえに

$$\hat{u}(y) = \frac{1}{y^2 + k^2} \hat{f}(y).$$

ところで

$$\frac{1}{y^2 + k^2} = \hat{g}(y), \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} e^{-k|x|}$$

である (この式は容易に示せる。こういう  $g$  をどうやって見つけるかと言うと — 要するに  $g$  は  $1/(1+y^2)$  の逆 Fourier 変換である。)。ゆえに

$$\hat{u}(y) = \hat{g}(y) \hat{f}(y).$$

公式 (E.1.5) から右辺は  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} g * f$  のフーリエ変換であるから

$$\mathcal{F}u = \mathcal{F} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g * f \right).$$

両辺の逆 Fourier 変換を取ると

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g * f.$$

すなわち

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} g(x-y) f(y) dy = \frac{1}{2k} \int_{\mathbf{R}} e^{-k|x-y|} f(y) dy. \quad \blacksquare$$

例 E.2.2 (熱方程式の初期値問題) 与えられた  $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  に対して、

$$(E.2.3) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad (x \in \mathbf{R}, t > 0),$$

$$(E.2.4) \quad u(x, t) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty, t > 0),$$

$$(E.2.5) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

を満たす  $u = u(x, t)$  を求めよ。

$u = u(x, t)$  の  $t$  をパラメーターとみなし、 $x$  について Fourier 変換したものを  $\hat{u} = \hat{u}(\cdot, t)$  と表わす。つまり

$$\hat{u}(\xi, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} u(x, t) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

熱方程式 (E.2.3) の両辺を  $x$  について Fourier 変換すると

$$\mathcal{F} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \mathcal{F} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 u \right).$$

素性の良い関数を相手にしているため、 $x$  に関する Fourier 変換  $\mathcal{F}$  と  $\partial/\partial t$  は可換であること、それと公式 (E.1.2) から

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\xi, t) = (i\xi)^2 \hat{u}(\xi, t).$$

すなわち

$$(E.2.6) \quad \frac{d}{dt} \hat{u}(\xi, t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t).$$

一方、初期条件 (E.2.5) を Fourier 変換して

$$(E.2.7) \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$$

であるから、(E.2.6), (E.2.7) という常微分方程式の初期値境界値問題が得られた。解は容易に求まる:

$$\hat{u}(\xi, t) = \exp(-t\xi^2) \hat{f}(\xi).$$

公式  $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}f \mathcal{F}g$  を用いて

$$(E.2.8) \quad \hat{u}(\xi, t) = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t\xi^2) \hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{H}(\xi, t) \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[H(\cdot, t) * f](\xi).$$

ただし

$$(E.2.9) \quad H(x, t) := \mathcal{F}^* \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t\xi^2) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t\xi^2)}{\sqrt{2\pi}} e^{ix\xi} d\xi.$$

$H(x, t)$  の具体形は後で計算するとして、(E.2.8) から

$$\hat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}[H(\cdot, t) * f](\xi)$$

であるから、両辺を逆 Fourier 変換して、

$$u(x, t) = H(\cdot, t) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x - y, t) f(y) dy.$$

(E.2.9) を実際に計算して、 $H$  の具体形を求めよう。

$$H(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t\xi^2) \cdot e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t\xi^2 + ix\xi) d\xi.$$

$$-t\xi^2 + ix\xi = -t \left( \xi^2 - \frac{ix}{t} \xi \right) = -t \left( \xi - \frac{ix}{2t} \right)^2 + t \cdot \frac{-x^2}{4t^2} = -t \left( \xi - \frac{ix}{2t} \right)^2 - \frac{x^2}{4t}$$

であるから、

$$\exp(-t\xi^2 + ix\xi) = \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \exp\left[-t \left( \xi - \frac{ix}{2t} \right)^2\right].$$

ゆえに

$$H(x, t) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-t \left( \xi - \frac{ix}{2t} \right)^2\right] d\xi.$$

$e^{-tz^2}$  という関数を、右図の積分路 (準備中、複素平面上で、 $-X, X, X - \frac{ix}{2t}, -X - \frac{ix}{2t}$  を頂点とする長方形を、正の向きに一周する曲線とする) に沿って積分することを考えると、

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -t \left( \xi - \frac{ix}{2t} \right)^2 \right] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t\xi^2) d\xi$$

が示される。 $s := \sqrt{t}\xi$  とおくと、 $d\xi = \frac{ds}{\sqrt{t}}$  であるから、

$$I = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2) ds = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

ゆえに

$$(E.2.10) \quad H(x, t) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

この関数  $H(x, t)$  を、熱方程式の基本解 (the fundamental solution to the heat equation) あるいは熱核 (heat kernel) と呼ぶ。

$$(E.2.11) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x - y, t) f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x - y)^2}{4t}\right] f(y) dy. \blacksquare$$

以上の議論は発見的考察というもので、(E.2.11) の  $u$  が本当に熱方程式の初期値問題の解であるか、証明が必要である (準備中)。

## (E.2.10) の別証明

広義積分の微分と積分の順序交換というものが気になるが、そこに目をつむると、(複素関数論を使わず) 割と簡単な証明である。

$$g(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx$$

とおくと、

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{i}{2a} e^{-ax^2} \right)' e^{-ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ \frac{i}{2a} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2a} e^{-ax^2} (-i\xi) e^{-ix\xi} dx \right) \\ &= -\frac{\xi}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx \\ &= -\frac{\xi}{2a} g(\xi). \end{aligned}$$

(途中の部分積分の正当化は難しくない。)

$\xi = 0$  のときは値は簡単に求まる。

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

ゆえに、 $g$  は微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{d\xi} = -\frac{\xi}{2a}y, \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

の解である。これを解いて求めると

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

(念のため:  $y' = -\frac{\xi}{2a}y$  より  $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\xi}{2a} d\xi$  より  $\log y = -\frac{\xi^2}{4a}$  であるから  $y = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ .)

覚えやすくなるように、色々なものとの結びつけ

いわゆるガウシアンの変換はやはりガウシアンである。実際、 $t > 0$  に対して、

$$(E.2.12) \quad \mathcal{F} \left[ e^{-tx^2} \right] (\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{\sqrt{2t}}, \quad \mathcal{F}^* \left[ e^{-t\xi^2} \right] (x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{2t}}.$$

特に  $t = \frac{1}{2}$  とすると、

$$(E.2.13) \quad \mathcal{F} \left[ e^{-x^2/2} \right] (\xi) = e^{-\xi^2/2}, \quad \mathcal{F}^* \left[ e^{-\xi^2/2} \right] (x) = e^{-x^2/2}.$$

すなわち、 $e^{-x^2/2}$  は、Fourier 変換の固有値 1 に属する固有ベクトルである。それを  $\mathbf{R}$  での積分が 1 であるように正規化した

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

は、標準正規分布  $N(0; 1)$  の確率密度関数に他ならない<sup>4</sup>。

(E.2.13) と

$$\mathcal{F} [f(ax)] (\xi) = \frac{1}{a} [\mathcal{F} f] \left( \frac{\xi}{a} \right), \quad \mathcal{F}^* [g(a\xi)] (x) = \frac{1}{a} [\mathcal{F}^* g] \left( \frac{x}{a} \right)$$

---

<sup>4</sup>平均  $m$ , 分散  $\sigma^2$  の正規分布  $N(m; \sigma^2)$  の確率密度関数は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left( -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right)$$

であった。



によって、(E.2.12) が再生できる。例えば

$$\mathcal{F}^* \left[ e^{-t\xi^2} \right] (x) = \mathcal{F}^* \left[ \exp \left( -\frac{(\sqrt{2t}\xi)^2}{2} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2t}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{2t}} \right)^2 \right) = \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{4t} \right)}{\sqrt{2t}}.$$

これから

$$\mathcal{F}^* \left[ \frac{\exp(-t\xi^2)}{\sqrt{2\pi}} \right] (x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp \left( -\frac{x^2}{4t} \right).$$

これは、平均 0, 分散  $2t$  の正規分布の確率密度関数  $H(x, t)$  のフーリエ変換が  $\frac{\exp(-t\xi^2)}{\sqrt{2\pi}}$  ということを示している。

## 付 録 F 常微分方程式の Green 関数

### F.1 1次元 Poisson 方程式

Poisson 方程式の Dirichlet 境界値問題の 1 次元版は、次のような常微分方程式の境界値問題である:

$$-x''(t) = f(t), \quad x(0) = x(1) = 0.$$

この問題の解は (結果を先に書くと)

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds, \quad G(t, s) := \begin{cases} s(1-t) & (0 \leq s \leq t \leq 1) \\ t(1-s) & (0 \leq t \leq s \leq 1). \end{cases}$$

この事実の証明を以下に与える。

#### F.1.1 素朴に積分して解く

微分方程式を 1 回積分すると

$$x'(t) - x'(0) = - \int_0^t f(s) ds.$$

続けてもう 1 回積分すると

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) - x'(0)t &= - \int_0^t \left( \int_0^r f(s) ds \right) dr = - \int_0^t \left( \int_s^t f(s) dr \right) ds \\ &= - \int_0^t (t-s) f(s) ds. \end{aligned}$$

ゆえに ( $x(0) = 0$  を用いて)

$$x(t) = x(0) + x'(0)t - \int_0^t (t-s) f(s) ds = x'(0)t - \int_0^t (t-s) f(s) ds.$$

$x'(0)$  を消去したい。そのため  $t = 1$  を代入する。

$$0 = x(1) = x'(0) - \int_0^1 (1-s) f(s) ds$$

であるから、

$$x'(0) = \int_0^1 (1-s) f(s) ds.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}x(t) &= t \int_0^1 (1-s)f(s) ds - \int_0^t (t-s)f(s) ds \\&= \int_0^t [t(1-s) - (t-s)] f(s) ds + t \int_t^1 (1-s)f(s) ds \\&= \int_0^t s(1-t)f(s) ds + \int_t^1 t(1-s)f(s) ds.\end{aligned}$$

### F.1.2 定数変化法で解く

$x''(t) = 0$  の一般解は  $x(t) = C_1 + C_2 t$  ( $C_1, C_2$  は任意定数) である。そこで定数変化法に従い  $x(t) = C_1(t) + C_2(t)t$  とおく。

$$x'(t) = C_1'(t) + C_2'(t)t + C_2(t).$$

$$(F.1.1) \quad C_1'(t) + C_2'(t)t = 0$$

を仮定すると、 $x'(t) = C_2(t)$ 。ゆえに  $x''(t) = C_2'(t)$  であるから

$$C_2'(t) = -f(t).$$

(F.1.1) から

$$C_1'(t) = -C_2'(t)t = tf(t).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}C_1(t) &= C_1(0) + \int_0^t sf(s) ds, \\C_2(t) &= C_2(0) - \int_0^t f(s) ds.\end{aligned}$$

これから

$$x(t) = C_1(0) + \int_0^t sf(s) ds + C_2(0)t - t \int_0^t f(s) ds.$$

境界条件  $x(0) = 0$  より  $C_1(0) = 0$  である。  $x(1) = 0$  より

$$0 = x(1) = \int_0^1 sf(s) ds - \int_0^1 sf(s) ds.$$

ゆえに

$$C_2(0) = \int_0^1 f(s) ds - \int_0^1 sf(s) ds = \int_0^1 (1-s)f(s) ds.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t sf(s) ds + \int_0^1 t(1-s)f(s) ds - t \int_0^t f(s) ds \\&= \int_0^t [s + t(1-s) - t] f(s) ds + \int_t^1 t(1-s)f(s) ds \\&= \int_0^t s(1-t)f(s) ds + \int_t^1 t(1-s)f(s) ds.\end{aligned}$$

## F.2 一般の2階線形常微分方程式の境界値問題のGreen関数

ここに書いてある話は良く知られていることではあるが、(初学者は探すのが一苦勞であろうから) 参考書をあげれば、例えば藤田 [61]。それから桂田 [17] というノートがある。[17] で書いたまとめを引用しておく。

### 2 階線形常微分方程式の境界値問題のまとめ

- 正值性の仮定 ( $p(t) \geq \exists \delta > 0$ ) を満たす 2 階線型常微分方程式の境界値問題について、交代定理「可解  $\Leftrightarrow$  一意  $\Leftrightarrow$  一意可解」がなりたつ。
- 同次境界条件の場合、一意可解性が成り立つならば、境界値問題の解は Green 関数を用いて表わされる。
- 形式的自己共役な場合には、一意可解性の簡単で具体的な判定条件がある。またその場合、Green 関数は対称性を持つ。
- 形式的自己共役でない場合も、十分小さい (絶対値の大きな負数)  $\lambda$  に対して、 $L_\lambda := L_0 + \lambda$  に対する境界値問題の一意可解性が成り立つ。

また明治大学数学科3年生向けの「常微分方程式1」(by 森本先生)でも講義される。以下のまとめかたは、その講義の内容を拝借したものである。

直接のつながりはないが、初期値問題の Green 関数については、桂田 [16] を見よ。

$A \in M(n; \mathbb{C})$ ,  $b \in \mathbb{C}^n$  に対して、

$$(F.2.1) \quad Ax = b$$

という線形方程式を考えよう (未知数の個数 = 方程式の個数, の連立1次方程式)。

$$A^{-1} \text{ が存在} \iff (Ax = 0 \implies x = 0)$$

に注意しよう。このとき、任意の  $b$  に対して、(F.2.1) の解は一意的に存在し、それは  $x = A^{-1}b$  で与えられる。

定理 **F.2.1** (同次方程式の解の一意性  $\implies$  非同次方程式の解の一意存在 (交代定理), **Green** 関数)  
 $I = [a, b], p, q, r \in C(I; \mathbf{C}),$

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t \in I \quad p(t) \geq \delta$$

とするとき、

$$L_0[u] := pu'' + qu' + ru \quad (u \in C^2(I; \mathbf{C}))$$

とおく (つまり  $L_0[u](t) = p(t)u''(t) + q(t)u'(t) + r(t)u(t), t \in I$ )。同次 Dirichlet 境界値問題

$$L_0[u](t) = 0 \quad (a < t < b), \quad u(a) = u(b) = 0$$

の解が  $u \equiv 0$  のみであれば、 $\forall f \in C(I; \mathbf{C})$  に対して、

$$(F.2.2) \quad L_0[u](t) = f(t) \quad (a < t < b), \quad u(a) = u(b) = 0$$

の解は一意的に存在し、次式で与えられる:

$$u(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds \quad (t \in I).$$

ただし

$$G(t, s) := \begin{cases} \frac{\varphi(t)\psi(s)}{W(s)p(s)} & (a \leq t \leq s \leq b) \\ \frac{\varphi(s)\psi(t)}{W(s)p(s)} & (a \leq s \leq t \leq b), \end{cases}$$

$\varphi$  は  $L_0[\varphi] = 0, \varphi(a) = 0, \varphi'(a) = 1$  の解,

$\psi$  は  $L_0[\psi] = 0, \psi(b) = 0, \psi'(b) = 1$  の解,

$$W(s) := \det \begin{pmatrix} \varphi(s) & \psi(s) \\ \varphi'(s) & \psi'(s) \end{pmatrix} = \varphi(s)\psi'(s) - \psi(s)\varphi'(s).$$

$G$  を境界値問題 (F.2.2) の **Green 関数 (Green function)** と呼ぶ。

例 **F.2.2**  $u''(t) = f(t), u(0) = u(1) = 0$  という問題の場合、

$$\varphi'' = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1,$$

$$\psi'' = 0, \quad \psi(1) = 0, \quad \psi'(1) = 1$$

から

$$\varphi(s) = s, \quad \psi(s) = s - 1$$

と求まるので、

$$W(s) = \det \begin{pmatrix} \varphi(s) & \psi(s) \\ \varphi'(s) & \psi'(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} s & s-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = s \cdot 1 - (s-1) \cdot 1 = 1,$$

これと  $p(s) \equiv 1$  から

$$u(t) = \int_0^t G(t, s) f(s) ds,$$

$$G(t, s) = \begin{cases} t(s-1) & (0 \leq t \leq s \leq 1) \\ s(t-1) & (0 \leq s \leq t \leq 1) \end{cases}$$

が得られる。F.1 節の問題の解は、これに  $-1$  をかけたものである。■

なお、藤田 [61] 定理? では、

$$-u'(a) + \sigma_1 u(a) = u'(b) + \sigma_2 u(b) = 0$$

という境界条件も扱っている。

任意の  $f$  に対して解が存在することから、一意性が出るか?

$p, q, r \in C([a, b]; \mathbf{C})$  かな?  $p(t) \geq \delta > 0$  はどこで効くのだろう?

証明  $\varphi, \psi$  を定める常微分方程式の初期値問題は、確かに一意可解である。

$\varphi, \psi$  は 1 次独立である。実際、 $c_1 \varphi + c_2 \psi = 0$  とすると、

$$v(t) := c_1 \varphi(t) = -c_2 \psi(t)$$

とおくと、

$$L_0[v] = 0, \quad v(a) = c_1 \varphi(a) = 0, \quad v(b) = -c_2 \psi(b) = 0$$

であるから、一意性の仮定から  $v = 0$  が導かれ、

$$c_1 = c_1 \varphi'(a) = v'(a) = 0, \quad c_2 = c_2 \psi'(b) = -v'(b) = 0.$$

ゆえに Wronskian は 0 にならない:  $W(s) \neq 0$  ( $s \in I$ ).

後のために、 $\varphi(b) \neq 0, \psi(a) \neq 0$  を示す。もしも  $\varphi(b) = 0$  と仮定すると、 $\varphi$  は  $L_0[\varphi] = 0, \varphi(a) = \varphi(b) = 0$  を満たすので、仮定 (同次境界値問題の解の一意性) から、 $\varphi \equiv 0$  が導かれ、 $\varphi'(a) = 1$  と矛盾する。同様にして  $\psi(a) \neq 0$  が得られる。

定数変化法で解を求めよう。

$$u(t) = c_1(t) \varphi(t) + c_2(t) \psi(t)$$

とおくと、

$$u'(t) = (c_1' \varphi + c_2' \psi) + (c_1 \varphi' + c_2 \psi').$$

ここで

$$(F.2.3) \quad c_1'(t) \varphi(t) + c_2'(t) \psi(t) = 0 \quad (t \in I)$$

を仮定すると、

$$u'(t) = c_1 \varphi' + c_2 \psi'.$$

ゆえに

$$u''(t) = c_1' \varphi' + c_2' \psi' + c_1 \varphi'' + c_2 \psi''.$$

これから、

$$L_0[u] = c_1 L_0[\varphi] + c_2 L_0[\psi] + p(c_1' \varphi' + c_2' \psi').$$

$u$  が  $L_0[u] = f$  の解であるためには

$$(F.2.4) \quad c_1' \varphi' + c_2' \psi' = \frac{f}{p}$$

であることが必要十分である。(F.2.3), (F.2.4) をまとめて

$$\begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{p} \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} \psi' & -\psi \\ -\varphi' & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\psi f}{pW} \\ \frac{\varphi f}{pW} \end{pmatrix}.$$

これから ( $a$  と  $b$  のどちらから積分するかは、後を見越した工夫)

$$(F.2.5) \quad c_1(t) = c_1(b) + \int_b^t \frac{-\psi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds, \quad c_2(t) = c_2(a) + \int_a^t \frac{\varphi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds.$$

ゆえに

$$u(t) = \left( c_1(b) + \int_b^t \frac{\psi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds \right) \varphi(t) + \left( c_2(a) + \int_a^t \frac{\varphi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds \right) \psi(t).$$

境界条件に代入して ( $\varphi(a) = \psi(b) = 0$  に注意すると)、

$$0 = u(a) = c_2(a)\psi(a), \quad 0 = u(b) = c_1(b)\varphi(b).$$

$\psi(a) \neq 0, \varphi(b) \neq 0$  であるから、 $c_1(b) = c_2(a) = 0$ . ゆえに

$$u(t) = \varphi(t) \int_t^b \frac{\psi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds + \psi(t) \int_a^t \frac{\varphi(s)f(s)}{W(s)p(s)} ds = \int_a^b G(t, s)f(s) ds. \blacksquare$$

$p, q, r$  が実数値で、 $q = p'$  である場合、 $L_0$  は形式的自己共役であるという<sup>1</sup>。これは

$$(L_0[u], v) = (u, L_0[v])$$

となることにちなむ。実際

$$L_0[u] = pu'' + qu' + ru = pu'' + p'u' + ru = (pu')' + ru$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} (L_0[u], v) &= \int_a^b (pu')'v dt + \int_a^b ruv dt = [p(t)u'(t)v(t)]_a^b - \int_a^b (pu')v' dt + \int_a^b ruv dt \\ &= - \int_a^b u'(pv') dt + \int_a^b ruv dt = - [u(t)p(t)v'(t)]_a^b + \int_a^b u(pv')' dt + \int_a^b ruv dt \\ &= \int_a^b u[(pv')' + rv] dt = (u, L_0[v]). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>もともと「自己共役」とは、Hilbert 空間内の線形作用素についての言葉である。

この証明を見れば分かるように、「形式的自己共役」というときは、境界条件も込めて考えるべきものである(そういう意味では、境界条件に言及しない「 $L_0$  は形式的自己共役」という言い方には問題がある)。

**定理 F.2.3** (定数項の係数  $\leq 0$  である形式的自己共役な境界値問題の一意性)  $I = [a, b]$ ,  $p, r \in C(I; \mathbf{R})$ ,

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t \in I \quad p(t) \geq \delta,$$

$$\forall t \in I \quad r(t) \leq 0$$

とするとき、

$$L_0[u] := (pu')' + ru \quad (u \in C^2(I; \mathbf{C}))$$

とおくと、境界値問題

$$L_0[u](t) = 0 \quad (a < t < b), \quad u(a) = u(b) = 0$$

の解は  $u \equiv 0$  のみである。

**証明**  $u_1, u_2$  が共に解とする。  $u := u_1 - u_2$  とおく。

$$L_0[u] = 0, \quad u(a) = u(b) = 0$$

が成り立つ。  $L_0[u]$  に  $u$  をかけて部分積分すると

$$\begin{aligned} 0 = (L_0[u], u) &= \int_a^b (pu')' u \, dt + \int_a^b r u^2 \, dt = [pu' u]_a^b - \int_a^b pu' u' \, dt + \int_a^b r u^2 \, dt \\ &= - \int_a^b p(u')^2 \, dt + \int_a^b r u^2 \, dt \leq -\delta \int_a^b (u')^2 \, dt. \end{aligned}$$

移項して  $\delta$  で割って

$$\int_a^b (u')^2 \, dt \leq 0.$$

これから  $u' = 0$ .  $u$  は定数だが、  $u(a) = u(b) = 0$  なので実は  $u = 0$ . ゆえに  $u_1 = u_2$ . ■

**定理 F.2.4** 定数項の係数が  $\leq 0$  であるような形式的自己共役作用素の境界値問題に対して、Green 関数が存在する。

**証明** 上の二つの定理の系である。 ■



## 付 録 G misc

本文中で述べた細かい事実の証明や、コンピューターを使った確認実験についてのおもちゃ箱。

### G.1 弾性体の方程式から P 波、S 波の方程式を導く

1.1 の問の解答を示す。

弾性方程式

$$(G.1.1) \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{u}).$$

$p := \operatorname{div} \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s} := \operatorname{rot} \mathbf{u}$  とおく。(G.1.1) の両辺に  $\operatorname{div}$  をほどこし、

$$(G.1.2) \quad \operatorname{div} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div},$$

$$(G.1.3) \quad \operatorname{div} \Delta = \Delta \operatorname{div},$$

$$(G.1.4) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} = \Delta$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \mu \Delta \operatorname{div} \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= (\lambda + 2\mu) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\rho \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta p.$$

(G.1.1) の両辺に  $\operatorname{rot}$  をほどこし、

$$(G.1.5) \quad \operatorname{rot} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{rot},$$

$$(G.1.6) \quad \operatorname{rot} \Delta = \Delta \operatorname{rot},$$

$$(G.1.7) \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} = \mathbf{0}$$

を用いると

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mu \Delta \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mu \Delta \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

ゆえに

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{s}.$$

念のため  $\text{rot } \Delta = \Delta \text{rot}$  を証明しておこう。

$$\text{rot } \Delta \mathbf{f} = \text{rot} \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta f_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \Delta f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta f_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \left( \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \right) \\ \Delta \left( \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \right) \\ \Delta \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \right) \end{pmatrix} = \Delta \text{rot } \mathbf{f}.$$

## G.2 Kirchhoff の定理の証明の後始末

$\phi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  が  $C^2$  級で、 $x \in \mathbf{R}^3$  とする。 $\phi: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\tilde{\phi}(r) := \begin{cases} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|y-x|=r} \phi(y) d\sigma_y & (r > 0) \\ \phi(x) & (r = 0) \end{cases}$$

で定めるとき、 $\tilde{\phi}$  は 0 で微分可能で  $\tilde{\phi}'(0) = 0$  を満たす。

証明 まず  $\exists M \in \mathbf{R}, \forall y \in \overline{B}(x; 1)$  に対して、 $R(y) := \phi(y) - \phi(x) - \phi'(x)(y-x)$  とおくと、 $|R(y)| \leq Mh^2$  が成り立つことに注意する。

$h > 0$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\tilde{\phi}(h) - \tilde{\phi}(0)) &= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{4\pi h^2} \int_{|y-x|=h} (\phi(y) - \phi(x)) d\sigma_y \\ &= \frac{1}{4\pi h^3} \int_{|y-x|=h} (\phi'(x)(y-x) + R(y)) d\sigma_y \\ &= \frac{1}{4\pi h^3} \left( \phi'(x) \int_{|y-x|=h} (y-x) d\sigma_y + \int_{|y-x|=h} R(y) d\sigma_y \right) \\ &= \frac{1}{4\pi h^3} \left( \phi'(x) \cdot 0 + \int_{|y-x|=h} R(y) d\sigma_y \right) = \frac{1}{4\pi h^3} \int_{|y-x|=h} R(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

$|h| \leq 1$  であれば

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} (\tilde{\phi}(h) - \tilde{\phi}(0)) \right| &\leq \frac{1}{4\pi h^3} \int_{|y-x|=h} |R(y)| d\sigma_y \leq \frac{1}{4\pi h^3} \int_{|y-x|=h} Mh^2 d\sigma_y \\ &= \frac{M}{4\pi h} \int_{|y-x|=h} d\sigma_y = \frac{M}{4\pi h} \cdot 4\pi h^2 = Mh \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

ゆえに  $\tilde{\phi}'(0) = 0$ . ■

この結果から  $\phi(r) := r\tilde{\phi}(r)$  とおくと、 $\phi(0) = \phi''(0) = 0$  が得られ、Kirchhoff の公式の証明に役立つ。

## G.3 周期境界条件の場合のグリーン関数

余談 2.7.5 で述べたことの証明を与える。以下の議論は、基本的には吉田・加藤 [80] による。

長さ  $2\pi$  の区間で周期境界条件を課した初期値境界値問題

$$(G.3.1) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in (-\pi, \pi) \times (0, \infty)),$$

$$(G.3.2) \quad u(-\pi, t) = u(\pi, t), \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$(G.3.3) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

の解は

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

である。

$$G(x, y, t) := \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (\cos nx \cos ny + \sin nx \sin ny)$$

とおくと、

$$u(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} G(x, y, t) f(y) \, dy$$

となるのは Dirichlet 境界条件の場合と同様である。

さて、

$$\cos nx \cos ny + \sin nx \sin ny = \cos n(x - y) = \frac{e^{in(x-y)} + e^{-in(x-y)}}{2}$$

より

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (\cos nx \cos ny + \sin nx \sin ny) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (e^{in(x-y)} + e^{-in(x-y)}) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-n^2 t} e^{in(x-y)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-n^2 t + in(x-y)}. \end{aligned}$$

そうすると (記号の濫用気味であるが)

$$G(x, t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-n^2 t + inx}$$

とおくと、 $G(x, y, t) = G(x - y, t)$  となるので

$$u(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} G(x - y, t) f(y) \, dy.$$

一方 (周期境界条件であるので) 解  $u$  は ( $\mathbf{R}$  での) 初期値問題

$$(G.3.4) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad ((x, t) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)),$$

$$(G.3.5) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R})$$

の解であると考えられることも出来る。すると、

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

という熱方程式の基本解 (熱核) を使って

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x - y, t) f(y) dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(2n-1)\pi}^{(2n+1)\pi} U(x - y, t) f(y) dy.$$

$y - 2n\pi = \xi$  と変数変換すると、 $x - y = x - \xi - 2n\pi$ ,  $f(y) = f(\xi)$ ,  $dy = d\xi$  なので

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} U(x - \xi - 2n\pi) f(\xi) d\xi.$$

ゆえに

$$V(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \exp\left(-\frac{(x - 2n\pi)^2}{4t}\right)$$

とおくと、

$$u(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} V(x - \xi) f(\xi) d\xi.$$

実は核が一致することが証明できるので (準備中),  $G = V$ . すなわち

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 t + inx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(x-2n\pi)^2/4t}.$$

## G.4 固有関数展開法の例

最も簡単な固有関数展開法の適用例を紹介しておく。

$$(G.4.1) \quad u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + F(x, t) \quad ((x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty)),$$

$$(G.4.2) \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (t \in (0, \infty)),$$

$$(G.4.3) \quad u(x, 0) = f(x) \quad (x \in [0, 1]).$$

解は

$$(G.4.4) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n(t) \sin n\pi x,$$

ただし

$$(G.4.5) \quad f_n := 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x,$$

$$(G.4.6) \quad \tilde{F}_n(t) := 2 \int_0^t \int_0^1 e^{-n^2 \pi^2 (t-s)} F(x, t) \sin n\pi x \, dx ds.$$

$F(x, t) \equiv 0$  の場合, Fourier の方法で, 固有関数系  $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$  ( $\varphi_n(x) := \sin n\pi x$ ) が得られる。これは対称固有値問題の解がしばしば持つ性質

$\forall \phi$  に対して,

$$c_n := \frac{(\phi, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}$$

とおくと,

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x).$$

を満たす。

$$F_n(t) := 2 \int_0^1 F(x, t) \sin n\pi x \, dx \quad (t \in (0, \infty))$$

とおくと,

$$(b) \quad F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin n\pi x \quad ((x, t) \in [0, 1] \times (0, \infty))$$

が成り立つ。

$u$  は未知関数であるが,

$$u_n(t) := 2 \int_0^1 u(x, t) \sin n\pi x \, dx$$

とおくと

$$(\sharp) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin n\pi x$$

が成り立つ。特に

$$u_n(0) = f_n, \quad f_n := 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx.$$

( $\sharp$ ), ( $b$ ) を方程式に代入すると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) (-n^2 \pi^2) \sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin n\pi x.$$

これから  $(\sin n\pi x)$  をかけて積分することで

$$u'_n(t) = -n^2 \pi^2 u_n(t) + F_n(t) \quad (t \in (0, \infty); n \in \mathbf{N}).$$

一般に

$$\frac{dx}{dt} = ax + F(t), \quad x(0) = x_0$$

の解は

$$x(t) = x_0 e^{at} + \int_0^t e^{a(t-s)} F(s) \, ds$$

であるから,

$$\begin{aligned}u_n(t) &= u_n(0)e^{-n^2\pi^2 t} + \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)} F_n(s) ds \\&= f_n e^{-n^2\pi^2 t} + \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)} F_n(s) ds.\end{aligned}$$

## G.5 gnuplot で遊ぶ

例 G.5.1 (1次元波動方式の初期値問題) 1次元波動方式の初期値問題

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

において,

$$\phi(x) = \begin{cases} (1-x^2)^4 & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}, \quad \psi(x) \equiv 0$$

とするときの解をいくつかの  $t$  の値に対して描け、という課題に対する一つの答。 $\psi \equiv 0$  であるから、

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\phi(x - ct) + \phi(x + ct)).$$

そこで ( $c = 1$  として)

```
max(x,y)=(x>y)?x:y
phi(x)=max(1-x**2,0)**4
u(x,t)=(phi(x-t)+phi(x+t))/2
plot [-3:3] u(x,0),u(x,1),u(x,2)
```

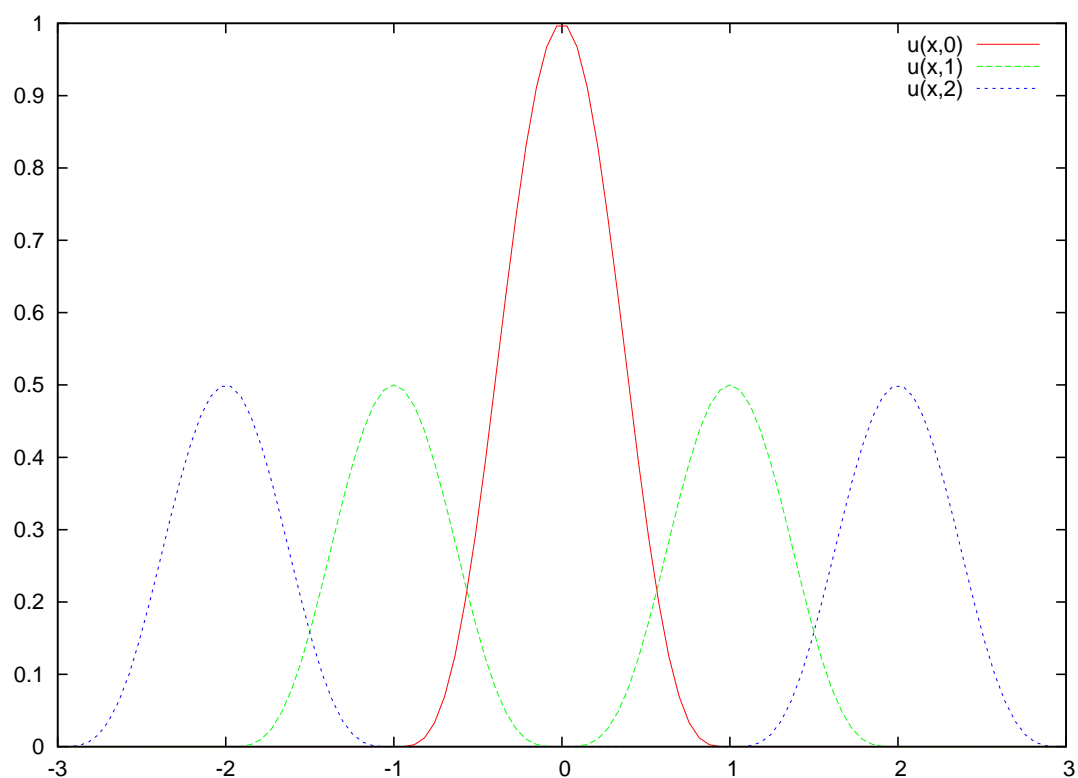


図 G.1:  $t = 0, 1, 2$  の順に赤、緑、青

例 G.5.2 (熱方程式の基本解のアニメーション) 熱方程式の基本解

$$U(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

は時刻  $t = 0$  で数直線上の原点に単位熱量をおいて、それ以降は熱伝導によって熱が流れて行った場合の、時刻  $t$ 、場所  $x$  における温度を表す。

```
anim.gp
s=sprintf("Heat kernel: t=%5.2f", t)
plot [-10:10] [0:1] u(x,t) title s
t=t+dt
if (t<Tmax) reread
```

のようなファイル “anim.gp” を用意しておいて、gnuplot で

```
gnuplot> u(x,t)=exp(-x*x/(4*t))/sqrt(4*pi*t)
gnuplot> t=0.1
gnuplot> Tmax=5
gnuplot> dt=0.01
gnuplot> load "anim.gp"
```

とすると  $t = 0.1$  から 0.01 刻みで  $t = 5$  まで、 $u(\cdot, t)$  のグラフが簡易アニメーションで描ける。ここでは静止画で我慢。

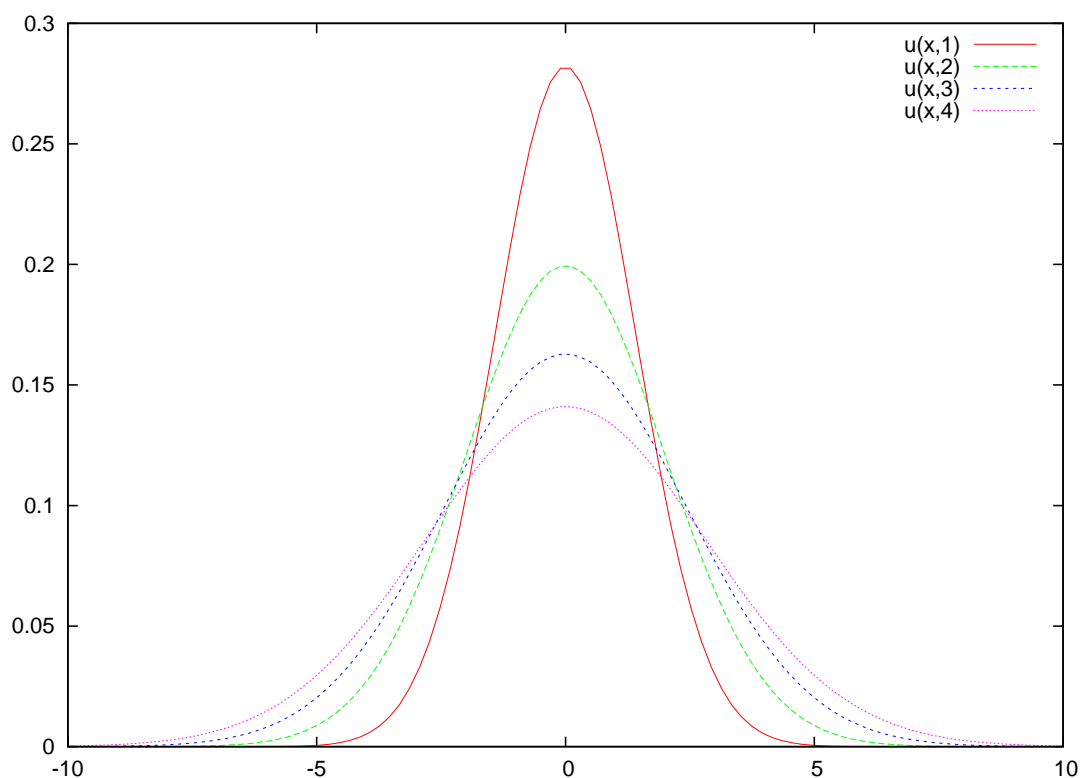


図 G.2:  $t = 1, 2, 3, 4$  での  $u(\cdot, t)$  のグラフ

次のようにするとアニメーション GIF が作れる。

```
G(x,t)=exp(-x*x/(4*t))/sqrt(4*pi*t)
t=0.1
Tmax=5
dt=0.01
set term gif animate delay 10
set output "heatkernel.gif"
load "anim.gp"
quit
```

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/fourier/heatkernel.gif> ■

例 G.5.3 (Poisson 核) Poisson 核

$$P_r(\theta) := \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

のグラフを描いてみる。

```
gnuplot> p(r,t)=(1-r*r)/(2*pi*(1-2*r*cos(t)+r*r))
gnuplot> set term x11
gnuplot> plot [-pi:pi] p(0.1,x),p(0.2,x),p(0.3,x),p(0.4,x),p(0.5,x),p(0.6,x),p(0.7,x)
```



図は p. 153 にある。 ■

## G.6 Mathematica で遊ぶ

```
G[x_, t_] := Exp[-x^2/(4 t)]/(2*Sqrt[Pi*t])
g=Plot[Table[G[x, t], {t, 0.1, 1.0, 0.1}], {x, -5, 5}, PlotRange -> All]
Manipulate[Plot[G[x, t], {x, -5, 5}, PlotRange -> {0, 3}], {t, 0.01, 2}]
```

## G.7 仮称(十進)BASICで遊ぶ

### G.7.1 仮称(十進)BASICの紹介

「(仮称)十進BASIC」とはちょっと変った名前であるが、作者の白石和夫氏によると、数学教育での利用を目的として、JIS Full BASIC を Windows 環境で実現することを目標に作られたものだそうである。

数学屋にとって嬉しい拡張機能 (1000 桁演算モード、有理数演算モード、複素数演算モード) がある。これがフリーソフトというのは本当に素敵なことだと思う。インストールが「非常に簡単」なこともあって、授業や卒研でも非常に有効に使える (宿題が出せる！)。

入手は

『(仮称)十進BASICのホームページ』

<http://hp.vector.co.jp/authors/VA008683/>

というページから出来る。なお、充実したチュートリアル『(仮称)十進BASICによるJIS Full BASIC入門』が付属している。

このソフトを利用している人達が面白いサンプル・プログラムをネット上で公開していることも心強い。

数学科の学生には中学高校の教員になる人が多いが、そういう学生に奨めてみたくなるソフトである。

### G.7.2 1次元熱方程式の初期値境界値問題を解く

計算法の詳細については、

『発展系の数値解析』

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lab/text/heat-fdm-0.pdf>

を見てもらうとして、ここでは一番簡単な陽解法のプログラムを紹介しておく。

```

REM heat1d-e.bas
REM 陽解法による1次元熱方程式 (同次ディリクレ境界条件)
REM  $u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)$  in  $(0,1) \times (0,\infty)$ 
REM  $u(0,t)=u(1,t)=0, t \in (0,\infty)$ 
REM  $u(x,0)=f(x), x \in [0,1]$ 
REM -----
DECLARE EXTERNAL FUNCTION f
REM データ入力
INPUT PROMPT "分割数: ": N
INPUT PROMPT " $\lambda$ : ": lambda
INPUT PROMPT "最終時刻: ": Tmax
DIM u(0 TO N),newu(0 TO N)
SET WINDOW -0.2,1.2,-0.2,1.2
PLOT TEXT ,AT 0.4,0.8: "熱方程式"
PLOT TEXT ,AT 0.4,0.7, USING "N=###,  $\lambda$ =###.####":N,lambda
LET h=1/N
LET tau=lambda*h*h
LET kmax=Tmax/tau
FOR i=0 TO N
    LET u(i)=f(i*h)
    PRINT u(i)
NEXT i
FOR i=0 TO N
    PLOT LINES: i*h,u(i);
NEXT i
FOR k=1 TO kmax
    FOR i=1 TO N-1
        LET newu(i)=(1-2*lambda)*u(i)+lambda*(u(i+1)+u(i-1))
    NEXT i
    FOR i=1 TO N-1
        LET u(i)=newu(i)
    NEXT i
    LET u(0)=0.0
    LET u(N)=0.0
    FOR i=0 TO N
        PLOT LINES: i*h,u(i);
    NEXT i
NEXT k
END
REM -----
REM 初期データ
EXTERNAL FUNCTION f(x)
IF (x < 0.5) THEN
    LET f=x
ELSE
    LET f=1-x
END IF
END FUNCTION

```

### G.7.3 1次元波動方程式の初期値境界値問題を解く

以下に掲げる wave1d.BAS 以外の wave1n.BAS も、<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/pde/> からファイルが入手出来る。

```

REM wave1d.bas --- 1次元波動方程式の初期値境界値問題, Dirichlet 境界条件
REM (1/c^2)u_t(x,t)=u_xx(x,t)
REM u(0,t)=u(1,t)=0
REM u(x,0)= $\phi$ (x)
REM u_t(x,0)= $\psi$ (x)
REM ----- 準備 -----
REM 滑らかな山 (0 に山頂、標高 1, 幅 1)
FUNCTION f(x)
    IF ABS(x)<= 1 THEN
        LET f=(x*x-1)^4
    ELSE
        LET f=0
    END IF
END FUNCTION
REM f(x) の導関数
FUNCTION df(x)
    IF ABS(x)<=1 THEN
        LET df=8*x*(x*x-1)^3
    ELSE
        LET df=0
    END IF
END FUNCTION
REM a にある標高 1, 幅 r の山
FUNCTION p(x,a,r)
    LET p=f((x-a)/r)
END FUNCTION
FUNCTION dp(x,a,r)
    LET dp=df((x-a)/r)/r
END FUNCTION
REM ----- 初期値 -----
REM 初期値  $\phi$ (x)=u(x,0)
FUNCTION phi(x,n)
    SELECT CASE n
    CASE 0
        LET phi=SIN(PI*x)
    CASE 1
        LET phi=SIN(3*PI*x)
    CASE 2
        LET phi=p(x, 0.5, 0.2)
    CASE 3
        LET phi=p(x, 0.5, 0.2)
    CASE 4
        LET phi=0.8*p(x, 0.25, 0.15)+0.4*p(x, 0.7, 0.1)
    CASE 5
        LET phi=0
    END SELECT
END FUNCTION
REM 初期値  $\psi$ (x)=u_t(x,0)
FUNCTION psi(x,n)
    SELECT CASE n
    CASE 0
        LET psi=0
    CASE 1
        LET psi=0
    CASE 2
        LET psi=0
    CASE 3

```

```

    LET psi=-c*dp(x,0.5,0.2)
CASE 4
    LET psi=c*(-0.8*dp(x, 0.25, 0.15)+0.4*dp(x, 0.7, 0.1))
CASE 5
    IF x>0.4 AND x<0.6 THEN
        LET psi=1
    ELSE
        LET psi=0
    END if
END SELECT
END FUNCTION
REM ----- ここからがメイン -----
DECLARE EXTERNAL SUB DRAW
LET C=1
INPUT PROMPT "N(0 以下はお任せモード): ": N
IF n<=0 THEN
    LET n=1000
    LET lambda=1
    LET tmax=10
    LET dt=0.01
ELSE
    INPUT PROMPT "λ: ": lambda
    INPUT PROMPT "Tmax: ": Tmax
    INPUT PROMPT "Δ t: ": dt
END IF
DIM u(0 TO n),up1(0 TO n),up2(0 TO n)
LET h=1/N
LET tau=lambda*h/c
LET lambda2=lambda*lambda
LET Nmax=Tmax/tau
LET SKIP=dt/tau
PRINT h,tau,lambda2,Nmax
REM
INPUT PROMPT "0: sin(π x), 1: sin(3 π), 2: 割れる山, 3: 右に進行, 4: ぶつかる": nfunc
FOR i=0 TO n
    LET u(i)=phi(i*h,nfunc)
NEXT i
SET WINDOW -0.2,1.2,-1.2,1.2
PLOT TEXT ,AT 0.3,0.8: "波動方程式"
CALL DRAW(n,u)
FOR i=1 TO n-1
    LET up1(i)=(1-lambda2)*u(i)+0.5*lambda2*(u(i-1)+u(i+1))+tau*psi(i*h,nfunc)
NEXT i
LET up1(0)=0
LET up1(n)=0
CALL DRAW(n,up1)
FOR k=2 TO Nmax
    FOR i=1 TO n-1
        LET up2(i)=2*(1-lambda2)*up1(i)+lambda2*(up1(i-1)+up1(i+1))-u(i)
    NEXT i
    LET up2(0)=0
    LET up2(n)=0
    IF MOD(k,SKIP)=0 THEN
        CALL DRAW(n,up2)
    END IF
END IF
FOR i=0 TO n
    LET u(i)=up1(i)

```

```

        LET up1(i)=up2(i)
    next i
NEXT k
END
REM *****
EXTERNAL SUB DRAW(n,u())
REM WAIT delay 0.01
SET DRAW mode hidden
clear
LET h=1/N
FOR i=0 TO n
    PLOT LINES: i*h,u(i);
NEXT i
PLOT LINES
SET DRAW mode explicit
END SUB

```

# 索引

- asymptotic behavior, 99
- boundary condition, 37, 62
- Carathéodory, 176
- Cauchy problem, 21, 113
- Cauchy-Riemann equations, 139
- Dirichlet boundary condition, 37, 62
- Dirichlet's principle, 172
- domain of dependence, 23
- domain of influence, 23
- double layer potential, 177
- Duhamel's principle, 25
- finite difference method, 103
- Fourier's law of heat conduction, 57
- Fredholm alternative, the, 178
- frequency, 38
- fundamental lemma of calculus of variations, 173
- fundamental solution, 113
- fundamental solution ( $-\Delta \phi$ ), 162
- generalized solution, 63
- Green's first identity, 157
- Green's identities, 157
- Green's second identity, 157
- Green's third identity, 159
- harmonic function, 137
- heat equation, 9, 57
- heat kernel, 113
- homogeneous Dirichlet boundary condition, 62
- Huygens' principle, 36
- initial boundary value problem, 37, 62
- initial condition, 22, 62
- initial value problem (heat equation), 113
- initial value problem (wave equation), 21
- initial values, 22, 62
- Kirchhoff's formula, 31
- Laplace equation, 137
- Laplace operator, 9
- Laplace-Beltrami operator, 32
- Laplacian, 9
- M test, 206
- Maxwell's equations, 18
- mixed problem, 37, 62
- Neumann boundary condition, 37
- normal family, 176
- parabolic boundary, 64
- parabolic equation, 64
- partial differential equation, 9
- Perron's method, 176
- plane wave, 46
- Poisson equation, 9, 137
- Poisson integral, 151
- Poisson kernel, 151
- potential flow, 142
- principle of superposition, 25, 95, 200
- spherical wave, 49
- steady solution, 101
- stream function, 142
- stream line, 142
- superposition principle, 25
- uniform convergence, 204
- vorticity, 141
- wave equation, 9, 17

weak solution, 63  
well-posedness, 62

Abel 和, 149

依存領域, 23

一様収束, 204, 205

一般解 (1 次元波動方程式), 21

渦度, 141

渦無し, 141

影響領域, 23

解の基本系, 201

カオス, 62

各点収束, 204

重ね合せの原理, 25, 95, 200

Galerkin 法, 97

関数解析, 10

基音, 38

基本解 (Laplacian の), 158, 162

基本解 (熱方程式の), 113

逆問題, 62

球面調和関数, 151

球面波, 49

境界条件, 37, 62

強最大値原理, 68

Kirchhoff の公式, 31

Green 関数, 81

Green の積分公式, 157

広義解, 63

合成積, 168

Cauchy 問題, 21, 113

Cauchy-Riemann 方程式, 139

固定端反射, 39

古典解 (Poisson 方程式の), 137

古典解 (波動方程式の初期値境界値問題), 37

古典解 (熱方程式の初期値境界値問題), 63

固有関数, 89

固有関数展開法, 97

固有関数の完全性, 91

固有振動, 71

混合問題, 37, 62

最大値原理 (熱方程式), 65

最大値原理 (調和関数の), 143

差分法, 103

次元降下法, 34

指数関数的減衰, 100

弱解, 63

自由端反射, 39

周波数, 38

初期条件, 22, 62

初期値, 22, 62

初期値境界値問題 (波動方程式の), 37

初期値境界値問題 (熱方程式), 62

初期値問題 (波動方程式の), 21

初期値問題 (熱方程式の), 113

初期データ, 62

振動数, 38

Stokes の公式, 22

正規族, 176

斉次 Dirichlet 境界条件, 62

静電ポテンシャル, 141

積分核, 86

漸近挙動, 99

線型同次方程式, 200

双曲型, 9

速度ポテンシャル, 142

第一種境界条件, 62

第二種境界条件, 98

楕円型, 9

畳み込み, 151, 168

d'Alembert の解, 21

d'Alembert の波動公式, 22

弾性波, 19

断熱境界条件, 98

超関数, 114

超関数論, 167

調和関数, 137

直接法 (変分法の), 172  
 定常解, 96, 101  
 定常解への収束原理, 101  
 定常問題, 140  
 定数変化法, 97  
 Dirichlet 境界値問題 (Poisson 方程式の), 137  
 Dirichlet 境界条件 (熱方程式), 62  
 Dirichlet 境界条件 (波動方程式), 37  
 Dirichlet の原理, 172  
 適切性, 62  
 Duhamel の原理, 25, 97  
 Duhamel の公式 (熱方程式), 97  
 デルタ関数, 114, 167  
 電位, 141  
 電磁波, 18  
 伝播速度, 24  
  
 同次 Dirichlet 境界条件, 62  
 同次 Neumann 境界条件, 98  
  
 流れ関数, 142  
  
 二重層ポテンシャル, 177  
  
 熱核, 113  
 熱伝導の法則, 57  
 熱伝導方程式, 9  
 熱方程式, 9, 57  
 熱量保存則, 58  
  
 Neumann 境界条件, 37, 98  
 Neumann 境界値問題, 98  
  
 倍音, 38  
 バタフライ効果, 62  
 波動方程式, 9, 17  
  
 非圧縮流, 142  
 非同次 Neumann 境界条件, 98  
  
 Fourier の方法, 70  
 Fourier 解析, 10  
 Fourier の熱伝導の法則, 57  
 Fourier 変換, 218  
 複素速度ポテンシャル, 143  
  
 Fredholm の交代定理, 178  
  
 平面波, 46  
 Perron の方法, 176  
 変数分離解, 71  
 変数分離法 (Fourier の), 70  
 変数変換, 109  
 偏微分方程式, 9  
 変分法, 10  
 変分法の基本補題, 173  
  
 Poisson 核, 151  
 Poisson 積分, 151  
 Poisson の公式, 31  
 Poisson 方程式, 9, 137  
 Poincaré-Perron の方法, 176  
 ホイヘンス  
 Huygens の原理, 35, 36  
 放物型, 9  
 放物型方程式, 64  
 放物境界, 64  
 ポテンシャル流, 142  
  
 Maxwell の方程式, 18  
  
 優調和関数, 144  
  
 Laplace 演算子, 9  
 Laplace 作用素, 9  
 Laplace-Beltrami 作用素, 32  
 Laplace 方程式, 137  
  
 Riemann の写像定理, 172  
 流線, 142  
  
 ルベーグ積分論, 10  
  
 劣調和関数, 144  
  
 Weierstrass の M 判定法, 206