

応用数理実験

# Poisson 方程式, $-\Delta_D$ の固有値問題

桂田祐史

2002年11月7日

## 1 はじめに

授業中の演習は Octave を用いるが、MATLAB (1 ライセンスのみ) を使ってもらっても良い。以下の実例は基本的に Octave による。

Octave については、

<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/howto/octave.pdf>  
『Octave Manual』

また自分用に作ったメモを

<http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/text/private-matlab-notebook/>  
『MATLAB 手習い』

で公開している。

## 2 Poisson 方程式

```
report_poisson.m
# report_poisson.m
# 正方形領域で - u=f, 同次 Dirichlet 境界値問題を解く
# 正方形の各辺を n 等分
function u = report_poisson(n)
    h=1/n;
    B=diag(ones(n-2,1),1)+diag(ones(n-2,1),-1);
    Id=eye(n-1,n-1);
    A=-4*kron(Id,Id)+kron(B,Id)+kron(Id,B);
    # b_{ij}=-h^2 f(x_i,y_j)
    b=-h*h*ones((n-1)*(n-1),1);
    U=A\b;
    u=zeros(n+1,n+1);
    for j=1:n-1
        u(2:n,j+1)=U((j-1)*(n-1)+1:j*(n-1));
    end
endfunction
```

```
yurichan% octave
GNU Octave, version 2.0.16 (i386-unknown-freebsd3.4).
Copyright (C) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000 John W. Eaton.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details, type 'warranty'.

octave:1> n=10; u=report_poisson(n);
octave:2> x=0:1/n:1; y=x; contour(u,10,x,y);
octave:3> mesh(x,y,u);
octave:4> n=20; tic; u=report_poisson(n); toc
ans = 1.1213
octave:5> x=0:1/n:1; y=x; contour(u,10,x,y);
octave:6> mesh(x,y,u);
octave:7> n=40; tic; u=report_poisson(n); toc
ans = 16.870
octave:8> x=0:1/n:1; y=x; contour(u,10,x,y);
octave:9> quit
yurichan%
```

### 3 ラプラシアン固有値問題

まずは Octave で解いてみよう。

```
eigen_square.m
## 正方形領域のラプラシアン固有値
function retval = eigen_square(n)
    h = 1/n;
    B=diag(ones(n-2,1),1)+diag(ones(n-2,1),-1);
    I=eye(n-1,n-1);
    A = - n * n * (- 4 * kron(I,I) + kron(B,I) + kron(I,B));
    retval = eig(A);
endfunction
```

```
eigen_square2.m
## 正方形領域のラプラシアン固有値、固有関数
function [v,lambda] = eigen_square2(n)
    h = 1/n;
    B=diag(ones(n-2,1),1)+diag(ones(n-2,1),-1);
    I=eye(n-1,n-1);
    A = - n * n * (- 4 * kron(I,I) + kron(B,I) + kron(I,B));
    [v,lambda] = eig(A);
endfunction
```

```
octave:1> eigen_square(10)
```

`tic;a=eigen_square(10);toc` として計算時間を計測した。

$n$	計算時間 (秒)
10	0.14443
20	7.4554
25	32.129
30	105.79

計算時間は  $n^6$  に比例している？

## 4 課題

正方形領域における Laplacian の固有値問題を差分法で解け。

- 差分方程式の導出は自分で行うこと (プログラムと照らし合わせる)。
- Octave あるいは MATLAB を用いると良い。
- 得られた近似固有値の計算精度を調べよ。
- 重複固有値について調べよ。
- 近似固有関数の可視化をせよ。
- 特に絶対値の小さい近似固有関数について、厳密な固有関数と比較せよ。重複固有値に対応するものはどうなっているか？
- MATLAB で疎行列用の命令を使うとどうなるか？

## 5 参考書案内

菊地・山本 [7] には、正方形領域における Laplacian の固有値問題を差分法で解く方法の解説が載っている (プログラムは FORTRAN である)。

Kronecker 積 ( $\otimes$ ) については、伊理 [2] を参照せよ。

Octave については、WWW 上に解説文書があふれているが、日本語で読める書籍としては大石 [3] がある。

## 参考文献

- [1] 有木進, 工学のための線形代数, 日本評論社 (200?).
- [2] 伊理正夫, 線形代数 I, 岩波講座 応用数学, 岩波書店 (1993).
- [3] 大石進一, Linux 数値計算ツール, コロナ社 (2000).
- [4] 大石進一, MATLAB による数値計算, 培風館 (2001).
- [5] 小国力/Dongarra, Jack J., MATLAB による線形計算ソフトウェア, 丸善 (1998).
- [6] 小国力, MATLAB と利用の実際 — 現代の応用数学と CG —, サイエンス社 (1995).
- [7] 菊地 文雄, 山本 昌宏, 微分方程式と計算機演習, 山海堂 (1991).