応用数値解析特論 第10回

かつらだ　まさし
桂田 祐史

2026年6月23日

目次

今後の予定

- 次回は
  - レポート課題 A(共通) に取り組んでもらう。
  - レポート課題 B は、各自が選んだ問題について有限要素法で取り組む、というもの。各自問題を決める (現象・数理モデル、弱形式の説明, 数値実験結果とその分析をする)。どういう問題を選ぶか、質問・相談を受け付ける。Hecht [1], 大塚・高石 [2] などに目を通しておくこと。
- 今日は、流体力学の方程式の説明。さ来週以降、定常 Stokes 方程式 (最小化変分原理でない問題, 非線型なので Newton 法で解く)、非定常 Navier-Stokes 方程式について紹介するための準備。

時間に余裕があれば、前回話した全周問題のサンプル・プログラムの紹介をする。

流体 (**fluid**) とは、液体, 気体のように定まった形を持たず、「流れる」ものを理想化したものである。
(Cf. 質点, 質点系, 剛体, 弾性体, ⋯)

- 流体のかかわる現象は非常に多く、応用上重要である。
- 流体は、圧縮性と粘性の有無で分類される。
- 流体の運動の決定については、数学的には解の存在・一意性すら未解決問題である。(ほとんどが非線形問題になり取り扱いが難しい。)

流体力学の定番本として、今井 [3], 巽 [4] をあげておく。

5.2 流体の運動の表現　何を求めれば良いか

流体の状態は、ふつう次のものを求めることで定まる。ただし $\boldsymbol{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ は位置, t は時刻を表す。

- 速度 (velocity) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

  ($\boldsymbol{v}$ の代わりに $\boldsymbol{u}$ という字を使うことも多い。)
- 圧力 (pressure) $p(\boldsymbol{x}, t)$
- 密度 (density) $\rho(\boldsymbol{x}, t)$
- 温度 (temperature)　今回は考えない。

問　水と空気のおおよその密度は？ (この PDF の最後に答えがある。)

解答　水は 1 ml で 1 g とすれば、$\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ である。

空気については、高校の化学の知識で、1 mol は 22.4 ℓ であること、80% が窒素 (分子量 28)、20% が酸素 (分子量 32) であることを用いると、$\rho = 1.3\ \mathrm{kg/m^3}$ となる。

5.3 流体力学の方程式 (1) 連続の方程式

　質量が保存されることから、一般に次式が成立する。これを**連続の方程式** (continuity equation) と呼ぶ。

(1)
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

証明 (あらすじ)　流体内の任意の領域 V にしめる流体の質量の時間変化率を考えると、質量保存則から

(2)
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d\boldsymbol{x} = -\int_{\partial V} \rho \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

ただし $\boldsymbol{n}$ は ∂V の点における外向き単位法線ベクトルで、$d\sigma$ は面積要素、∂V は V の境界である。

　(2) の右辺の意味や、次の Gauss の発散定理については、例えば桂田 [5], [6] を見よ。

　左辺に積分記号下の微分 (微分と積分の順序交換)、右辺に Gauss の発散定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\boldsymbol{x} = -\int_V \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}.$$

V は任意であるから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \quad \square$$

5.4 物質微分 (1) 定義

積の微分法から $\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = \operatorname{grad}\rho\cdot\boldsymbol{v} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ が成り立つので、連続の方程式は次のように書ける。

(3) $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

物質微分 (material derivative, Lagrange derivative) と呼ばれる作用素 $\frac{D}{Dt}$ を次式で定義する:

(4) $$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

これを使うと (3) は次のように表せる。

(5) $$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

5.4 物質微分 (1) 定義　ベクトル値関数の場合

ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x},t)\\ f_2(\boldsymbol{x},t)\\ f_3(\boldsymbol{x},t)\end{pmatrix}$ に対しても

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}:=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f_1\\(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f_2\\(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)f_3\end{pmatrix},\quad \frac{D\boldsymbol{f}}{Dt}:=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\dfrac{Df_1}{Dt}\\\dfrac{Df_2}{Dt}\\\dfrac{Df_3}{Dt}\end{pmatrix} \tag{6}$$

と定義する。
(これを定義しておかないと、加速度の議論が出来ない。)

5.4 物質微分 (2) 意味

流体の流れに沿って運動するある粒子 (観測者) の位置を $\boldsymbol{x}(t)$ とする。すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t), t)$$

が成り立つ。このとき、任意の関数 $f(\boldsymbol{x}, t)$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), t) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t), t) x_j'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t), t) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t), t) v_j(\boldsymbol{x}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(\boldsymbol{x}(t), t) = \frac{Df}{Dt}(\boldsymbol{x}(t), t)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

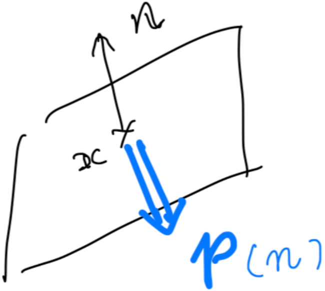
注意　流体粒子の速度は、位置 $\boldsymbol{x}$ と時刻 t が分かれば $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ で与えられるが、その加速度は $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ でなく、$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$ である。

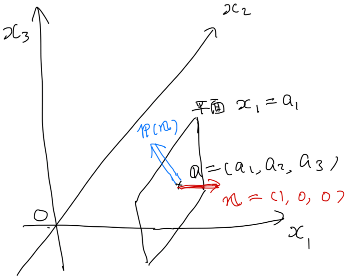
5.5 応力 (1) Cauchy の応力原理, 応力の定義

流体の運動を考えるため、Cauchy は次の仮定をおいた。

> 流体が接触することで及ぼす力は面積に比例する。面積あたりの力は、位置 x, 時刻 t, 面の向き (普通は外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で指定する) で定まる (**Cauchy の応力原理**)。

この面積あたりの力を**応力** (stress) と呼ぶ。





しばらく、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, $t = \tau$ と固定し、応力 $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{n}$ の関数と考える: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$.

点 $\boldsymbol{a}$ を通る平面 $x_i = a_i$ を通して、正の側が負の側におよびす力を $\begin{pmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{pmatrix}$ とおく。これは $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_i)$ である。

$$P := (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$ を**応力テンソル** (stress tensor) と呼ぶ。

次のことが成り立つ (証明は省略)。

- P は対称である: $P^\top = P$ つまり $p_{ij} = p_{ji}$.
- $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n}$. $\quad$ ($\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P^\top \boldsymbol{n}$ と書く本もある。)

次式は覚えておくこと。

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) = P\boldsymbol{n}. \tag{7}$$

5.5 応力 (3) 応力テンソルの具体形

適当な仮定をおくと、応力テンソルの具体形が定まる。

Stokes (1819–1903) は、流体についての仮定を整理して **Stokes の流体公理**にまとめた (一様、等方、$E = 0$ のとき $P = -pI$ 等々)。それから

$$P = \alpha I + \beta E + \gamma E^2$$

が導かれる。ここで I は単位テンソル, E は

$$E = (e_{ij}), \quad e_{ij} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{8}$$

で定められ、**歪み (速度) テンソル** (strain rate tensor) あるいは**変形速度テンソル**と呼ばれる。

さらに **Newton 流体の仮定** (P は E の 1 次式) をおくと、

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v})\, I + 2\mu E \tag{9}$$

を得る (導出は岡本・中村 [7] に載っている)。ここで λ, μ は非負定数、$p = p(x, t)$ はスカラー関数である。

5.6 完全流体, 粘性流体, 非圧縮流体 (1)

以下では、Newton 流体の仮定を満たす流体を考える。

μ は**粘性率** (**粘性係数**, **粘度**, viscosity) と呼ばれる非負定数である。

- $\mu = 0$ である流体を**完全流体** (perfect fluid), あるいは**非粘性流体** (inviscid fluid) と呼ぶ。
- $\mu > 0$ である流体を**粘性流体** (viscous fluid) と呼ぶ。

一方、$\frac{D\rho}{Dt} = 0$ を満たす流体を**非圧縮流体**と呼ぶ。一般に連続の方程式 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ が成り立つので、この条件は次の方程式と同値である。

(10) $$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{非圧縮条件の方程式})$$

($\because$ 連続の方程式のうち $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ という形のものを見れば分かる。)

非圧縮条件を満たす Newton 流体の応力テンソルは、次式を満たす。

(11) $$P = -pI + 2\mu E.$$

非圧縮流体が、静止している場合 ($\boldsymbol{v}=0$) や、粘性がない場合 ($\mu=0$) においては ($\mu E=0$ であるので)

$$P=-pI=-\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})=P\boldsymbol{n}=-p\boldsymbol{n}.$$

応力は面に垂直 ($\boldsymbol{p}\parallel\boldsymbol{n}$)、押される向きで (外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と逆向き)、大きさは $p=p(\boldsymbol{x},t)$ で $\boldsymbol{n}$ にはよらない。

学校の理科で、止まっている水の力学として聞いたことがあるかもしれない。

5.7 流体力学の方程式 (2) 運動方程式 (1) 一般形

Cauchy の応力原理を認めると、外力がない場合 (流体が流体の応力だけで運動する場合)、一般に次の方程式が成立する。

(12) $$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{1}{\rho}\operatorname{div}P \quad \text{(流体の運動方程式)}\ .$$

ただし

(13) $$\operatorname{div}P:=\begin{pmatrix}\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{13}}{\partial x_3}\\ \frac{\partial p_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{23}}{\partial x_3}\\ \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}\end{pmatrix} \quad \text{(行ごとに div)}$$

証明 流体内の仮想的な領域 V で運動方程式を立てると

$$\int_V \rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\,d\boldsymbol{x}=\int_{\partial V}P\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

右辺のベクトルの第 i 成分に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_{\partial V}(p_{i1}n_1+p_{i2}n_2+p_{i3}n_3)d\sigma=\int_{\partial V}\begin{pmatrix}p_{i1}\\p_{i2}\\p_{i3}\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\int_V\operatorname{div}\begin{pmatrix}p_{i1}\\p_{i2}\\p_{i3}\end{pmatrix}d\boldsymbol{x}=\int_V(\operatorname{div}P)_i\,d\boldsymbol{x}.$$

ゆえに $\displaystyle\int_V\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\,d\boldsymbol{x}=\int_V\operatorname{div}P\,d\boldsymbol{x}$. V は任意なので $\displaystyle\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\operatorname{div}P.$ □

5.7 流体力学の方程式 (2) Newton 流体の場合の $\operatorname{div} P$

(既に述べたように) Newton 流体の公理を満たすとき

$$P = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v}) I + 2\mu E$$

が成り立つ。このとき $\operatorname{div} P$ を計算すると

(14) $$\operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{v} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}).$$

ただし

$$\triangle \boldsymbol{v} := \begin{pmatrix} \triangle v_1 \\ \triangle v_2 \\ \triangle v_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \quad \text{(念のため)}.$$

特に非圧縮流体では ($\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ であるから)

(15) $$\operatorname{div} P = -\nabla p + \mu \triangle \boldsymbol{v}.$$

これで準備はできた！

5.7 流体力学の方程式 (3) Navier-Stokes

非圧縮流体の運動方程式は次の形になる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v}. \tag{16}$$

これが非圧縮粘性流体の方程式として有名な**Navier-Stokes方程式**(ナヴィエ・ストークス)である。
ただし

$$\nu := \frac{\mu}{\rho} \tag{17}$$

とおいた。ν を**動粘性率** (kinematic viscosity) と呼ぶ。

5.7 流体力学の方程式 (3) Euler 方程式

特に完全流体の場合は ($\mu = 0$ であるから)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{18}$$

これが非圧縮完全流体の方程式として有名な**Euler方程式**(オイラー)である。

Euler 方程式は、左辺が加速度、右辺が "圧力勾配 (pressure gradient)" $\times(-1/\rho)$ で、割と分かりやすい。Navier-Stokes 方程式は、それに粘性による引きずり効果が入っている (少し分かりにくい)。

注意: この話の流れでは、非圧縮流体で、$\mu = 0$ と仮定して、Euler 方程式を導いたが、実は、圧縮性流体で Euler 方程式を考えることもある ($\lambda = 0$, $\mu = 0$ と仮定した、とも言える)。

5.7 流体力学の方程式 (4) Stokes 方程式

流速 ($|\boldsymbol{v}|$) が小さいとき、Navier-Stokes 方程式で、$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ を無視して ($\boldsymbol{v}=0$ で線形化する、とも言える)

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v}. \tag{19}$$

を得る。これを **Stokes 方程式**と呼ぶ。粘性非圧縮流体の遅い流れの数学モデルとして採用される。

この他にも線形化したもの、圧縮性流体 (最近流行している) の場合など、色々あるが、運動方程式の話はこのくらいにしておく。

5.7 流体力学の方程式 (5) 練習の勧め

今日の授業は、ほとんどが単なるお話になってしまう嫌いがあると思われる。

流体力学をある程度きちんと学ぶ場合、次のような練習がおすすめ。

- (14) を確かめよ (導関数を計算するだけだが、ベクトル解析の記号の良い練習である)。
- Navier-Stokes 方程式をベクトル表記でなく、成分表記せよ ($(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ はどういうものか、一度は書いてみよう)。
- Navier-Stokes 方程式を覚えてみよう。

解を求めるための問題設定をするとき、初期値境界値問題とするのが普通である。境界条件について説明する。

粘性流体では、固体の壁では

(20) $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{wall}} \quad (\text{壁の表面において})$$

を満たすことが知られている ($\boldsymbol{v}_{\mathrm{wall}}$ は壁の速度)。特に固定壁では

(21) $$\boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{壁の表面において})$$

を満たす。これを**粘着境界条件** (no-slip boundary condition) と呼ぶ。

数学的にはいわゆる Dirichlet 境界条件であり、扱いやすい。

5.8 流体の境界条件 (2) 滑り境界条件

一方

(22) $$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n} \quad (\text{境界において})$$

を**滑り境界条件** (slip boundary condition) と呼ぶ。速度の垂直成分が 0 (壁に沿って動く) で、応力が境界に垂直 (壁に沿う成分が 0) ということである。

計算するためには方程式で表現するのが望ましい。

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) \parallel \boldsymbol{n}$ は、3 次元では

$$P\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}$$

と表せる。また 2 次元流 (まだ説明していない) では、領域の境界曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$ として、次式で表せる。

$$P\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=0.$$

注意　非粘性流体では、流体のしめる領域内で $P\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{n}$ が成り立つ。$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$ が滑り境界条件である、とみなしている人が多い。

5.8 流体の境界条件 (3) その他

これ以外に、応力を指定する**応力境界条件**, **摩擦型滑り境界条件**, **摩擦型漏れ境界条件**など色々あるが、それは必要になったときに説明する。

5.9 おまけ: 適切な問題のための条件

微分方程式の解を一意に定めるためには、連続の方程式、運動方程式以外に、境界条件や初期条件が必要になる。

この講義では、以下 θ や ρ は定数として議論を行うが、そうでない場合にどうすれば良いか、簡単に説明しておく。

- 温度 θ の変化を考える場合、熱方程式のような方程式を導入することになる。
- 密度 ρ の変化を考える場合は、状態方程式 $\rho = f(p)$ を導入することが多い[1]。

θ や ρ は定数と仮定すると、以下の 4 つの条件で $\boldsymbol{u}$, p が一意的に定まると期待される。

(a) 非圧縮条件 (連続の方程式)
(b) 運動方程式 (Navier-Stokes 方程式, Stokes 方程式, Euler 方程式, etc.)
(c) 流速に関する境界条件
(d) 流速に関する初期条件　$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in \overline{\Omega})$

[1] 等温変化ならば $\rho \propto p$. 断熱変化ならば、Poisson の法則から $\rho \propto p^{1/\gamma}$, ここで γ (> 1) は等エントロピー指数 (isentropic exponent) と呼ばれる定数である。この辺になると温度も変化すると考えるべきなのかもしれない。

5.9 おまけ: 適切な問題のための条件

圧力に関しては、境界条件も初期条件も課さないことに注意しよう。

それとも少し関係するが、圧力はしばしば定数だけの不定さを持つ。実際、$\boldsymbol{u}$, p が (a)–(d) を満たすとき、任意の定数 C に対して $\boldsymbol{u}$, $p' = p + C$ が (a)–(d) を満たすことは明らかである。

圧力 p を 1 つに定めるには、どこか 1 点での値を指定したり、

$$\int_\Omega p(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = 0 \quad (\text{平均がつねに } 0) \tag{23}$$

という条件をつけたりする必要がある。

考えている問題に現れる長さ、速さについて、何か “代表的な” 値 L, U を取って

(24)
$$\boldsymbol{x}' := \frac{\boldsymbol{x}}{L}, \quad t' := \frac{t}{L/U}, \quad \boldsymbol{u}' := \frac{\boldsymbol{u}}{U}, \quad p' := \frac{1}{\rho U^2} p$$

とおくと、$\boldsymbol{x}'$ と t' は無次元の独立変数であり、$\boldsymbol{u}'$ と p' は無次元の従属変数である。

$\boldsymbol{x}'$ についての gradient, Laplacian をそれぞれ ∇', $\triangle'$ と書くことにすると

(25)
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t'} + (\boldsymbol{u}' \cdot \nabla')\boldsymbol{u}' = -\operatorname{grad}' p' + \frac{1}{R}\triangle' \boldsymbol{u}'.$$

ただし R は

(26)
$$R := \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{UL}{\nu}$$

で定義される無次元数 (dimensionless number) で、**Reynolds 数** (the Reynolds number) と呼ばれる。e を添えて R_{e} と書かれることも多い。

$'$ を取ると、“無次元化された Navier-Stokes 方程式” が得られる。

(27)
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\operatorname{grad} p + \frac{1}{R}\triangle \boldsymbol{u}.$$

Reynolds 数が大きいと、乱流が発生しうるようになり、数学的に扱いづらく (「Reynolds 数が十分小さければ」と仮定することが多い)、数値計算でも解きにくくなる。

無次元化方程式 (25) の導出

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1'} \\ \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2'} \\ \frac{\partial x_3'}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3'} \end{pmatrix} = \frac{1}{L}\nabla', \quad \triangle = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{1}{L^2}\triangle'.$$

以上を Navier-Stokes 方程式に代入して

$$\rho\left[\frac{U}{L}\frac{\partial}{\partial t'}Uu' + \left(Uu'\cdot\frac{1}{L}\nabla'\right)Uu'\right] = -\frac{1}{L}\nabla' p + \mu\frac{1}{L^2}\triangle' Uu'.$$

左辺、右辺それぞれ整理して

$$\frac{\rho U^2}{L}\left[\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u'\cdot\nabla')\,u'\right] = -\frac{1}{L}\nabla' p + \frac{\mu U}{L^2}.$$

両辺を $\rho U^2/L$ で割ると

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u'\cdot\nabla')u' = -\frac{1}{\rho U^2}\nabla' p + \frac{\mu}{\rho UL}\triangle' u'.$$

p', R の定義 ($p' = \frac{1}{\rho U^2}p$, $R = \frac{\rho UL}{\mu}$) から、(25) を得る。 □

5.11 おまけ: 重力下の静水圧 (1) $p = -\rho g z + p_0$

池 (水が静止している) の水圧を、Navier-Stokes 方程式を解いて調べよう (非圧縮性も仮定していることになる)。

一様な重力場を仮定する。$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ という単位質量あたりの外力 $\boldsymbol{f}$ を含めた

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \triangle \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$$

が運動方程式になる。$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{f}$. 成分で書くと

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

水面を $z = 0$ として、$z = 0$ において、$p = p_0 =$ 大気圧 とすると

$$p(\boldsymbol{x}) = -\rho g z + p_0.$$

1 m 深く潜った (z を 1 減らした) ときの、圧力の増加分 Δp (Laplacian ではない) は

$$\Delta p = -\rho g(-1) = 1.0 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times 1\ \mathrm{m} = 9.8 \times 10^3\ \mathrm{Pa}.$$

大気圧 $p_0 = 1013\ \mathrm{hPa} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$ であるから、Δp は大気圧 p_0 の 10% くらいである。だから 10 m 潜ったとき、$\Delta p \fallingdotseq p_0$ となる訳である。

この問題は素朴な考え方で「解ける」ので、大げさな解き方のように思えるが、我々は導出した方程式をもとに考えようとしているので、無駄なことではない。

一様な重力場の下での池あるいは湖 (水が静止している) に物体 Ω を入れたとき、物体の表面は水から応力を受ける。その “合力” を求めよう。

$\operatorname{div} P + \rho \boldsymbol{f} = 0$ より

$$\operatorname{div} P = -\rho \boldsymbol{f} = -\rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix}.$$

ゆえに水から受ける応力の合計は

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) d\sigma &= \int_{\partial\Omega} P\boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} P\, d\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} d\boldsymbol{x} = \rho g \int_{\Omega} d\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{e}_3 = \rho\,|\Omega|\, g\, \boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

ただし

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Omega| = \Omega \text{ の体積}.$$

$\rho\,|\Omega|$ は「物体が押しのける水の質量」で、$\rho\,|\Omega|\, g$ はその重さ (重力) である。つまり向きが鉛直方向の上向き ($\boldsymbol{e}_3$) で、大きさが「物体が押しのける水の重さ」に等しい力となる。これが**浮力**である。

5.12 おまけ: 粘性率、動粘性率の具体値

粘性率、動粘性率は、粘性の大きさを表す量であるが、わかりにくい。身近な流体の場合にどういう値を取るかくらい調べておこう。

問　水や空気では、粘性率、動粘性率はどういう値を取るか。温度は 20 度とする。

答　水の場合

$$\mu = 1.005 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}, \quad \nu = 1.0 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}.$$

空気の場合

$$\mu = 1.83 \times 10^{-5}\ \mathrm{Pa \cdot s}, \quad \nu = 1.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}. \quad \square$$

私は特に根拠なく、水の方が大きそうに思っていた。μ については確かにそうだが、ν については逆転している (水の ρ が 3 桁大きいのが効いている)。

なお、サラダ油は水の 60 ～ 80 倍程度であるという。

温度が上がると μ は小さくなる。

気体の場合は、μ は圧力にはほとんどよらない。

5.13 渦度　駆け足の説明

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ を流体の速度場とするとき

$$\boldsymbol{\omega} := \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

を**渦度**(うずど) (vorticity) と呼ぶ。

物理的には流体粒子の "自転" の角速度の 2 倍と解釈できる (そうである)。

良くある誤解　：水槽の中で水がグルグル回っていても、渦の中心以外では $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ということがありうる。

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ のとき、流れは**渦なし**, **非回転** (irrotational), **層状** (lammelar) などという。

しかし「渦なし」という場合、もう少し強く、ポテンシャル流である (次のスライドを見よ) という意味で使う場合があるようだ。

Lagrange の渦定理　「完全流体の、外力が保存力である流れでは、ある時刻で $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ であれば、その後も $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ である。」

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対して、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ $(\nabla\phi = \operatorname{grad}\phi)$ を満たす ϕ が存在するとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル** と呼ぶ。特に $\boldsymbol{v}$ が速度場のとき、ϕ を $\boldsymbol{v}$ の**速度ポテンシャル**と呼ぶ。

速度ポテンシャルが存在する流れを、**ポテンシャル流**であるという。

ポテンシャル流は渦なしである。

($\because$ 一般に $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = \mathbf{0}$ が成り立つので、$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \mathbf{0}$.)

単連結領域における渦なしの流れはポテンシャル流である。

($\because$ これもベクトル解析の常識 — この PDF の末尾で少し説明)

- 一般には、渦なしであっても、ポテンシャル流であるとは限らない。
- 任意の開球は単連結領域であるから、渦なしの流れは局所的にはポテンシャルを持つことが分かる。
- 多価関数のポテンシャルを認めると、より一般の渦なしの流れのポテンシャルが存在することが分かる。

粗くまとめると

渦なしの流れ ≒ ポテンシャル流

5.14 ポテンシャル流

境界 $\partial\Omega$ では

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=\operatorname{grad}\phi\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial\phi}{\partial n}.$$

流体が非圧縮であると仮定すると

$$\triangle\phi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi=\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0.$$

非圧縮非粘性流のポテンシャル流では、境界上で $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ が分かっていれば、速度ポテンシャル ϕ は、次の Laplace 方程式の Neumann 境界値問題の解となる。

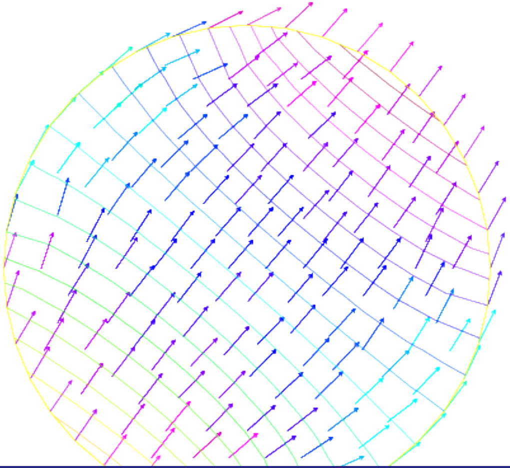
$$\triangle\phi=0 \quad (\text{in } \Omega), \tag{28a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \quad (\text{on } \partial\Omega). \tag{28b}$$

ここまで運動方程式 (Euler 方程式)　が出て来ていないが、それを使って、p が求められる。

5.14 ポテンシャル流

```
curl -O https://m-katsurada.sakura.ne.jp/ana2026/potential2d
FreeFem++ potential2d-v0.edp^^I
```



5.14 ポテンシャル流

Poisson 方程式の Neumann 境界値問題

$$-\triangle u = f \quad (\text{in } \Omega), \tag{29a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{29b}$$

の解が存在するためには

$$\int_\Omega f\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = 0$$

が必要である。実際、

$$\int_{\partial\Omega} g\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = \int_\Omega \triangle u \cdot 1\, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} 1\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega f\, d\boldsymbol{x}.$$

逆にこの条件が成り立っていれば、解も存在する。

参考文献 I

[1] Hecht, F.: Freefem++ (マニュアル), https://github.com/FreeFem/FreeFem-doc/raw/pdf/FreeFEM-documentation.pdf, 以前は http://www3.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf にあった。(??).

[2] 大塚厚二, 高石武史：有限要素法で学ぶ現象と数理 — FreeFem++数理思考プログラミング —, 共立出版 (2014), https://sites.google.com/musashino-u.ac.jp/freefem/home/book/OT2014 というサポート WWW サイトがある．Maruzen eBook に入っているので、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000018545 でアクセス出来る．

[3] 今井功：流体力学 前編, 裳華房 (1973/11/20), 流体力学の基本的文献。後編は書かれなかった。 https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000108663.

[4] 巽友正(たつみともまさ)：流体力学, 培風館 (1982/4/15).

参考文献 II

[5] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (内容はベクトル解析) (2006〜).

[6] 桂田祐史：ベクトル解析早見表, https://m-katsurada.sakura.ne.jp/complex2-2026/vector_analysis.pdf (2021/5/31〜).

[7] 岡本久, 中村周：関数解析, 岩波書店 (2006/1/26, 2016/11/10 (POD 版)), 岩波講座現代数学の基礎 (1996〜1999) の分冊を単行本化したもの.