応用数理実験

常微分方程式の初期値問題

桂田 祐史

2003年10月14日

次のいずれかの課題に対するレポートを提出せよ。

1 Runge-Kutta 型公式の次数

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \tag{1}$$

$$x(0) = 1 \tag{2}$$

を前進 Euler 法、後退 Euler 法、古典的 Runge-Kutta 法、RKF45 (刻み幅の自動調節は、講義中の説明を参考にして行う…完璧さは追求しなくてよい) で解くプログラムを作成し、以下のことを調べよ。

(1) $t = 1/2$ にときの値 $x(1/2)$ に対する近似値の精度が、刻み幅を小さくすることでどう変化するか。

(2) $t = 1$ に対応する計算値 (真値は存在しない) が、刻み幅を小さくすることでどのように変化するか調べよ。

- $x(1/2)$ に対応する近似値の精度は、公式の次数を反映したものになる。
- 厳密解は $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$ であり、$t = 1$ を爆発時刻とする爆発解である。したがって $x(1)$ はナンセンスであるが、刻み幅の自動調節をしないと $x(1)$ に「対応する」値が計算される。それは幻であるが、刻み幅を小さくしていくと「おかしい」ことは明瞭に察知される。
- 一階の方程式なので、素朴なプログラミング技法でも比較的簡単に動くプログラムができる。

2　刻み幅の自動調節の効果

離心率 $e = 0.9$ (あるいはそれよりも 1 に近い) の 2 次元 Kepler 問題

$$x''(t) = -\frac{x(t)}{[x(t)^2 + y(t)^2]^{3/2}}, \quad y''(t) = -\frac{y(t)}{[x(t)^2 + y(t)^2]^{3/2}}, \tag{3}$$

$$x(0) = 1 - e, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{(1+e)/(1-e)} \tag{4}$$

を RKF45 で、刻み幅の自動調節を行なう場合とそうでない場合で解き比べてみよ。

ちなみに解はパラメーター ξ を用いて

$$\begin{aligned} t &= \xi - e\sin\xi \\ x &= \cos\xi - e, \quad y = \sqrt{1-e^2}\sin\xi, \\ x' &= -\frac{\sin\xi}{1 - e\cos\xi}, \quad y' = \frac{\sqrt{1-e^2}\cos\xi}{1 - e\cos\xi} \end{aligned}$$

と表される (力学のテキストを参考)。

3　渦糸の力学系

平面上にある N 個の渦糸の運動を表わす方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \frac{(-\Gamma_j)}{2\pi} \frac{y - y_j(t)}{(x - x_j(t))^2 + (y - y_j(t))^2}, \\ \frac{dy_k}{dt} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{x - x_j(t)}{(x - x_j(t))^2 + (y - y_j(t))^2} \quad (k = 1, 2, \cdots, N) \end{aligned}$$

を RKF45 で解くプログラムを作成せよ。

($(x_j(t), y_j(t))$ は j 番目の渦糸の時刻 t における位置を表わす。また Γ_j は j 番目の渦糸の強さを表わす実定数である。)

どのような運動をするかは、WWW ページ

『2 次元渦糸系のシミュレーション』[1]

で見ることが出来る。

A　公式

A.1　前進 Euler 法

$$x_{j+1} = x_j + hf(t_j, x_j), \quad h = t_{j+1} - t_j.$$

[1] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/java/uzu.html

A.2　後退 Euler 法

$$x_{j+1} = x_j + hf(t_j, x_j + 1), \quad h = t_{j+1} - t_j.$$

A.3　古典的 Runge-Kutta 法

$$x_{j+1} = x_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad h = t_{j+1} - t_j,$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_j, x_j),\\
k_2 &= hf(t_j + h/2, x_j + k_1/2),\\
k_3 &= hf(t_j + h/2, x_j + k_2/2),\\
k_4 &= hf(t_j + h, x_j + k_3).
\end{aligned}$$

A.4　RKF45

5 次精度の x_{j+1}, 4 次精度の x_j^* は

$$\begin{aligned}
x_{j+1} &= x_j + h\left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right),\\
x_{j+1}^* &= x_j + h\left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5\right), \qquad h = t_{j+1} - t_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_j, x_j),\\
k_2 &= f\left(t_j + \frac{1}{4}h, x_j + \frac{1}{4}hk_1\right),\\
k_3 &= f\left(t_j + \frac{3}{8}h, x_j + \frac{1}{32}h(3k_1 + 9k_2)\right),\\
k_4 &= f\left(t_j + \frac{12}{13}h, x_j + \frac{1}{2197}h(1932k_1 - 7200k_2 + 7296k_3)\right),\\
k_5 &= f\left(t_j + h, x_j + h\left(\frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)\right),\\
k_6 &= f\left(t_j + \frac{1}{2}h, x_j + h\left(-\frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)\right).
\end{aligned}$$

B　C, C++ から呼び出せるグラフィックス・ライブラリィ GLSC の紹介

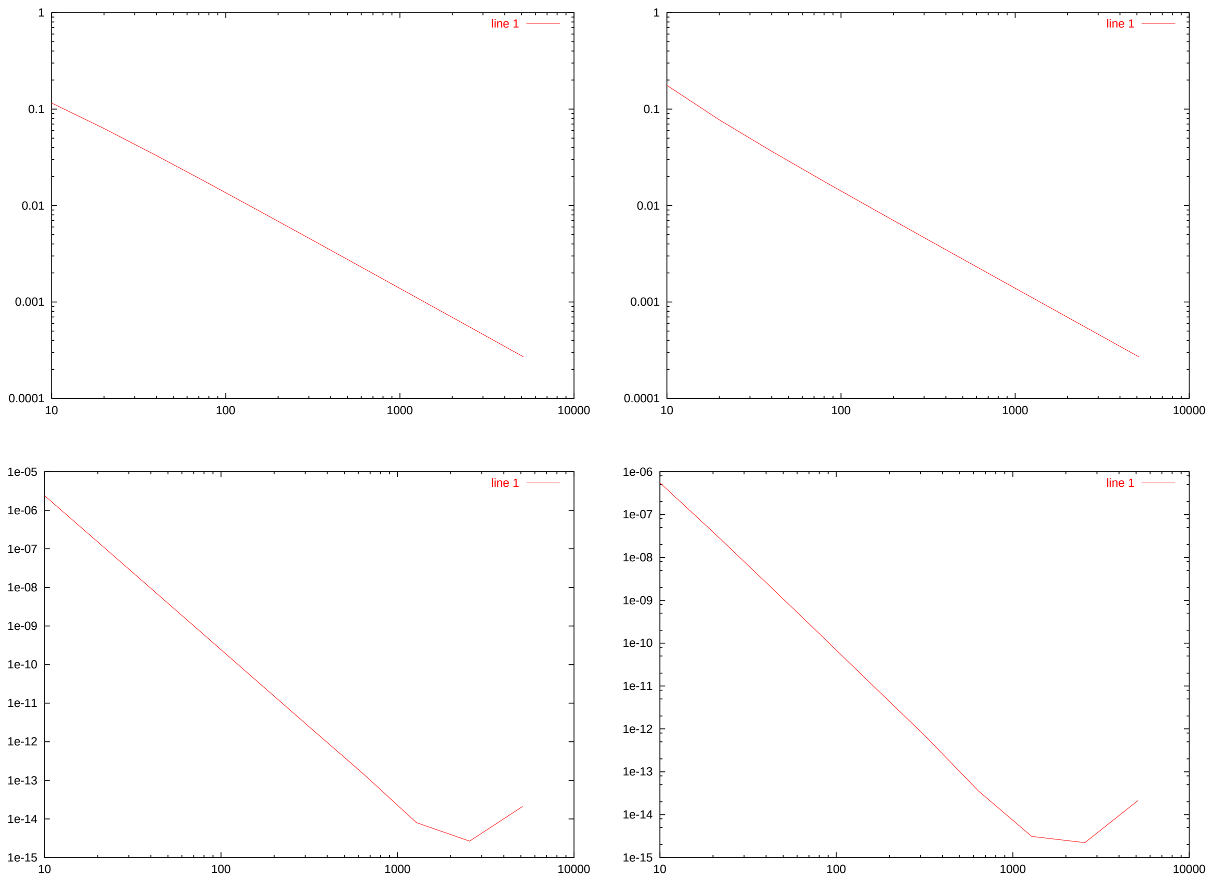
次の機会にきちんと紹介します。

明大数学科計算機室ユーザーのための GLSC の紹介[2]

[2] http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/labo/howto/intro-glsc-v5/

C　前進 Euler，後退 Euler，古典的 Runge-Kutta，RKF45 解き比べ

課題 1 の問題 $x(1/2)$ の近似値の精度



C.1　euler.m

```
% euler.m
% 前進 Euler
%  dx/dt=x^2
%  x(0)=1
%  [0,1/2] で解く
a=0;
b=0.5;
format long
maxn=10;
n=10;
error=zeros(maxn,1);
ns=zeros(maxn,1);
for k=1:10
        h=(b-a)/n;
        x=1;
        for i=1:n
          x=x+h*x*x;
        end
        n
```

```
        x
        error(k)=abs(2-x);
        ns(k)=n;
        n=2*n;
end
loglog (ns,error)
gset term postscript eps color
gset output "euler.eps"
replot
gset term X11
```

C.2 rkf45.m

```
% rkf45.m
% RKF45
%  dx/dt=x^2
%  x(0)=1
%  [0,1/2] で解く
a=0;
b=0.5;
format long
maxn=10;
n=10;
error=zeros(maxn,1);
ns=zeros(maxn,1);
for k=1:10
        h=(b-a)/n;
        x=1;
        for i=1:n
          k1=x**2;
          k2=(x+h*k1/4)**2;
          k3=(x+h*(3*k1+9*k2)/32)**2;
          k4=(x+h*(1932*k1-7200*k2+7296*k3)/2197)**2;
          k5=(x+h*(439*k1/216-8*k2+3680*k3/513-845*k4/4104))**2;
          k6=(x+h*(-8*k1/27+2*k2-3544*k3/2565+1859*k4/4104-11*k5/40))**2;
          x=x+h*(16*k1/135+6656*k3/12825+28561*k4/56430-9*k5/50+2*k6/55);
        end
        n
        x
        error(k)=abs(2-x);
        ns(k)=n;
        n=2*n;
end
loglog (ns,error)
gset term postscript eps color
gset output "rkf45.eps"
replot
gset term X11
```