

応用数値解析特論 第13回

～有限要素法の理論的背景～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana/>

2026 年 7 月 X 日

目次 I

① 本日の講義内容、連絡事項

② 有限要素法の理論的背景

- 概観
- 弱解の一意存在
 - まず結論
 - 関数解析から Banach 空間の連続線形形式、双対空間
 - Riesz の表現定理
 - Lax-Milgram の定理
 - Stampacchia の定理
- 弱解の滑らかさ
 - $f = -\Delta u$ が滑らかならば u も滑らか
 - Sobolev の埋蔵定理
- 有限要素解の誤差評価
 - 方針
 - 1次元の場合の誤差評価
 - 2次元の場合の誤差評価
 - まとめ

本日の講義内容、連絡事項

今回は、有限要素法の理論的背景について解説する。

参考書としては、和書では菊地 [1] (しっかりしている), 齊藤 [2] (新しい、これからのスタンダード), それから田端 [3] (コンパクト), 洋書に目を向けると Brenner-Scott [4] (定評がある) があげられる。

偏微分方程式の関数解析的な取り扱いの勉強が役に立つ (必要になる)。定番本であるが、やはり Brezis [5], [6], Evans [7] が頼りになる。

関数解析 (functional analysis) は、無限次元空間における解析学である。参考書として、Brezis [5], [6] (この 2 書は Sobolev 空間にも詳しい) 以外に、藤田・黒田・伊藤 [8], 黒田 [9] をあげておく。

7 有限要素法の理論的背景 7.1 概観

今回考えるのは、基本である Poisson 方程式の境界値問題である。

Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域で、その境界 Γ は区分的に十分滑らかであるとする。また Γ_1 と Γ_2 は条件

$$\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \Gamma_1 \neq \emptyset$$

を満たすとする。 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられた時、次の Poisson 方程式の境界値問題を考える。

問題 (P)

次式を満たす u を求めよ:

- (1) $-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$
- (2) $u = g_1 \quad \text{on } \Gamma_1,$
- (3) $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_2 \quad \text{on } \Gamma_2,$

ここで $\mathbf{n}$ は Γ の点における外向き単位法線ベクトルを表す。

7 有限要素法の理論的背景 7.1 概観

まず、やり残したことを列挙してみる。

- ① 弱解の存在と一意性を証明していない。
- ② 弱解の正則性 (微分可能性や導関数の連続性) を証明していない。弱解が十分な滑らかさを持っていれば、それは真の解であることを示すに止まっている。
- ③ 有限要素解の精度について、「誤差最小の原理」を示すに止まっている。実際はどれくらい小さい？

一般には、有限要素解の存在と一意性も問題になる。それは弱解の一意存在と同様に証明することも出来るが、この講義では、菊地 [10] に従って、Poisson 方程式の境界値問題の場合には、弱形式が正値対称行列を係数とする連立 1 次方程式と同値であることを示してある。ゆえに一応は解決済みである。

余談 Poisson 方程式の境界値問題では、弱解は最小問題の解としても特徴づけられた (最小変分原理が成り立つ、という)。Stokes 方程式の境界値問題では、最小変分原理は成立せず、その代わり鞍点型変分原理が成立する。この場合は議論はそんなに簡単ではない。

7.2 弱解の一意存在 7.2.1 まず結論

問題 (W)

Find $u \in X_{g_1}$ s.t.

$$(4) \quad \langle u, v \rangle = (f, v) + [g_2, v] \quad (v \in X).$$

弱解、すなわち問題 (W) の解 $u \in X_{g_1}$ が一意的に存在することの証明は、解析学の問題である、と逃げることも出来なくはないけれど、以下あらすじを紹介する。(弱解の方法の参考書としては、Brezis [5], [6] を勧める。)

Hilbert 空間の **Riesz の表現定理**、あるいは **Lax-Milgram の定理**、さらにその一般化である **Stampacchia の定理** (この名称は Brezis [5] で採用されているが、一般的ではないかもしれない) を用いれば解決する。

これらの定理は兄弟のようなものである。任意の1つを使って他の定理を証明することも出来るし、どれも「同様に証明する」ことも出来る。

7.2.2 関数解析から Banach 空間の連続線形形式、双対空間

このスライドに書いてあることは、関数解析の常識的事項である。

Banach 空間、Hilbert 空間は既知とする (それぞれノルム、内積を備えた完備な空間)。

X を体 $\mathbb{K}$ 上の Banach 空間とすると、 X から $\mathbb{K}$ への線形写像を、 X 上の**線形形式**とよぶ。 X 上の連続な線形形式全体を X' と表し、 X の双対空間とよぶ。

線形形式 $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ が連続であるためには、 f が**有界**であること、すなわち

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X) \quad |f(x)| \leq M \|x\|$$

が成り立つことが必要十分である。

任意の $f \in X'$ に対して

$$\|f\|_{X'} := \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| \quad (f \text{ が有界なので有限値})$$

と定めると、 X' は $\|\cdot\|_{X'}$ をノルムとする Banach 空間となる。

$x \in X, f \in X'$ とするとき、 $f(x)$ のことを $\langle f, x \rangle$ と書くことも多い。

Hilbert 空間は Banach 空間であるから、以上すべてが成立する。

7.2.3 Riesz の表現定理

Hilbert 空間においては、次の **Riesz の定理**が基本的かつ重要である。

定理 13.1 (Riesz の表現定理 — 連続線形形式は内積で実現できる)

H は $\mathbb{K}$ 上の Hilbert 空間、 $F \in H'$ とするとき、 $\exists! u \in H$ s.t.

$$(v, u) = \langle F, v \rangle \quad (v \in H).$$

$H = \mathbb{R}^n$ の場合に何を意味するか、考えてみよう。

証明は、ほとんどすべての関数解析のテキストに載っている。「閉線形部分空間に垂線が引ける」という**射影定理**(定理 13.14)を用いるのがポイントである。

$H = \mathbb{R}^n$ の場合に説明した

「内積空間ノート 2.12 Riesz の表現定理 ($\mathbb{R}^n$ 版)」

を紹介しておく。

問題が簡単な場合は、この定理を使って弱解の一意存在を証明することも出来るが(次のスライドを見よ)、もう少し便利な形にした Lax-Milgram の定理が紹介されることが多い。

7.2.3 Riesz の表現定理 (Poisson 方程式の同次 Dirichlet 問題への応用)

例えば、Poisson 方程式の同次 Dirichlet 境界値問題

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

に対して、 $V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ on } \Gamma\}$ で、その内積とノルムを

$$(u, v)_V := (\nabla u, \nabla v), \quad \|u\|_V := \sqrt{(u, u)_V}, \quad (u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

で定義すると、 u が弱解とは

$$u \in V, \quad (u, v)_V = (f, v) \quad (v \in V)$$

を満たすことと同値である (証明は難しくない)。この場合、 $v \mapsto (f, v)$ は V 上の連続線形形式であるから、弱解の一意存在は Riesz の表現定理を用いて一発で証明できる。

(以前の記号との対応: $g_1 = 0, \Gamma_2 = \emptyset$ であるから、 $X_{g_1} = X = H_0^1(\Omega) = V$ 。また弱形式 $\langle u, v \rangle = (f, v)$ ($v \in X$) は $(u, v)_V = (f, v)$ ($v \in V$)。)

7.2.4 Lax-Milgram の定理

定理 13.2 (Lax-Milgram の定理)

V は $\mathbb{R}$ 上の Hilbert 空間、 $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ は有界双線型形式で、 V で強圧的
(コアシブ coercive, V -elliptic)、すなわち

$$(\exists \mu > 0)(\forall v \in V) \quad a(v, v) \geq \mu \|v\|^2$$

が成り立つとする。このとき、 $\forall F \in V'$ に対して、 $\exists! u \in V$ s.t.

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad (v \in V).$$

さらに a が対称ならば、この u は次のようにも特徴づけられる:

$$u \in V, \quad J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

ただし

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle F, v \rangle \quad (v \in V).$$

内積は、対称強圧的有界双線形形式である (つまり Riesz の表現定理の一般化)。
証明は菊地 [1], Brezis [5], [6] などを見よ。

7.2.4 Lax-Milgram の定理

- 双線形形式 $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ が有界であるとは

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall u, v \in V) \quad |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|.$$

- 念のため: 「特徴づけられる」というのは、 $u \in V$ に対して、

$$((\forall v \in V) a(u, v) = \langle F, v \rangle) \quad \Leftrightarrow \quad J(u) = \min_{v \in V} J(v)$$

が成り立つ、ということである。(以前の授業の $(W) \Leftrightarrow (V)$ に相当する。)

- Lax-Milgram の定理は、Riesz の表現定理における内積 $(\cdot, \cdot)$ を、強圧的有界双線形形式 $a(\cdot, \cdot)$ に一般化したものである。

さらに応用のための一般化として、次に掲げる Stampacchia の定理がある (Brezis [6] の Theorem 5.6. テキストによっては、載っていても定理の名前が書いてないことが多い。)

7.2.5 Stampacchia の定理

定理 13.3 (Stampacchia の定理)

V は $\mathbb{R}$ 上の Hilbert 空間、 K は V の空でない閉凸集合とする。
 $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ を有界双線型形式で、 K で強圧的 (coercive)、すなわち

$$(\exists \mu > 0)(\forall v \in K) \quad a(v, v) \geq \mu \|v\|^2$$

が成り立つとする。このとき $\forall F \in V'$ に対して、 $\exists! u \in K$ s.t.

$$(\#) \quad (\forall v \in K) \quad a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle.$$

さらに a が対称ならば、この u は次のようにも特徴づけられる:

$$u \in K, \quad J(u) = \min_{v \in K} J(v).$$

ただし

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle \quad (v \in V).$$

注意 13.4 (菊地 [1])

菊地 [1] の第 1 章 (定理 1.1, 1.2 の付近) には、親切な注意がいくつか載っている。

- ① Stampacchia の定理で、 a が K で強圧的でなくても、

$$(\exists \mu > 0)(\forall v, v^* \in K) \quad a(v - v^*, v - v^*) \geq \mu \|v - v^*\|^2$$

が成り立てば十分である。この条件は、特に $K = u_0 + M$, M は V の閉部分空間の場合は、次の条件と同値である。

$$(\exists \mu > 0)(\forall v \in M) \quad a(v, v) \geq \mu \|v\|^2.$$

- ② $K = u_0 + M$, M は V の閉部分空間とするとき、変分不等式 (#) は、

$$(\forall v \in K) \quad a(u, v - u) = \langle F, v - u \rangle$$

や

$$(\forall v \in M) \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle$$

と同値である。



7.2.5 Stampacchia の定理

定理 13.5 (Stampacchia の定理 $K = u_0 + M$ (M は閉線形部分空間) の場合)

V は $\mathbb{R}$ 上の Hilbert 空間、 $u_0 \in V$, M は V の閉線形部分空間, $K := u_0 + M$ とする。 $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ は有界線形形式, M で強圧的

$$(\exists \mu > 0)(\forall v \in M) \quad a(v, v) \geq \mu \|v\|^2$$

このとき任意の $F \in V'$ に対して、ただ一つの $u \in K$ が存在して

$$(\forall v \in M) \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle.$$

さらに a が対称ならば

$$u \in K, \quad J(u) = \min_{w \in K} J(w).$$

ただし

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle \quad (v \in V).$$

我々の問題 $((W), (V))$ に対して、 $M = X$, $u_0 = “\Gamma_1$ で g_1 に等しいある関数” とすると、 $K = u_0 + M = X_{g_1}$ となる (クリーン・ヒット)。

7.3 弱解の滑らかさ 7.3.1 $f = -\Delta u$ が滑らかならば u も滑らか

Poisson 方程式の弱解 u がどの程度の滑らかさ (微分可能性や導関数の連続性… 弱解の正則性と呼ばれる) を持つか調べよう。

u を弱解とすると、まず定義から $u \in H^1(\Omega)$ である。

Poisson 方程式

$$-\Delta u = f$$

より、 $(\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) u \in H^{k+2}(\Omega) \Rightarrow f \in H^k(\Omega)$ は明らかであるが、条件が良い場合には、この逆「 $f \in H^k(\Omega) \Rightarrow u \in H^{k+2}(\Omega)$ 」が成立する。

(実はこの事実はかなり一般の楕円型偏微分方程式について成立する。)

- Ω が 1 次元の区間であれば、 $f \in H^k(\Omega) \Rightarrow u \in H^{k+2}(\Omega)$.
(これは簡単)
- Ω が C^{k+2} 級の開集合であれば、 $f \in H^k(\Omega) \Rightarrow u \in H^{k+2}(\Omega)$.
(Evans [7] §6.3.2) かど …角があるのが普通の有限要素法からは遠ざかる。
- Ω が凸多角形領域ならば、 $f \in H^0(\Omega) = L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$.
(Dauge [11], または古典である Grisvard [12]. 凸でない場合は難しい。)

7.3.2 Sobolev の埋蔵定理

Sobolev の意味での微分可能性ではなく、普通の微積分の意味での微分可能性はどうなるだろうか？

Sobolev の意味で十分な回数の微分可能性があれば、普通の意味での滑らかさ (連続性、微分可能性) が導かれ、弱解は真の解となる。

定理 13.6 (いわゆる Sobolev の埋蔵定理の一つ (Evans [7] p. 284))

U が $\mathbb{R}^n$ の有界な開集合で C^1 級の境界を持つもの、 $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in W^{k,p}(U)$ とする。 $k - n/p > 0$ であるとき、 $u \in C^{k-[n/p]-1,\gamma}$, ここで

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p} \right] + 1 - \frac{n}{p} & (n/p \text{ が整数でないとき}) \\ 1 \text{ 未満の任意の正の数} & (n/p \text{ が整数のとき}). \end{cases}$$

さらに

$$\|u\|_{C^{k-[n/p]-1,\gamma}(U)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(U)}.$$

$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ であるから、 $k - n/2$ より小さい最大の整数を ℓ とするとき、 $u \in H^k(\Omega) \Rightarrow u \in C^\ell(\overline{\Omega})$ が成り立つ。

7.4 有限要素解の誤差評価

7.4.1 方針

簡単のため、ここでは2次元の Poisson 方程式の同次 Dirichlet 境界値問題を扱うことにする。関数空間とノルムは

$$V := H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_V := \|\nabla u\| = \left(\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \right)^{1/2}.$$

基礎となるのは証明済みの次の事実である。

誤差最小の原理 (Céa の補題)

u_h を有限要素解とすると、

$$\|u - u_h\|_V = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V.$$

(菊地先生の本では、 $\|\cdot\|_V$ は $\|\cdot\|$, u_h は $\hat{u}$ と書いた。)

$\|u - v\|_V$ がある程度具体的に計算できて小さいことを示せるような $v \in V_h$ を見出せれば、 $\|u - u_h\| \leq \|u - v\|$ が良い評価となる。

v として、ここではいわゆる補間多項式 $u_h = \Pi_h u$ を利用する。

7.4.2 1次元の場合の誤差評価

節点の全体を $\{P_i\}_{i=1}^m$ として、区分1次多項式 φ_i で $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ を満たすものをとると、 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ は区分1次多項式全体のなす線形空間の基底になる。

$v \in H^1(I)$ に対して、 $\Pi_h v$ を次式で定める。

$$\tilde{v}_h(x) = \Pi_h v(x) := \sum_{i=1}^m v(x_i) \varphi_i(x).$$

$\Pi_h v$ は v の **Lagrange 補間**、**線形補間** と呼ばれる。

補題 13.7 (1次元の場合の1次補間多項式の誤差)

$\forall v \in H^2(I)$ に対して、

$$\|v - \tilde{v}_h\| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} h^2 \|v''\|, \quad \|v' - \tilde{v}_h'\| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} h \|v''\|.$$

証明は例えば、齊藤 [13] の pp. 10–13 に載っている。

7.4.2 1次元の場合の誤差評価

定理 13.8 (有限要素解の誤差評価 (1次元の場合))

$\forall f \in L^2(I)$ に対して、 $\exists! u_h \in V_h$ s.t. u_h は弱解、 $\|u_h\|_V \leq \|f\|$. さらに $\|u - u_h\|_V \leq Ch \|u''\|$, $\|u - u_h\| \leq Ch^2 \|u''\|$.

証明

補題の二つ目の不等式から

$$\|u - u_h\|_V = \|u' - u'_h\| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} h \|u''\|.$$

後半は、Aubin-Nitsche のトリック (別名 duality argument) を用いる。
 $e_h := u - u_h$ とおき、

$$(5) \quad (w, v)_V = (e_h, v) \quad (v \in V)$$

を満たす $w \in V$ を求める (この問題を共役な問題と呼ぶ)。

7.4.2 1次元の場合の誤差評価

証明 (続き)

$w \in H^2(I)$ かつ $w'' = -e_h$ である。

さらに u_h は u の V_h 射影であるから、 $e_h = u - u_h$ は $\Pi_h w \in V_h$ とは直交している¹。すなわち $(e_h, \Pi_h w)_V = 0$ が成り立つ。

ゆえに (5) に $v = e_h$ を代入して

$$\begin{aligned}\|e_h\|^2 &= (e_h, e_h) = (w, e_h)_V = (w - \Pi_h w, e_h)_V \leq \|w - \Pi_h w\|_V \|e_h\|_V \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} h \|w''\| \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} h \|u''\| = \frac{4}{3} h^2 \|e_h\| \|u''\|.\end{aligned}$$

両辺を $\|e_h\|$ で割って

$$\|e_h\| \leq \frac{4}{3} h^2 \|u''\|. \quad \square$$

¹ $(u_h, v_h)_V = (f, v_h) = (u, v_h)$ ($v_h \in V_h$ より、 $(u - u_h, v_h)_V = 0$). $u - u_h$ を e_h と書き換えて、 v_h として $\Pi_h w$ をとって、 $(e_h, \Pi_h w)_V = 0$.)

7.4.3 2次元の場合の誤差評価

Ω は多角形領域 ($\subset \mathbb{R}^2$), 区分1次多項式による $W = H^1(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ の近似空間 W_h , V_h を導入する。

次の3条件が成り立つように $\bar{\Omega}$ を (閉) 三角形 T の集合 $\mathcal{T}$ に分割する。

- ① $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T = \bar{\Omega}$
- ② 任意の異なる二つの三角形は内部を共有しない。
- ③ 任意の三角形の任意の頂点は、他の三角形の頂点としているか、単独で $\bar{\Omega}$ の角をなすかのどちらかである (ある三角形の辺上に別の三角形の頂点があることはない)。

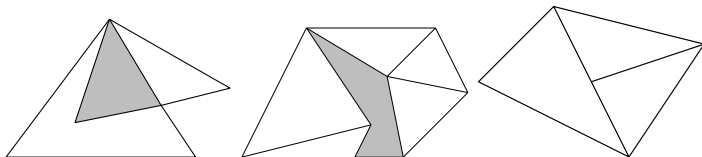


図 1: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の辺上にある、なんてのはダメ

7.4.3 2次元の場合の誤差評価

$T \in \mathcal{T}$ の直径 ($= \sup_{x,y \in T} |x - y| = T$ の外接円の直径) の最大値を h とおく:

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T.$$

三角形分割 $\mathcal{T}$ を、この h を明示する意味で、 $\mathcal{T}_h$ と書くことが多い。(異なる2つの三角形分割で、同じ h を持つものが存在するので、 h で三角形分割を区別できるわけではない。)

$H^2(\Omega)$ のセミノルム $|u|_{2,T}$ を次式で定義する:

$$|u|_{2,T} := \left[\int \int_T \left(|u_{xx}|^2 + 2|u_{xy}|^2 + |u_{yy}|^2 \right) dx dy \right]^{1/2}.$$

7.4.3 2次元の場合の誤差評価

1次多項式で T の各頂点で u と値が一致するものを Πu と書く。

補題 13.9 (局所補間誤差)

T を閉三角形、 $u \in H^2(T)$ とするとき、

$$\|\Pi u - u\|_{L^2(T)} \leq C_1 h_T^2 |u|_{2,T},$$

$$\|\nabla(\Pi u - u)\|_{L^2(T)} \leq C_1 \frac{1}{\sin^2 \theta_T} h_T |u|_{2,T}.$$

ただし $\theta_T := T$ の最小内角. C_1 は T や u に無関係な正定数。

証明は、やはり齊藤 [13] を見よ。



三角形が “つぶれている (内角に小さなものが存在する)” と、近似の程度が悪いことを意味する不等式になっていることを理解しよう。

この補題はずいぶん細かいことをやっているようだが、実は理由がある。分割の族を扱うと、無限に多くの三角形が対象になるので、一般には、いくらでも小さい θ_T が出て来るような分割の族がありうる。そうなるとまともな誤差評価が得られないだろうことは想像出来る。そこで次のような仮定をおくことにする。

7.4.3 2次元の場合の誤差評価

定義 13.10 (三角形分割の族の正則性, Zlámal の最小角条件)

三角形分割の族 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ が**正則** (regular) とは、

$$(6) \quad (\exists \theta_1 > 0) \quad \inf_{\mathcal{T}_h} \min_{T \in \mathcal{T}_h} \theta_T \geq \theta_1.$$

この条件を **Zlámal の最小角条件** と呼ぶ。

同値な条件に

$$(7) \quad (\exists \nu_1 > 0)(\forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\})(\forall T \in \mathcal{T}_h) \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \nu_1.$$

がある。ただし

$\rho_T := T$ の内接円の直径。

(条件 (7) は、3次元の場合にも自然に拡張できる。)

7.4.3 2次元の場合の誤差評価

定理 13.11 (大域的補間誤差)

$\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ が正則な三角形分割族とするとき、

$$\|\Pi_h u - u\| \leq C_1 h^2 |u|_{2,\Omega} \quad (u \in H^2(\Omega)),$$

$$\|\nabla(\Pi_h u - u)\| \leq \frac{C_1}{\sin^2 \theta_1} h |u|_{2,\Omega} \quad (u \in H^2(\Omega)).$$

ここで C_1 は補題 13.9 中に現れる正定数である。

証明は、やはり齊藤 [13] を見よ。



7.4.3 2次元の場合の誤差評価

定理 13.12 (H^1 誤差評価)

Ω は凸多角形領域、 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ を Ω の正則な三角形分割の族とする。 $u \in V$ を弱解、 $\mathcal{T}_h$ の連続な区分 1 次多項式で境界で 0 になるもの全体を V_h , $u_h \in V_h$ を有限要素解とするととき、

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch |u|_{H^2(\Omega)}.$$

ただし $C = C(\theta_1, \Omega) > 0$.

証明.

誤差最小の原理から、 $\forall v_h \in V_h$ に対して、

$$\|u - u_h\|_V \leq \|u - v_h\|_V.$$

v_h として $\Pi_h u$ を代入すると、

$$\|u - u_h\|_V \leq \|u - \Pi_h u\|_V \leq C(\theta_1, \Omega) h |u|_{2, \Omega}.$$

ゆえに

$$\|u - u_h\|_V \leq C(\theta_1, \Omega) h |u|_{2, \Omega}. \quad \square$$

7.4.3 2次元の場合の誤差評価

定理 13.13 (L^2 誤差評価)

定理 13.12 と同じ仮定のもとで

$$\|u - u_h\| \leq C' h^2 |u|_{H^2(\Omega)}.$$

証明.

定理 13.8 の後半の証明と同様に Aubin-Nitsche のトリックを用いる。□

7.4.4 まとめ

- H^1 誤差評価については
 - 1次元の証明は、誤差最小の原理+補間関数の局所的な誤差
 - 2次元の証明は、誤差最小の原理+補間関数の局所的な誤差+分割の正則性から導かれる大域的な誤差評価
- L^2 誤差評価は、 H^1 誤差評価よりも h の冪が1高い評価が得られる (Aubin-Nitsche のトリックによる)

8 Sobolev 空間 8.1 はじめに

現在、微分方程式を扱う数学的なツールには、関数解析的な取り扱いが必要なものが多い。これは必要となる関数空間のほとんどが無限次元であるためである。完備性を持つ関数空間が必要となる。

色々なものが用意されているが、まずは Sobolev 空間であろう。これは超関数の意味での導関数 (一般化導関数) を扱う。

参考書には、Adams-Fournier [14], 宮島 [15] のような Sobolev 空間のみを扱ったものもあるが、最初は関数解析のテキスト、例えば Brezis [5], [6] あたりから入るのが分かりやすいと思われる。

8.2 一般化導関数

Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $f \in C^1(\Omega)$ とする。任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $j \in \{1, \dots, n\}$ に対して

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (f\varphi) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi dx + \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \quad (\text{積の微分法}).$$

左辺は発散定理より $\int_{\partial\Omega} f\varphi n_j d\sigma$ に等しいが、 $\partial\Omega$ の近傍で $\varphi = 0$ であるから $= 0$ 。ゆえに

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi dx \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \quad \text{— いわゆる部分積分.}$$

f の x_j による偏導関数が存在しない場合も、ある関数 g_j が存在して

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} g_j \varphi dx \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega))$$

が成り立つことがある。このとき、 f の x_j による一般化偏導関数は g_j であるという (f の定める超関数 T_f の微分が g_j である: $\frac{\partial}{\partial x_j} T_f = g_j$ ということ)。

8.2 一般化導関数 (続き)

例えば $\Omega = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & (-1 < x < 0) \\ -1 & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とすると、 f は $x = 0, 1, -1$ で微分可能ではないが、

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) dx.$$

ゆえに f の一般化導関数は g .



8.3 Sobolev 空間 $W^{m,p}(\Omega)$

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、 $1 \leq p < \infty$ とする ($p = \infty$ の場合は省略する)。

$L^p(\Omega)$ の要素で、その関数の “一般化 1 階偏導関数” がすべて $L^p(\Omega)$ に属するものの全体

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \begin{array}{l} (\exists g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega)) (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \\ (\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx \end{array} \right\},$$

に次のノルムを与える。

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

$m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ に対して $W^{m,p}(\Omega)$ は以下のように帰納的に定義する:

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \ (i = 1, \dots, n) \right\}.$$

($W^{m,p}(\Omega)$ のノルムは省略する。)

$m = 0$ の場合は、 $W^{m,p}(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ を表すとする: $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$ 。

$W^{m,p}(\Omega)$ は Banach 空間である。

8.4 Sobolev 空間 $H^m(\Omega)$

$p = 2$ の場合、 $W^{1,2}(\Omega)$ は内積

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L^2}$$

により Hilbert 空間となる ($\sqrt{(u, u)_{H^1}} = \|u\|_{W^{1,2}}$)。

次の記号も用いられる。

$$H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega).$$

8.5 Sobolev 空間 $W_0^{m,p}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$

$$C_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \varphi \text{ は } \Omega \text{ に含まれる compact 集合}\}$$

一般に $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ である。

$C_0^\infty(\Omega)$ の $W^{m,p}(\Omega)$ での閉包を $W_0^{m,p}(\Omega)$ と表す。つまり、 $u \in W^{m,p}(\Omega)$ について

$$u \in W_0^{m,p}(\Omega) \Leftrightarrow (\exists \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} : C_0^\infty(\Omega) \text{ 内の列}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{W^{m,p}} = 0.$$

$H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$ とする。

$W_0^{m,p}(\Omega)$ も $H_0^m(\Omega)$ も閉線形部分空間であるから、 $W_0^{m,p}(\Omega)$ は Banach 空間、 $H_0^m(\Omega)$ は Hilbert 空間である。

8.6 Sobolev 空間 有界領域の場合の $H_0^1(\Omega)$, Poincaré の不等式

Ω が有界領域であれば、Poincaré の不等式が成立する:

$$(\forall p \in [1, \infty))(\exists C > 0)(\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}.$$

特に $V := H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ に対して、

$$(u, v)_V := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}, \quad \|u\|_V := \sqrt{(u, u)_V} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

はそれぞれ内積、ノルムとなり、ノルムは $\|\cdot\|_{H^1}$ と同値である:

$$(\exists C_1, C_2 > 0)(\forall u \in V) \quad C_1 \|u\|_{H^1} \leq \|u\|_V \leq C_2 \|u\|_{H^1}.$$

8.7 Sobolev 空間を使うのはなぜ？

弱解の方法を用いるには、**完備性があると簡単だから** (必要という方が正確？)。完備性のために Lebesgue 積分に基づく $L^p(\Omega)$ と、一般化導関数を導入した。

特に Hilbert 空間であれば、次の射影定理が成り立つ (後の Riesz の表現定理, Lax-Milgram の定理, etc. につながる)。

定理 13.14 (射影定理)

X が Hilbert 空間、 V が X の空でない凸閉部分集合ならば、任意の $u \in X$ に対して、

$$h \in V, \quad \|u - h\| = \inf_{v \in V} \|u - v\|$$

を満たす h が存在する ($h = \arg \min_{v \in V} \|u - v\|$ と書く方が分かる人がいるかも)。

証明のあらすじ $\|u - v_n\| \rightarrow \inf_{v \in V} \|u - v\|$ となる V 内の列 $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を取り、中線定理

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

に $x = u - v_n$, $y = u - v_m$ を代入すると、 $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Cauchy 列であることが分かる。**完備性より収束する**。その極限を h とすれば条件を満たす (V は閉集合なので $h \in V$ 。また $\|u - h\| = \inf_{v \in V} \|u - v\|$)。□

偏微分方程式の代表的な数値解法である有限要素法の原理と、FreeFEMによるプログラミングについて解説した。

有限要素法は、数学的背景がしっかりしているため、説明・理解が比較的しやすい方法といえる (実際に使われている手法でも、その理論的根拠を説明できないことは珍しくない)。

有限要素法は割と数学者好みで、数値計算しないけれど、理論について論文を書いたりするような人もいる。もったいないなあ…

しかし有限要素法ですべてがうまくいくわけでもないし、うまく行く場合もその説明が難しいこともある。実際に利用する場合には、結果の妥当性について慎重な検討が必要になる。

慎重に、どしどし使ってみて下さい。

有限要素法をどのように学ぶか ひとりごとのような (1)

有限要素法についての半期の講義科目の内容をどのようにするか、折に触れ考え続けている。

「数値計算は総合技術」という言葉があるように、1つの数値計算を行うために、**非常に多くのものが必要**になる(微分方程式の理解、離散化アルゴリズム、線形演算・数値積分・関数近似などの基本的な問題を解くためのアルゴリズム、プログラミング言語とコーディング・テクニク、可視化ソフトウェア、計算に用いるシステムの理解、数値計算結果をどのように記録・保存・解析するか、…)。それら**すべてを自分で理解して用意するのは困難**であり、また**必要もない**ことであろう。FreeFEMのようなソフトウェアが登場して普及しつつある現在、それをひしひしと感じている。しかし、まだまだソフト任せにして全部解決というわけには行かない。**どのように向き合えば良いのか**、考えずにはいられない。

車の運転にたとえて論じられることもある。創成期は車の運転をする人は内部構造を良く理解していたが、それは段々と必要なくなり、今では運転前にボンネットを開けることをしない人も多い(「何それ?」と言われそうだ)。もうエンジンについて理解したりする必要はないのではないか。それはそうなのかもしれない…しかし、車の運転の場合は(目的地まで安全かつ迅速かつ快適に到着したか) 効果・結果がはっきり見えるが、**数値計算の場合は結果の良し悪しがすぐには分からない**ことは注意すべきであろう。

有限要素法をどのように学ぶか ひとりごとのような (2)

数理モデルによく現れる数値計算法であるから、実用性は重要である。しかし実用性とは何か真剣に考えないと (計算結果の品質をちゃんと評価している?)、単なる事例収集になってしまう可能性がある。なぜそれで結果が得られるのか、**得られた結果がどれくらい信用できるのか**、そもそもその方法を採用するのは正しいのか、分からないままになる危険性がある。

工学では分野によっては、定評のあるハンドブックというものがあり、それを紐解くと、重要な問題を網羅してあって、主だった文献にどのようなものがあるか紹介し、その内容の要約を解説した上で、「詳しいことはこの文献を見て下さい」と読者を導き、可能な場合は複数の方法の比較検討を行ったりしている。

有限要素法の場合にそういうものがあるのだろうか…(分野をしばればあるのかもしれないが…)

ここまでの「応用数値解析特論」を振り返って

前半では、Poisson 方程式の境界値問題を取り上げ、弱定式化、Ritz-Galerkin 法、直接剛性法に基づく連立 1 次方程式の導出、FreeFEM による実装を解説した。ここまでは比較的堅実な足取りであったと考えている。

その後は、FreeFEM を活用して、時間発展する系 (熱方程式、波動方程式)、流体力学の方程式 (ベクトル値関数の方程式の弱形式導出)、固有値問題などを解説した。盛りだくさんだが、前半と比べると相当な駆け足で、ウィンドー・ショッピング的になった嫌いがあるかもしれない (非常に幅広い応用があるということで仕方がない、という気はする)。

この講義の締めは、理論的にどこまで保証されているかについて、簡単・不十分でも構わないから解説することとしたい。かなりの強行軍かもしれない。

すみません、今日はちょっと無茶をやります。

参考文献 I

- [1] 菊地文雄：有限要素法の数理, 培風館 (1994), 有限要素法の解析に関する貴重な和書です。
- [2] 齊藤宣一：偏微分方程式の計算数理, 共立出版 (2023/10/25), <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000162553>.
- [3] 田端正久：偏微分方程式の数値解法, 岩波書店 (2010), もともとは岩波講座応用数学の「微分方程式の数値解法 II」(1994)であった。
- [4] Brenner, S. C. and Scott, L. R.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3rd edition*, Springer (2008).
- [5] Brezis, H.: 関数解析, 産業図書 (1988), (藤田 宏, 小西 芳雄 訳), 原著は版を改めて、より内容豊富になっています。
- [6] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).

- [7] Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, AMS (2010), 偏微分方程式の定番本.
- [8] 藤田宏, 黒田成俊^{しげとし}, 伊藤清三: 関数解析, 岩波書店 (1991), 岩波講座 基礎数学 (1978 年) の書籍化.
- [9] 黒田成俊^{しげとし}: 関数解析, 共立出版 (1980).
- [10] 菊地文雄: 有限要素法概説, サイエンス社 (1980), 新訂版 1999.
- [11] Dauge, M.: *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains: Smoothness and Asymptotics of Solutions*, Lecture Notes in Mathematics book series (LNM, volume 1341), Springer (2009), 明治大学は電子版を購入してあります.
<https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0086682> でアクセス可能.

- [12] Grisvard, P.: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston (1985), SIAM から 2011 年に再販されています.
- [13] 齊藤宣一：有限要素法と非線形楕円型方程式の解の可視化, Ver. 2, 今は公開していないようなので僕の学生で読みたい人は相談。[2] があれば要らないのかな ([2] に同じこと書いてないか、探しているのだけど…)。(2009, 2010).
- [14] Adams, R. A. and Fournier, J. J. F.: *Sobolev Spaces*, Academic Press (2003/7/1), 第 1 版は Adams の単著だった。値段が高くてちょっと勧めにくい。
- [15] 宮島静雄：ソボレフ空間の基礎と応用, 共立出版 (2006/8/25).